Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
4 Settembre 2019
Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare quale modalità si intende scegliere per la prova orale:........................

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Risposta:

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
Risposta:

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$
- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4)$
- $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4+o(t^4)$

calcolare, indicando SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x+8x^2)^{1/4}-e^x}{\sin x - x} = f(x)$$

Risposta:

$$\frac{\frac14\left(-\frac34\right)}{2} = -\frac{3}{32} \qquad \frac{\frac14\left(-\frac34\right)\cdot\left(-\frac74\right)}{6} = \frac{7}{128} = \frac{7}{4^3\cdot 2}$$

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(1+4x+8x^2)^{\frac14} = 1 + \frac14(4x+8x^2) + \frac{\frac14\left(\frac14-1\right)}{2}(4x+8x^2)^2 + \frac{\frac14\left(\frac14-1\right)\left(\frac14-2\right)}{3!}(4x+8x^2)^3$$
$$+ o(x^3)$$
$$= 1 + x + 2x^2 - \frac{3}{32}(16x^2+64x^3) + \frac{7}{4^3\cdot 2}4^3x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + x + 2x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 6x^3 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{5}{2}x^3+o(x^3)\cancel{-1}\cancel{-x}\cancel{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$= \frac{-\frac52-\frac16}{-\frac16} = -\frac{16}{6}\cdot(-6) = 16$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = 3^{\frac{x}{x^2+2x+2}}$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$. $f(\mathbb{R}) = \left[3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}, 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}\right]$

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale.

$\lambda = 3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}, 1, 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}$

Risposta:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = e^{\frac{x}{x^2+2x+2}\ln 3}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3^0 = 1$$

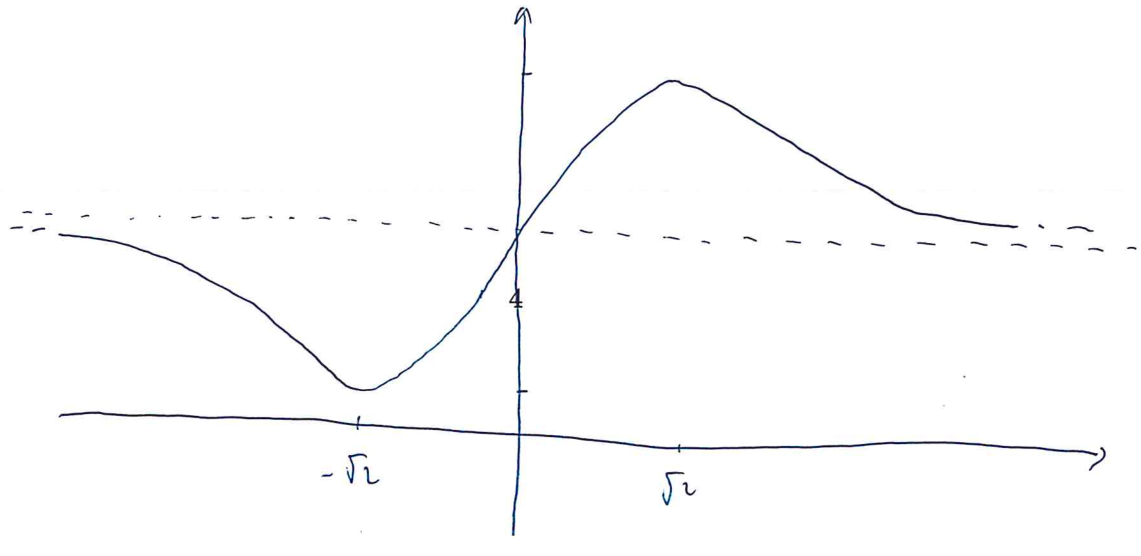
$$f'(x) = 3^{\frac{x}{x^2+2x+2}} \cdot \frac{x^2+2x+2 - x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = 3^{\frac{x}{x^2+2x+2}} \frac{-x^2+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f' > 0 \iff -x^2+2 > 0$$

$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$: f': $-$ $+$ $-$; f: $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$

$$f(-\sqrt{2}) = 3^{\frac{-\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2}} = 3^{-\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}$$

$$f(\sqrt{2}) = 3^{\frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}+2}} = 3^{\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}$$



Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$\frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}; = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_2^4 \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}\,dx.$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)x + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

Risposta:

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ -2A-B+C = -1 \\ A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2-A = 1 \\ C = -1+2A+B = -1+2+1 = 2 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)}$$

$$\int_2^4 \text{—}\,dx = \ln 4 + \ln 3 - \frac{2}{3} - \left(\ln 2 + \cancel{\ln 1} - \frac{2}{1}\right)$$

$$= 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \frac{4}{3}$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \frac{4}{3}$$

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = x^2y - \frac{4}{3}y^3 - 2x^2 + 12y - 2$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.
Risposta:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 4x = 0 \\ f_y = x^2 - 4y^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y-2) = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y^2 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 - 16 + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -8y \end{pmatrix}$$

$2\sqrt{3} - 4 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$

$$H_f(0,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}-4 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ SELLA}$$

$$H_f(0,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} \overset{\overset{0}{\vee}}{2\sqrt{3}-4} & 0 \\ 0 & -8\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ P. DI MAX.}$$

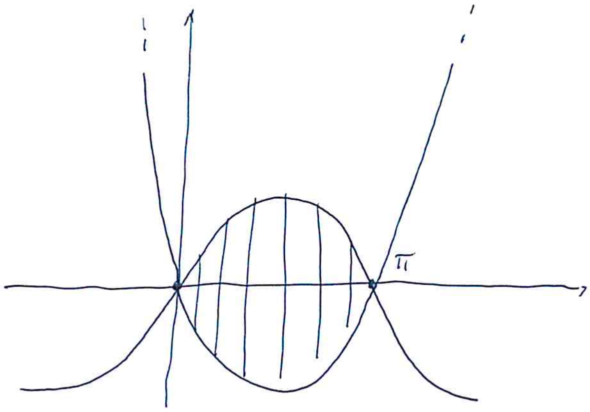
$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} \text{ SELLA}$$

$$H_f(-2,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -16 \end{pmatrix} \text{ P. DI SELLA}$$

III)

$$z = \underset{-4}{\underset{\parallel}{f(1,0)}} + \left\langle \nabla f(1,0), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -4 + \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -4 + 13y - 4(x-1) = -4 + 13y - 4x + 4 = 13y - 4x$$



Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - \pi x \le y \le \sin x\},$$

$$\begin{cases} y = x^2 - \pi x \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \qquad x = \pi$

e calcolare

$$\iint_A 2y\, dx\, dy,$$

Risposta:

$$\int_0^\pi \left(\int_{x^2-\pi x}^{\sin x} 2y\, dy \right) dx = \int_0^\pi \left[y^2 \right]_{x^2-\pi x}^{\sin x} dx = \int_0^\pi \sin^2 x - (x^2 - \pi x)^2\, dx$$

$$\int \sin^2 x\, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

$$2 \int \sin^2 x\, dx = x - \cos x \sin x \longrightarrow \int \sin^2 x\, dx = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \left[\frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi (x^2 - \pi x)^2\, dx = \int_0^\pi (x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{\cancel{2}\pi x^4}{\cancel{4}2} + \frac{\pi^2}{3} x^3 \right]_0^\pi = \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{3} = \frac{6 - 15 + 10}{30} \pi^5$$

$$= \frac{\pi^5}{30}$$