# Corso di Laurea in Informatica

# I parziale di Analisi Matematica

### 18 Dicembre 2017

**Marco Mughetti**

Cognome: ..................................................................................................

Nome: ..................................................................................................

Numero di matricola: ........................................................................

Email: ...........................................................................

Risultati

| | |
|---|---|
| 1.(pt.1) | |
| 2.(pt.1) | |
| 3.(pt.1) | |
| 4.(pt.1) | |
| 5.(pt.6) | |
| 6.(pt.5) | |

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

**Esercizio 1**(pt. 1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$$

*Risposta:*
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}, -5 < x < -5 + \delta_\varepsilon$, si ha che $f(x) < -\varepsilon$.

**Esercizio 1'**(pt. 1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = -7$$

*Risposta:*
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}, -5 - \delta_\varepsilon < x < -5$, si ha che $|f(x) + 7| < \varepsilon$.

**Esercizio 2**(pt. 1)
Enunciare il teorema di Lagrange per la funzione $f : [2, 4] \longrightarrow \mathbf{R}$.
*Risposta:*
Se $f$ è continua in $[2, 4]$ e derivabile in $]2, 4[$, allora esiste $c \in ]2, 4[$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{2}.$$

**Esercizio 2'**(pt. 1)
Enunciare il teorema di Lagrange per la funzione $f : [1, 5] \longrightarrow \mathbf{R}$.
*Risposta:*
Se $f$ è continua in $[1, 5]$ e derivabile in $]1, 5[$, allora esiste $c \in ]1, 5[$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{4}.$$

**Esercizio 3**(pt. 1)
Sia $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di numeri reali crescente, i.e. $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$, cosa si può affermare del $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n$?
*Risposta:*
Il suddetto limite esiste e si ha che

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

**Esercizio 3'**(pt. 1)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri reali decrescente, i.e. $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$, cosa si può affermare del $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n$?
*Risposta:*
Il suddetto limite esiste e si ha che

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

**Esercizio 4**(pt. 1)
Stabilire se si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, \frac{2}{3\pi}]$ alla funzione $f : [0, \frac{2}{3\pi}] \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x\cos(1/x) & \text{se } 0 < x \leq \frac{2}{3\pi}. \end{cases}$$

Argomentare la risposta.
*Risposta:*
Se $x > 0$ la $f(x) = x\cos(1/x)$ è continua in quanto composizione di funzioni continue ed è derivabile in quanto composizione di funzioni derivabili. Per provare che $f$ è continua in $x = 0$ si tratta di mostrare che:

$$\lim_{x\longrightarrow0+} x\cos(1/x) = f(0) = 0.$$

Siccome $|\cos(1/x)| \leq 1, \quad \forall x > 0$, vale la disuguaglianza (per $x > 0$):

$$0 \leq |x\cos(1/x)| \leq x.$$

Applicando il teorema del confronto per $x \longrightarrow 0^+$, si prova il suddetto limite.
Infine $f(0) = 0 = f(\frac{2}{3\pi})$.
Dunque si può applicare il teorema di Rolle.

**Esercizio 5**(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{xe^x}.$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di $f$ sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale.

Può essere utile ricordarsi che $2 < e < 3$.
*Risposta:*
I. La funzione $f$ è definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Si ha che:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x-1}{xe^x} = 0 \ \text{ (usando il teorema di De L'Hopital),}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x-1}{xe^x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2x-1}{xe^x} = +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x-1}{xe^x} = -\infty.$$

La derivata prima di $f$ vale:

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (e^x + xe^x)(2x-1)}{x^2 e^{2x}} = \frac{2xe^x - (2xe^x + 2x^2e^x - e^x - xe^x)}{x^2 e^{2x}} =$$

$$= \frac{-2x^2e^x + e^x + xe^x}{x^2 e^{2x}} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x^2 e^x}.$$

Il segno della derivata prima $f'(x)$ si ottiene studiando il segno del numeratore $-2x^2 + x + 1$. Dunque $f'$ è positiva ($f$ crescente) per $-1/2 < x < 1, (x \neq 0)$, mentre $f'$ è negativa ($f$ decrescente) per $x < -1/2$ e $x > 1$. Di conseguenza, $f(-1/2) = 4\sqrt{e}$ è un minimo locale e $f(1) = 1/e$ è un massimo locale.
II. L'immagine di $f$ è $]-\infty, 1/e] \cup [4\sqrt{e}, +\infty[$.
III. L'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale per $\lambda \leq 0$ e $\lambda = 1/e, 4\sqrt{e}$.

**Esercizio 5'**(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2xe^x}.$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di $f$ sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale.

Può essere utile ricordarsi che $2 < e < 3$.
*Risposta:*
I. La funzione $f$ è definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Si ha che:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2xe^x} = 0 \text{ (usando il teorema di De L'Hopital),}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x-1}{2xe^x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2x-1}{2xe^x} = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x-1}{2xe^x} = -\infty.$$

La derivata prima di $f$ vale:

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (e^x + xe^x)(2x-1)}{2x^2e^{2x}} = \frac{2xe^x - (2xe^x + 2x^2e^x - e^x - xe^x)}{2x^2e^{2x}} =$$

$$= \frac{-2x^2e^x + e^x + xe^x}{2x^2e^{2x}} = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2e^x}.$$

Il segno della derivata prima $f'(x)$ si ottiene studiando il segno del numeratore $-2x^2 + x + 1$. Dunque $f'$ è positiva ($f$ crescente) per $-1/2 < x < 1, (x \neq 0)$, mentre $f'$ è negativa ($f$ decrescente) per $x < -1/2$ e $x > 1$. Di conseguenza, $f(-1/2) = 2\sqrt{e}$ è un minimo locale e $f(1) = 1/2e$ è un massimo locale.
II. L'immagine di $f$ è $]-\infty, 1/2e] \cup [2\sqrt{e}, +\infty[$.
III. L'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale per $\lambda \leq 0$ e $\lambda = 1/2e, 2\sqrt{e}$.

**Esercizio 6**(pt. 5)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$,

- $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$,

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x\sin x} - \ln(1+x\cos x) + \sin(x) - 1}{x^4}$$

*Risposta:*

- $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$
-

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x\sin x} &= 1 + \frac{1}{2}(-x\sin x) - \frac{1}{8}(-x\sin(x))^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4/6 + o(x^4)) - \frac{1}{8}(-x^2 + x^4/6 + o(x^4))^2 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x\cos x) &= x\cos x - \frac{(x\cos x)^2}{2} + \frac{(x\cos x)^3}{3} - \frac{(x\cos x)^4}{4} + o(x^4) \\
&= x(1-x^2/2+o(x^3)) - \frac{1}{2}(x(1-x^2/2+o(x^3)))^2 + \frac{1}{3}(x+o(x^2))^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x+o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&= (x - x^3/2 + o(x^4)) - \frac{1}{2}(x-x^3/2+o(x^4))^2 + \frac{1}{3}(x+o(x^2))^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x+o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&= (x-x^3/2) - (x^2/2 - x^4/2) + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4) \\
&= x - x^2/2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1-x\sin x} - \ln(1+x\cos x) + \sin(x) - 1 = \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - (x - x^2/2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4) + x - x^3/6 - 1 + o(x^4) \\
&= -\frac{7}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

e infine

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x\sin x} - \ln(1+x\cos x) + \sin(x) - 1}{x^4} = -\frac{7}{24}
$$

**Esercizio 6'**(pt. 5)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$,

- $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$,

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - x\sin x} - \ln(1 - x\cos x) - \sin(x) - 1}{x^4}$$

*Risposta:*

- $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$
-

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - x\sin x} &= 1 + \frac{1}{2}(-x\sin x) - \frac{1}{8}(-x\sin(x))^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4/6 + o(x^4)) - \frac{1}{8}(-x^2 + x^4/6 + o(x^4))^2 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1-x\cos x) &= -x\cos x - \frac{(-x\cos x)^2}{2} + \frac{(-x\cos x)^3}{3} - \frac{(-x\cos x)^4}{4} + o(x^4) \\
&= -x(1-x^2/2+o(x^3)) - \frac{1}{2}(x(1-x^2/2+o(x^3)))^2 - \frac{1}{3}(x+o(x^2))^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x+o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&= (-x+x^3/2+o(x^4)) - \frac{1}{2}(x-x^3/2+o(x^4))^2 - \frac{1}{3}(x+o(x^2))^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x+o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&= (-x+x^3/2) - (x^2/2 - x^4/2) - x^3/3 - x^4/4 + o(x^4) \\
&= -x - x^2/2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\sqrt{1-x\sin x} - \ln(1-x\cos x) - \sin(x) - 1 =
$$

$$
= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - (-x - x^2/2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4) - x + x^3/6 - 1 + o(x^4)
$$

$$
= -\frac{7}{24}x^4 + o(x^4)
$$

e infine

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x\sin x} - \ln(1-x\cos x) - \sin(x) - 1}{x^4} = -\frac{7}{24}
$$