

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (15 gennaio 2016)

( C.d.L. Ing. Energetica - Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile in un piano verticale, è costituito di un'asta  $AB$  omogenea (massa  $m$ , lunghezza  $2l$ ) il cui estremo  $A$  è vincolato a scorrere lungo l'asse  $Oy$  senza oltrepassare il punto di ordinata  $q = -l$ . Oltre alla forza peso, agiscono sul sistema:

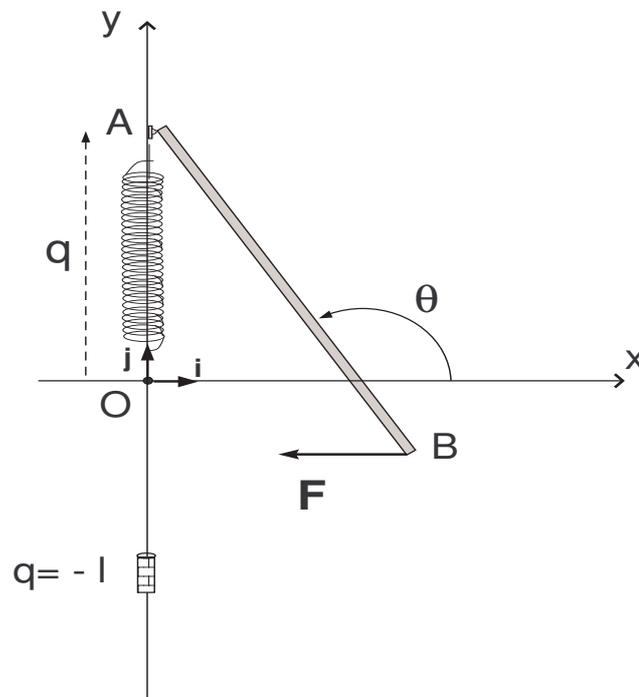
i) la forza elastica  $\mathbf{F}_{el.} = -kOA$  ( $k > 0$ );

ii) la forza  $\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$  ( $F > 0$ , costante;  $\mathbf{i}$  versore dell'asse  $Ox$ ) applicata nel punto  $B$ ;

iii) la forza di resistenza viscosa  $\mathbf{\Psi} = -h\mathbf{v}_A$  ( $h > 0$ ), che si esercita sul punto  $A$ .

Assunti come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  e l'ordinata  $q$  del punto  $A$  (vedi figura) e introdotto il parametro adimensionale positivo  $\lambda = mg/2F$  si chiede:

- 1) Ricavare le configurazioni di equilibrio ordinarie e discuterne la stabilità;
- 2) Determinare, in funzione della costante elastica  $k$  della molla, le eventuali configurazioni di equilibrio di confine;
- 3) Usando le equazioni cardinali della statica, ritrovare le configurazioni di equilibrio già determinate nella domanda (1) e calcolare la reazione vincolare che si esercita in  $A$  nelle posizioni di equilibrio;
- 4) Calcolare la reazione vincolare che si esercita in  $A$  durante il moto;
- 5) Ricavare le equazioni di Lagrange del moto.



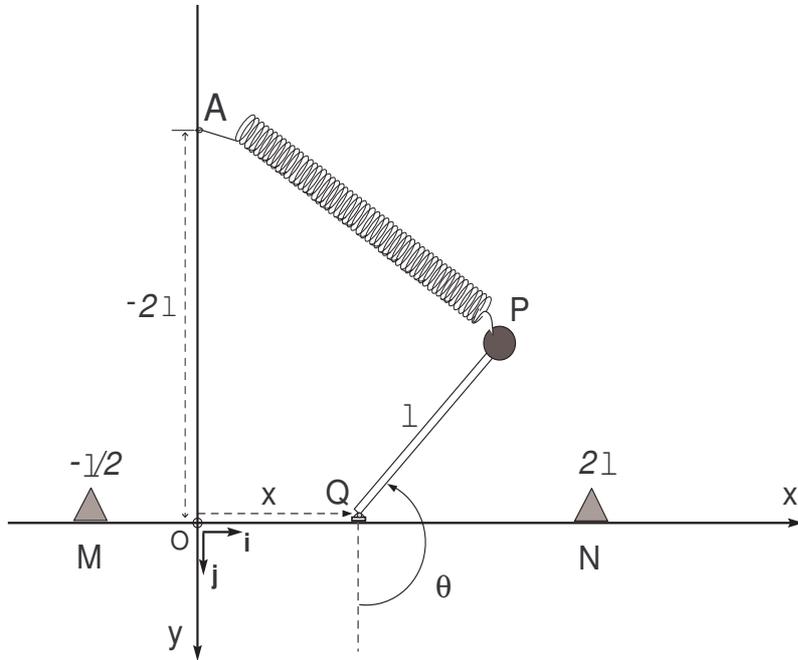
PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (4 febbraio 2016)

(C.d.L. Ing. Energetica ~ Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile nel piano verticale  $Oxy$ , è costituito di un'asta rigida, (lunghezza  $l$ ) la cui massa ( $m$ ) è interamente concentrata nell'estremo P. L'altro estremo Q è vincolato a muoversi, senza attrito, lungo l'asse  $Ox$  non potendo superare i punti  $M = (-l/2, 0)$  ed  $N = (2l, 0)$ . Oltre alla forza peso, agisce sull'asta la forza elastica  $\mathbf{F}_{el.} = (mg/2l) \overline{PA}$  [ $A = (0, -2l)$ ].

Supposti i vincoli ideali e introdotti i parametri lagrangiani  $x$  (ascissa dell'estremo Q dell'asta) e  $\theta$  rappresentati in figura, si chiede:

- 1) Dopo avere rappresentato graficamente lo spazio delle configurazioni del sistema, determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie ed esaminarne la stabilità. Studiare poi l'eventuale equilibrio delle configurazioni di confine;
- 2) Calcolare il valore della reazione vincolare che si esercita sul punto Q nella posizione di equilibrio stabile;
- 3) Scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare eventuali integrali primi del moto;
- 4) Studiare le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (15 aprile 2016)

(C.d.L. Ing. Energetica - Prof. A. Muracchini)

In un piano verticale  $Oxy$ , una circonferenza omogenea  $\gamma$  (raggio  $R$ , massa  $m$ ) rotola senza strisciare sull'asse  $Ox$  e un punto  $P$  (massa  $2m$ ) è vincolato a muoversi, senza attrito, su di essa. Su  $P$  agisce, oltre al peso, la forza elastica  $\mathbf{F}_{el.} = -kAP$  che si mantiene sempre orizzontale (vedi figura). Alla circonferenza è applicata nel suo punto più alto  $C'$  una forza costante  $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$  ( $F > 0$ ). Assunti come parametri lagrangiani gli angoli  $\theta$ ,  $\varphi$  rappresentati in figura e introdotti i parametri adimensionali

$$\lambda = \frac{kR}{2mg} \in \mathfrak{R}^+, \quad \mu = \frac{F}{mg} \in \mathfrak{R}^+,$$

si chiede:

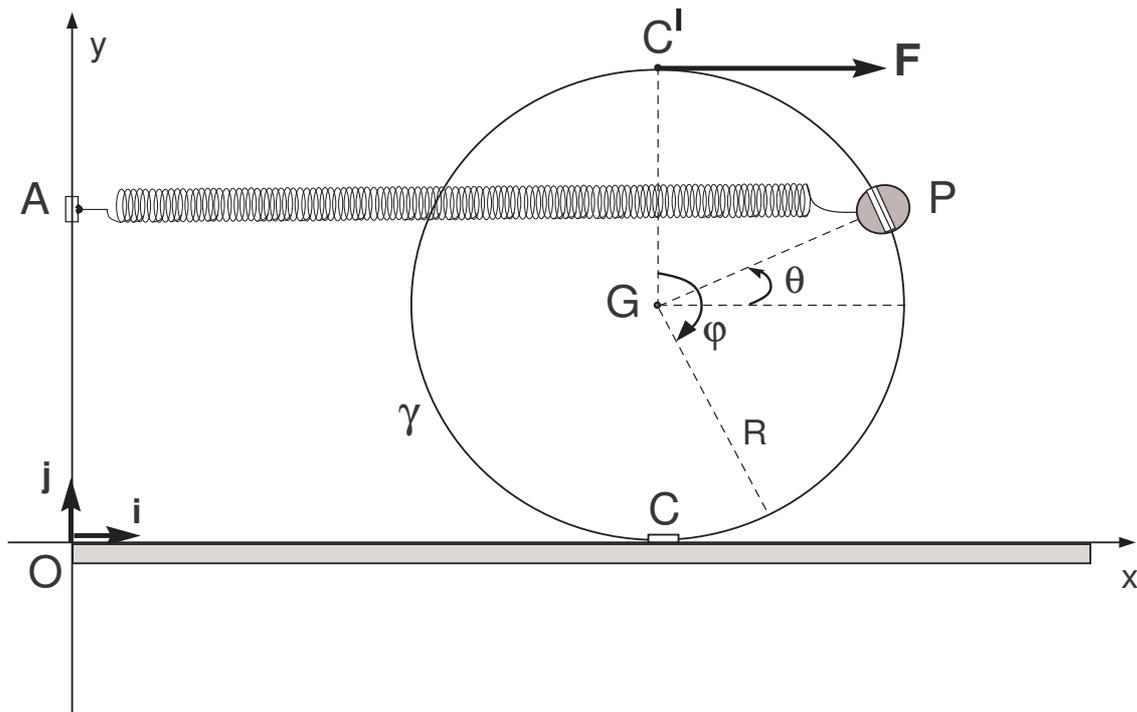
1) Determinare, in funzione di  $\lambda$  e  $\mu$ , le configurazioni di equilibrio del sistema.

*Supposto d'ora in poi, per semplicità di calcolo, che sia  $\lambda = \sqrt{2}$  e  $\mu = 1$ , si chiede:*

2) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nella domanda (1);

3) Calcolare la reazione vincolare che si esercita in  $C$  all'equilibrio;

4) Scrivere la funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema e ricavare le equazioni linearizzate del moto nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.

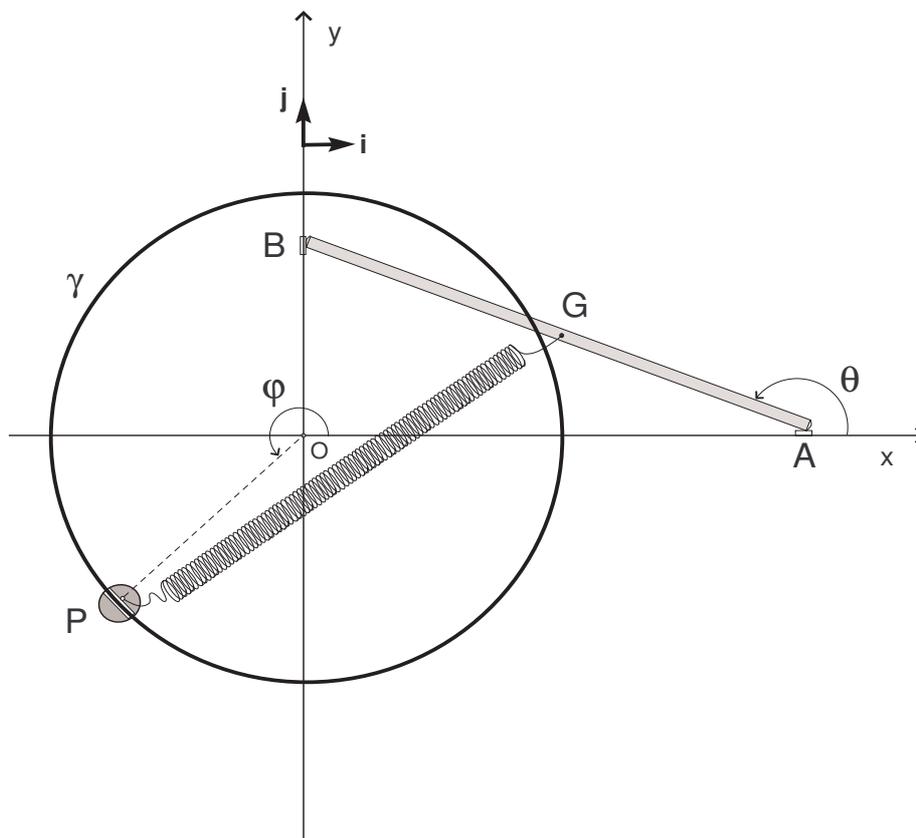


PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (16 giugno 2016)

(C.d.L. Ing. Energetica - Prof. A. Muracchini)

In un piano verticale  $Oxy$ , è mobile un'asta rigida omogenea (massa  $m$ , lunghezza  $2l$ ) i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere, senza attrito, lungo gli assi  $Ox$  e  $Oy$ , rispettivamente. Il baricentro G dell'asta è collegato, mediante una molla ideale di costante elastica  $k = mg/4l$ , ad un punto P (massa  $m$ ) vincolato a muoversi, anch'esso senza attrito, su una guida circolare  $\gamma$  (raggio  $l$ , centro O). Assunti come parametri lagrangiani gli angoli  $\theta$ ,  $\varphi$  rappresentati in figura e imponendo che sia  $k = mg/4l$ , si chiede:

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità;
- 2) Calcolare le reazioni vincolari che si esercitano in A, in B e in P nella posizione di equilibrio stabile;
- 3) Ricavare le equazioni di Lagrange del moto;
- 4) Scrivere le equazioni linearizzate del moto nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.

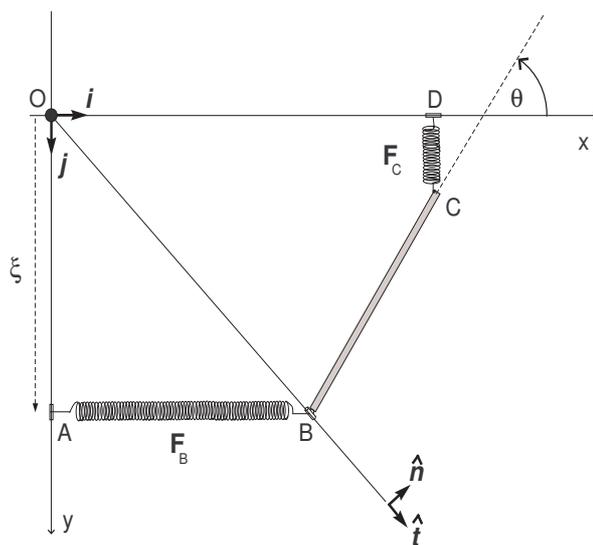


PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (6 luglio 2016)

(C.d.L. Ing. Energetica - Prof. A. Muracchini)

In un piano verticale  $Oxy$ , è mobile un'asta rigida omogenea (massa  $m$ , lunghezza  $2l$ ) il cui estremo B è vincolato a scorrere, mediante un cursore liscio, sulla bisettrice del primo quadrante senza oltrepassare l'origine O del sistema di riferimento. Oltre al peso, sono applicate, agli estremi B e C dell'asta, due forze elastiche ( $\mathbf{F}_B$ ,  $\mathbf{F}_C$ ) dovute all'azione di due molle ideali di eguale costante  $k$  (vedi figura). Assunti come parametri lagrangiani  $\theta$ , e  $\xi$  rappresentati in figura si chiede:

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine esaminando la stabilità delle prime;
- 2) Rappresentare, sulla base  $Otn$  (vedi figura), la reazione vincolare che si esercita sull'estremo B dell'asta nelle posizioni di equilibrio stabile;
- 3) Calcolare: a) l'energia cinetica dell'asta e b) il momento della quantità di moto rispetto al polo B;
- 4) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (7 settembre 2016)

(C.d.L. Ing. Energetica ~ Prof. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile nel piano verticale  $Oxy$ , è costituito di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m$ , *saldati* agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $2l$ . Il punto  $P_1$  è vincolato a muoversi lungo l'asse verticale  $Oy$  mentre l'asta è vincolata a passare entro il cursore fisso  $Q \equiv (d, 0)$ .

Supposti tutti i vincoli ideali e introdotto il parametro lagrangiano  $\theta$  rappresentato in figura, si chiede:

- 1) Dopo avere preliminarmente individuato l'intervallo di valori entro cui varia la coordinata  $\theta$ , determinare in funzione del parametro adimensionale  $\lambda = d/l (> 0)$ , le configurazioni di equilibrio ordinarie discutendone, poi, la stabilità;
- 2) Calcolare la reazione vincolare che si esercita sul punto  $P_1$  in condizioni statiche e ritrovare, usando le equazioni cardinali della statica, le posizioni di equilibrio già determinate nella domanda precedente;
- 3) Scrivere l'energia cinetica del sistema.

