PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (13 gennaio 2017)

(Prof. A. Muracchini)

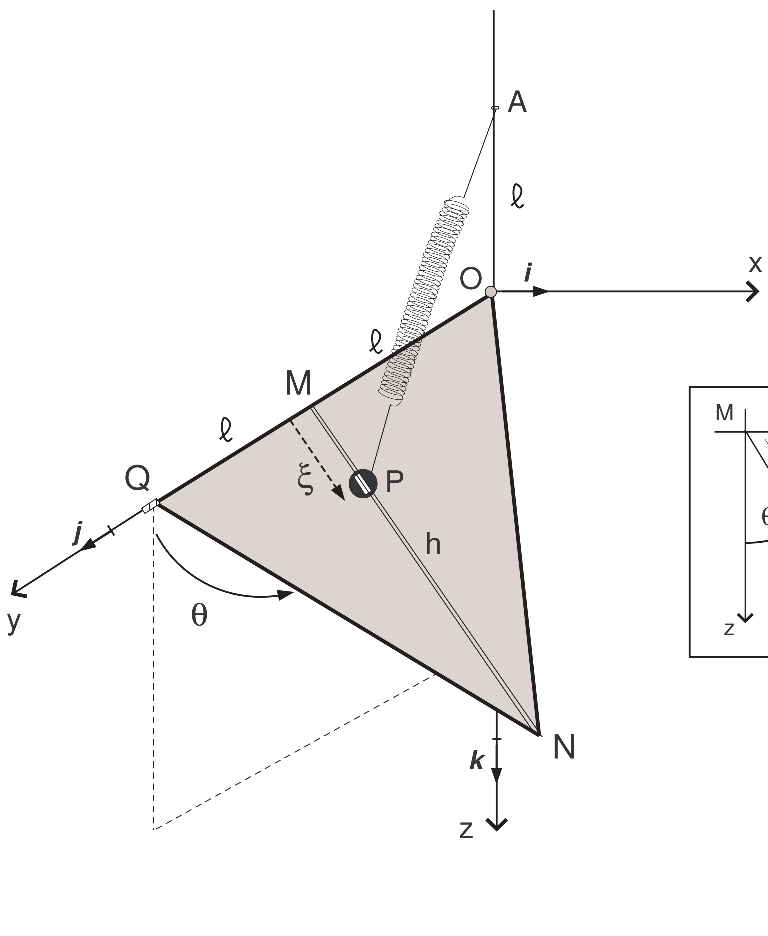
Il sistema rappresentato in figura è costituito da:
a) una lamina pesante, omogenea a forma di triangolo isoscele (massa m, base $2l$, altezza h) vincolata mediante una cerniera ad asse orizzontale,
b) un punto materiale P (massa m) vincolato a muoversi, **senza uscirne**, lungo una guida coincidente con l'altezza MN del triangolo.
Oltre alle forze peso, agisce sul punto P la forza elastica $\mathbf{F} = \frac{mg}{2l}$ PA essendo A un punto fisso posto a distanza l al di sopra dell'asse della cerniera. Tutti i vincoli sono supposti ideali.
Scelto un sistema di riferimento Oxyz il cui asse Oy coincida con l'asse della cerniera e con l'asse Oz passante per A e orientato verso il basso, si assumano i parametri lagrangiani ξ e θ rappresentati in figura.
Si chiede:

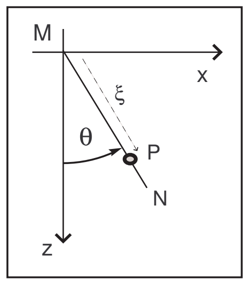
1) Determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie e le eventuali configurazioni di equilibrio di confine, discutendo la stabilità di quelle ordinarie;

2) Calcolare la reazione vincolare che si esercita nel punto P all'equilibrio;

3) Dopo avere preliminarmente calcolato il momento di inerzia della lamina rispetto al lato OQ (asse di rotazione del corpo), scrivere l'energia cinetica del sistema;

4) Ricavare le equazioni linearizzate del moto nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.





PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (3 febbraio 2017)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, posto in un piano verticale Oxy, è costituito di un' asta AB pesante, omogenea (lunghezza 2L, massa m) libera di ruotare attorno al proprio baricentro O, fisso, e di un punto materiale pesante P (massa m) vincolato a muoversi su di essa *senza uscirne*. Fra P e gli estremi A e B dell'asta agiscono forze elastiche derivanti da due molle ideali di eguale costante $k(> 0)$.
Si utilizzino come variabili lagrangiane: ρ lungo AB (origine nel punto O, orientazione da A verso B) e l'angolo θ. Si supponga, inoltre, che i vincoli siano ideali.

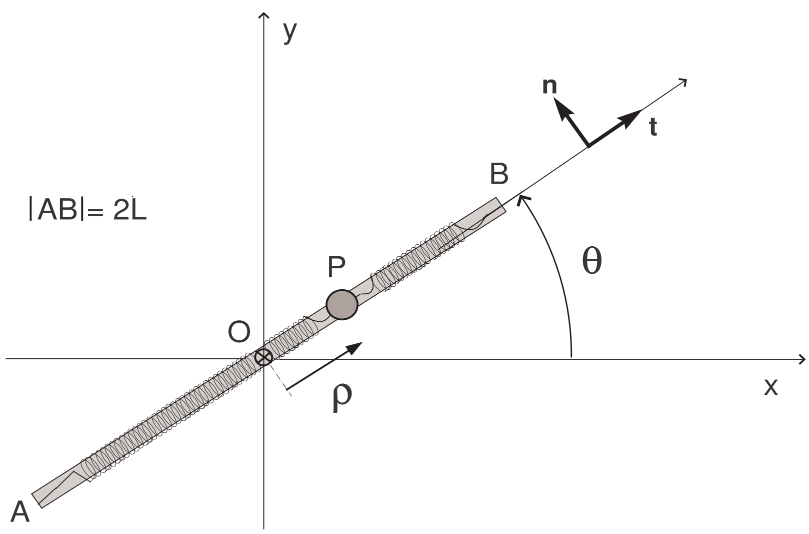
Si chiede:

1) Determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema e studiarne la stabilità. Discutere, poi, le eventuali configurazioni di equilibrio di confine;

2) Ritrovare, usando le equazioni cardinali della statica, le configurazioni di equilibrio del sistema già determinate nella domanda precedente (si consiglia di utilizzare, in questa domanda, la base O**tn** rappresentata in figura);

3) Ricavare le equazioni di Lagrange del moto;

4) Supposto ora di fissare il parametro angolare θ (e sia $\theta = \pi/6$) studiare il moto del punto P sull'asta e determinare la reazione vincolare che si esercita su di esso durante tale moto.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (7 aprile 2017)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile nel piano verticale Oxy, è costituito di un' asta AB rigida omogenea (massa m, lunghezza 2l), il cui baricentro G è vincolato a muoversi lungo l'asse Ox.
Oltre alla forza peso agiscono sul sistema:

a) la forza elastica $\mathbf{F}_{el.} = kBH$ [$k > 0$, $H \equiv (0, 2l) \rightarrow$ vedi figura];
b) la forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$ [$F > 0$] applicata nel punto N dell'asta (N è il punto medio tra A e G);
c) una coppia di momento $\mathbf{M} = \mathcal{M}\mathbf{k}$ [$\mathcal{M}$ costante; $\mathbf{k}$ versore dell'asse Oz].

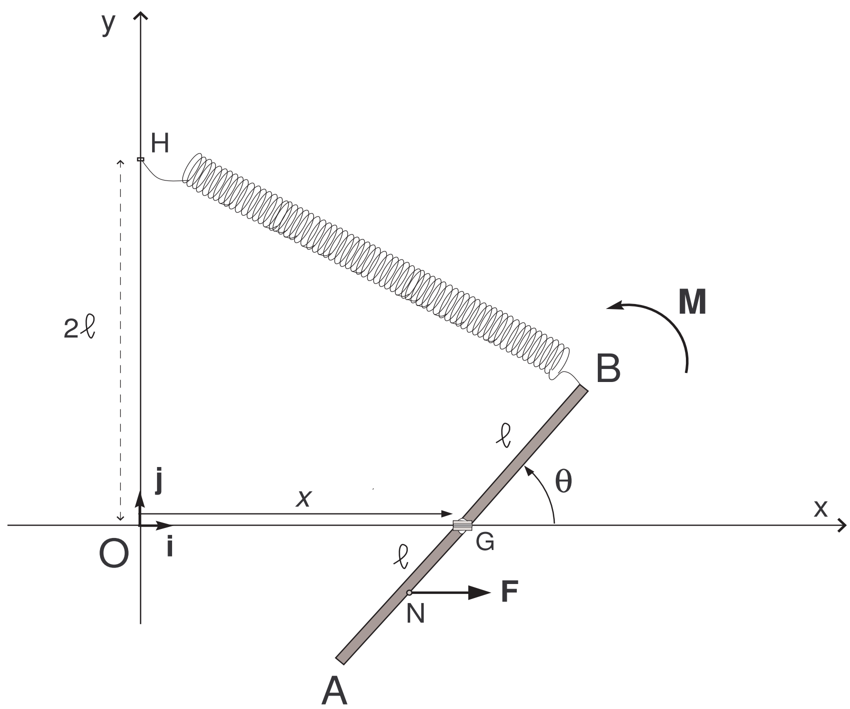
Introdotti i parametri lagrangiani x (ascissa di G) e θ rappresentati in figura, si chiede:

1) Calcolare il valore del momento $\mathcal{M}$ da applicare al sistema affinchè esso sia in equilibrio per $\theta_e = \pi/2$ ed il valore x_e in tale configurazione di equilibrio. Studiare, poi, la stabilità della posizione di equilibrio $\mathcal{P}$=(θ_e, x_e);

2) Usando le equazioni cardinali della statica, ritrovare la configurazione di equilibrio già determinata nella domanda precedente e calcolare la reazione vincolare che si esercita in G in tale posizione;

3) Scrivere le equazioni cardinali della dinamica e calcolare la reazione vincolare che si esercita in G durante il moto;

4) Supposto ora di fissare il valore del parametro θ (e sia $\theta = \pi/2$), si chiede di ricavare ed integrare l'equazione differenziale del moto del sistema così ottenuto.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (19 giugno 2017)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, posto in un piano verticale Oxy, è costituito di due aste omogenee OA e OB, entrambe di massa m e lunghezza l, incernierate nel punto O. Oltre alle forze peso, agli estremi delle due aste sono applicate forze elastiche dovute alla azione di una molla ideale di costante k (> 0) (vedi figura).

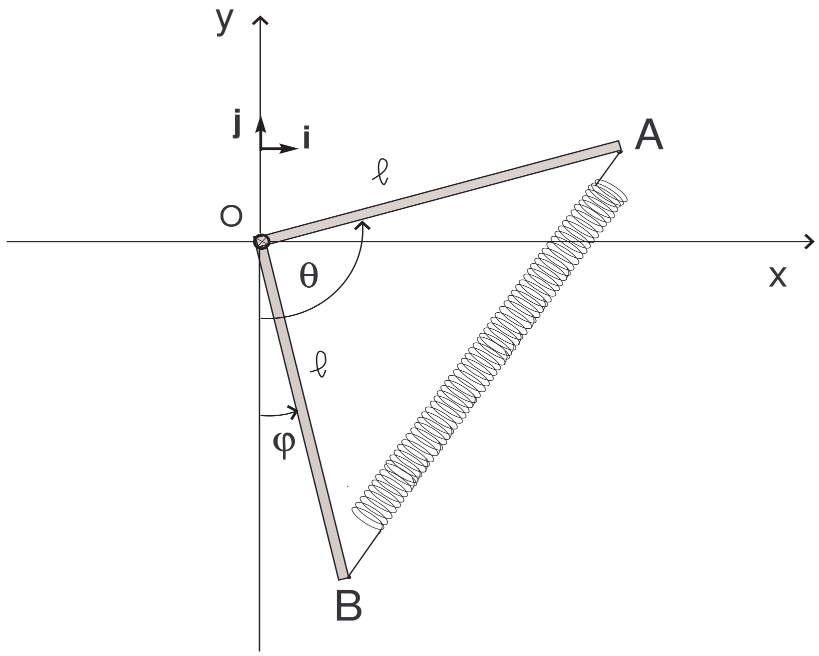
Assunti come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ rappresentati in figura *e supponendo che l'asta OB non possa oltrepassare l'asse Ox*, si chiede:

1) Rappresentare graficamente lo spazio delle configurazioni del sistema;

2) Esaminare se sono possibili configurazioni di equilibrio nelle quali si abbia $\theta = \varphi$ e, in caso affermativo, discuterne la stabilità;

3) Calcolare le reazioni vincolari esterne in O sia all'equilibrio che in condizioni dinamiche (si supponga che ogni asta sia vincolata da una propria cerniera e che queste siano tra loro indipendenti);

4) Posto che sia $k = mg/6l$, ricavare le equazioni delle piccole oscillazioni nell' intorno della posizione di equilibrio stabile e calcolare le frequenze caratteristiche.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (6 luglio 2017)

(Prof. A. Muracchini)

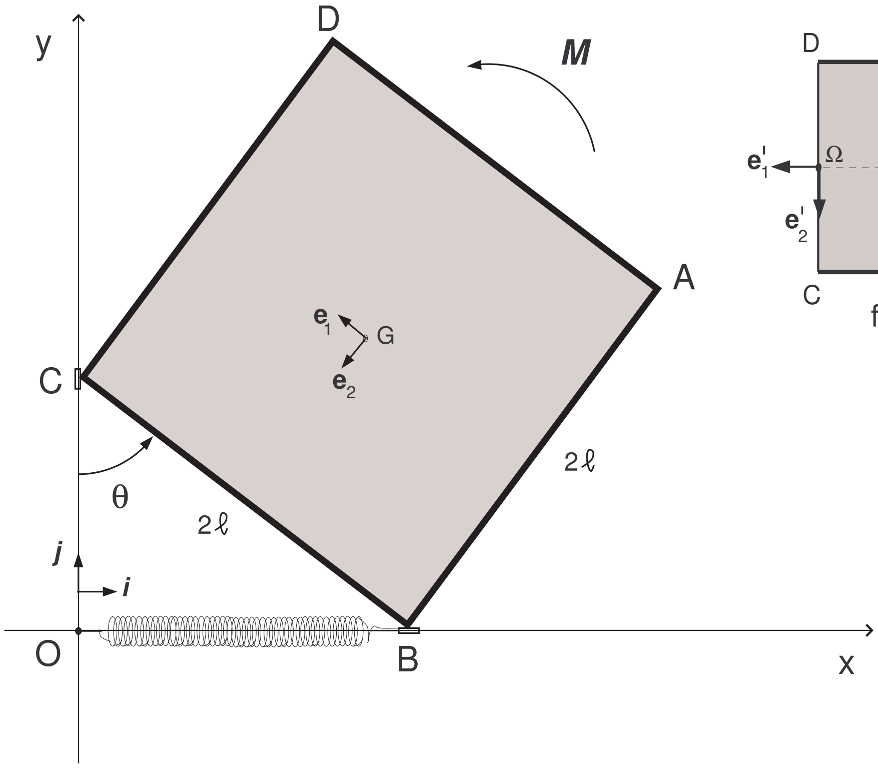
Il sistema in figura, mobile in un piano verticale Oxy, è costituito di una lamina quadrata omogenea (massa m, lato $2l$) i cui vertici B e C sono vincolati a muoversi, senza attrito, lungo gli assi Ox e Oy rispettivamente (vedi figura).
Oltre alla forza peso, agisce sul sistema la forza elastica $\mathbf{F} = -k$OB applicata in B e una coppia di momento $\mathbf{M}$=$mgl\cos\theta\,\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ è il versore dell'asse Oz).
Supposti i vincoli ideali e assunto come parametro lagrangiano l'angolo θ rappresentato in figura si chiede:

1) Individuare la posizione del centro di istantanea rotazione (I) della lamina quando essa passa per le posizioni caratterizzate dai valori $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ del parametro lagrangiano;

2) Rappresentare la matrice di inerzia baricentrale e scrivere l'equazione dell'ellissoide centrale di inerzia (si assuma, per questa domanda, la base solidale G$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$). Calcolare, poi, la matrice di inerzia rispetto alla base solidale $\Omega\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$: vedi figura [b]);

3) Determinare, in funzione del parametro adimensionale $\lambda = mg/4kl \in \Re^+$, le configurazioni di equilibrio del sistema ed esaminarne la stabilità. Ritrovare, poi, usando <u>una</u> equazione (*pura*!) della statica, tali posizioni di equilibrio;

4) Ricavare ed integrare l'equazione linearizzata del moto nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile che si ha per $\lambda = 1/2$.



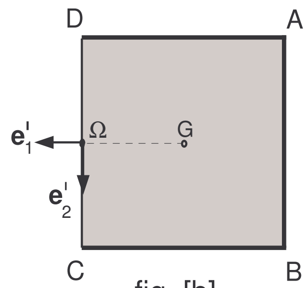


fig. [b]

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (23 settembre 2017)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema rappresentato in figura, posto in un piano verticale Oxy, è costituito di un disco circolare omogeneo $\mathcal{D}$ (raggio r, massa M) mobile, senza attrito, intorno all'asse orizzontale fisso passante per il suo centro O e di un secondo disco circolare omogeneo $\mathcal{C}$ (raggio r, massa m) vincolato a rotolare senza strisciare sul primo e a non oltrepassare, durante il moto, l'asse Ox. Oltre alle forze peso, sono applicate al sistema le seguenti forze:

a) una coppia di momento $\mathcal{M}$=Mgr sen$\varphi\,\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ versore dell'asse Oz) applicata al disco $\mathcal{D}$;

b) la forza elastica $\mathbf{F} = k\mathrm{GG}_o$ ($k > 0$), applicata al centro G del disco $\mathcal{C}$, esercitata da una molla ideale che si mantiene sempre verticale (vedi figura).

Introdotti i parametri lagrangiani θ e φ rappresentati in figura e posto $\lambda = 2kr/mg(> 0)$, si chiede:

1) Determinare, discutendole in funzione del parametro λ, le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema esaminandone la stabilità. Discutere, poi, l'eventuale equilibrio delle configurazioni di confine.

Supposto ora di ***bloccare*** il disco $\mathcal{D}$ si chiede:

2) Determinare, usando le equazioni cardinali della statica, le configurazioni di equilibrio del disco $\mathcal{C}$;

3) Studiare le piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile che si ha per $\lambda = 1/2$.