

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (12 gennaio 2018)

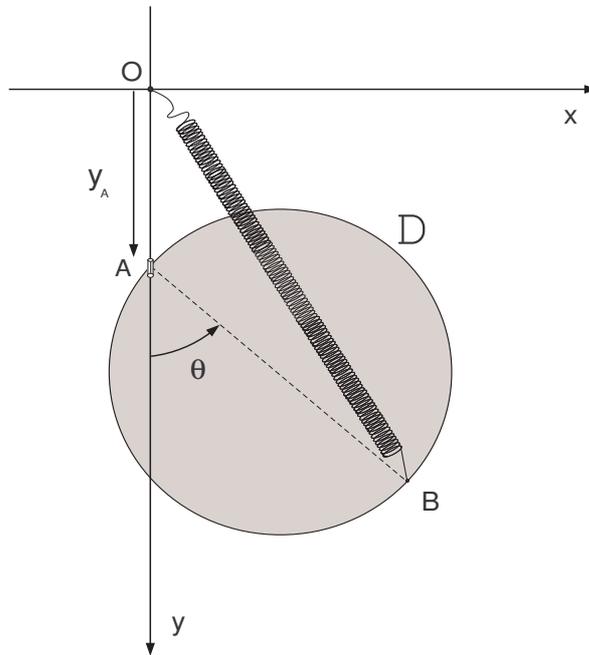
(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile in un piano verticale Oxy , è costituito di un disco rigido \mathcal{D} , omogeneo (massa M , raggio R) vincolato in modo che il punto A del suo bordo sia mobile sull'asse verticale Oy . Sul punto B del disco, diametralmente opposto ad A , agisce una forza elastica $\mathbf{F} = k \mathbf{BO}$ ($k > 0$). Supposti i vincoli ideali, scelti i parametri lagrangiani y_A e θ rappresentati in figura e introdotto il parametro adimensionale $\lambda = kR/Mg \in \mathbb{R}^+$ si chiede:

- 1) Determinare, in funzione del parametro λ , le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità;
- 2) Ritrovare, usando le equazioni cardinali della statica, le configurazioni di equilibrio. Calcolare, poi, la reazione vincolare che si esercita in A sia in condizioni statiche che dinamiche;
- 3) Dopo avere preliminarmente verificato che, per $\lambda = 1/2$, esiste ed è stabile la posizione di equilibrio $\theta = 0$, $y_A = 0$, studiare le piccole oscillazioni del sistema intorno a tale configurazione.

Supponiamo ora che sul punto A agisca una forza di attrito di tipo coulombiano (coefficiente di attrito statico f_s). In tale situazione si chiede:

- 4) Scrivere le condizioni che permettono di determinare l'equilibrio del sistema.



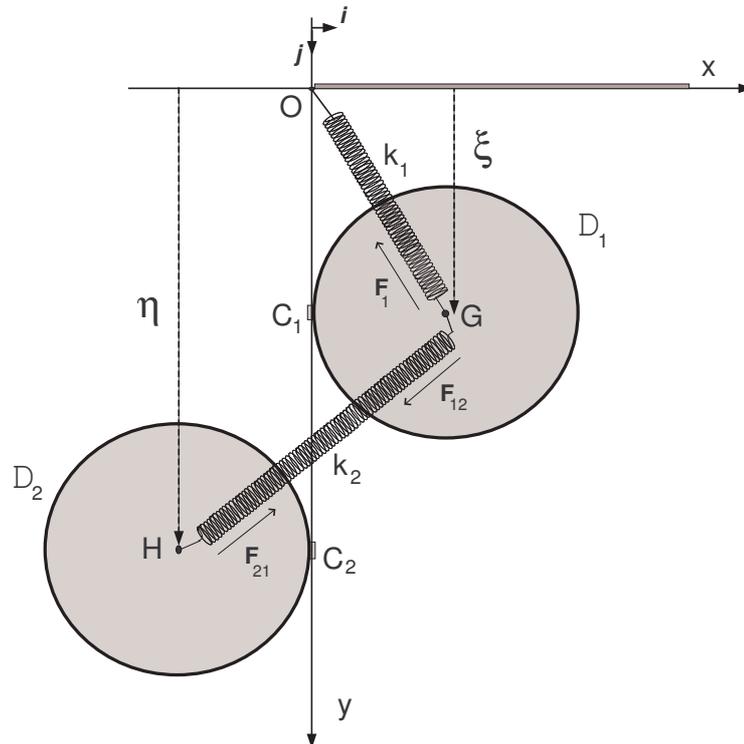
PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (9 febbraio 2018)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, posto in un piano verticale Oxy , è costituito di due dischi omogenei D_1 e D_2 (entrambi di massa m e raggio r) vincolati a rotolare senza strisciare sulla guida verticale Oy e con il disco D_1 vincolato a non oltrepassare l'asse Ox . Oltre alle forze peso, agiscono sul sistema le forze elastiche (di costanti elastiche $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$; $k_1 \neq k_2$) dovute a due molle ideali applicate come in figura.

Scelti i parametri lagrangiani ξ ed η rappresentati in figura si chiede:

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema e studiarne la stabilità. Discutere, poi, l'eventuale equilibrio delle configurazioni di confine;
- 2) Stabilire che relazione deve sussistere tra le due costanti elastiche affinché possa esistere la posizione di equilibrio in cui si abbia $\eta_{eq.} = 2\xi_{eq.}$;
- 3) Ritrovare, usando le equazioni cardinali della statica, le posizioni di equilibrio già determinate nella domanda (1) e le reazioni vincolari che si esercitano sul sistema;
- 4) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto e discutere, brevemente, la metodologia da usare per la loro integrazione.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (13 aprile 2018)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, mobile nel piano verticale Oxy , è costituito di:

α) un disco rigido pesante \mathcal{D} , omogeneo (massa m , raggio R) vincolato, mediante una cerniera piana, a ruotare intorno ad un asse fisso orizzontale ad esso ortogonale e passante per un suo punto O posto a distanza $R/2$ dal baricentro G ;

β) un punto materiale P (massa m) vincolato a muoversi lungo il diametro AB ortogonale ad OG , **senza uscirne**.

Oltre alle forze peso, agisce sul punto P una forza elastica $\mathbf{F} = kPO$ ($k > 0$) (vedi figura).

Supposti i vincoli ideali, scelti i parametri lagrangiani ξ e θ rappresentati in figura e introdotto il parametro adimensionale $\lambda = kR/mg$ ($\in \mathbb{R}^+$) si chiede:

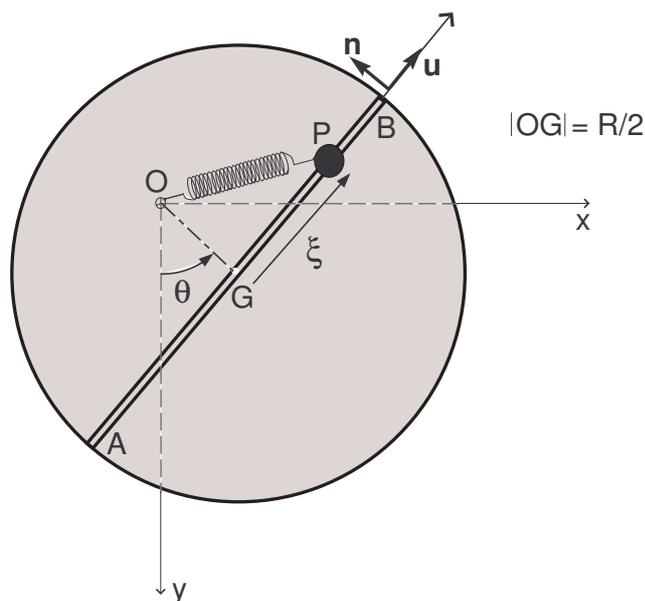
1) Determinare e discutere, in funzione del parametro λ , le configurazioni di equilibrio *ordinarie* del sistema. Dopo avere verificato che la configurazione $\theta = 0$ e $\xi = 0$ è di equilibrio, determinare per quali valori della costante elastica k essa risulti stabile;

2) Calcolare, usando il teorema di Galileo, la velocità assoluta del punto P .

Imposto, ora, l'ulteriore vincolo $\theta = \pi/6$ si chiede:

3) Studiare il moto di P **lungo** il diametro AB e calcolare la reazione vincolare che si esercita su di esso sia in condizioni statiche che dinamiche.

SUGGERIMENTO: Per svolgere i calcoli relativi alle domande 2) e 3), si raccomanda al candidato di utilizzare *esclusivamente* la base intrinseca **Gun**.



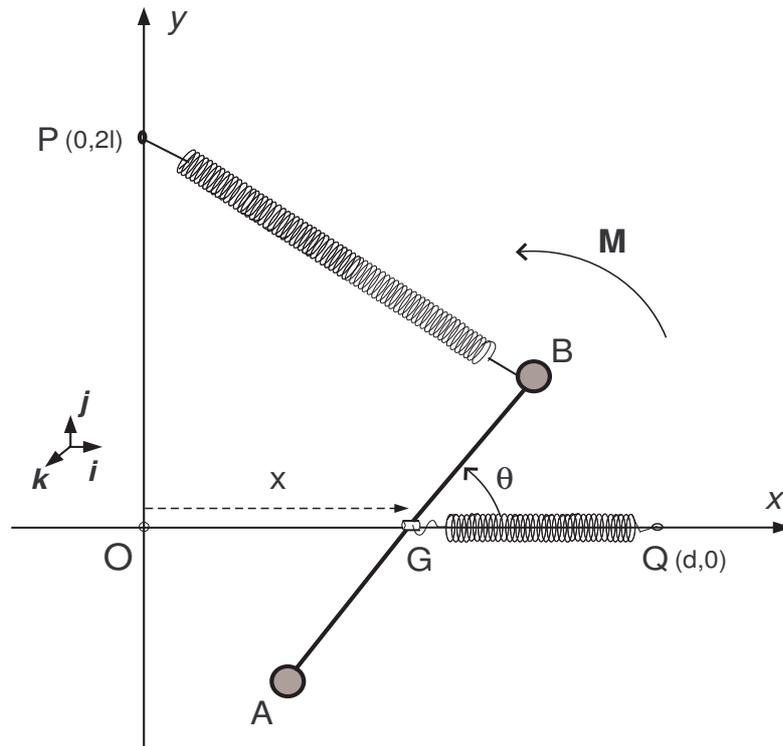
PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (15 giugno 2018)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, posto in un piano verticale Oxy , è costituito di un'asta AB (massa trascurabile, lunghezza $2l$) ai cui estremi sono saldati due punti materiali entrambi di massa m . Il centro G dell'asta è vincolato a scorrere, senza attrito, lungo l'asse Ox . Oltre alle forze peso sono applicate al sistema due forze elastiche, $\mathbf{F}=kBP$ e $\mathbf{F}=kGQ$ ($k > 0$) dovute alla azione di due molle ideali e una coppia di momento $\mathbf{M}=\mathbf{M}\mathbf{k}$ ($M=\text{costante}$, $\mathbf{k}=\text{vers } Oz$).

Assunti come parametri lagrangiani l'angolo θ e l'ascissa x del punto G (vedi figura) si chiede:

- 1) Calcolare il valore del momento M da applicare al sistema affinché esso sia in equilibrio per a) $\theta_{eq.} = 0$ e b) $\theta_{eq.} = \pi/2$ e i valori di $x_{eq.}$ in tali configurazioni. Esaminare, poi, la stabilità di queste posizioni;
- 2) Ritrovare, usando le equazioni cardinali della statica, le posizioni di equilibrio e calcolare la reazione vincolare che si esercita in G sia in condizioni statiche che dinamiche;
- 3) Scrivere le equazioni di Lagrange del moto;
- 4) Ricavare le equazioni linearizzate del moto nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (6 luglio 2018)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema in figura, posto in un piano verticale Oxy , è costituito di un carrello (massa M) mobile, senza attrito, lungo una guida orizzontale e di un'asta AB pesante, omogenea (massa m , lunghezza $3l$) incernierata al baricentro del carrello in un suo punto C distante l da A . Gli assi coordinati sono assunti in modo che $y_C = 0$ (vedi figura).

Oltre alle forze peso, agisce sul sistema una forza elastica $\mathbf{F}_{el} = -kQB$ ($k > 0$) applicata all'estremo B dell'asta e diretta verso il punto fisso $Q \equiv (0, -l)$.

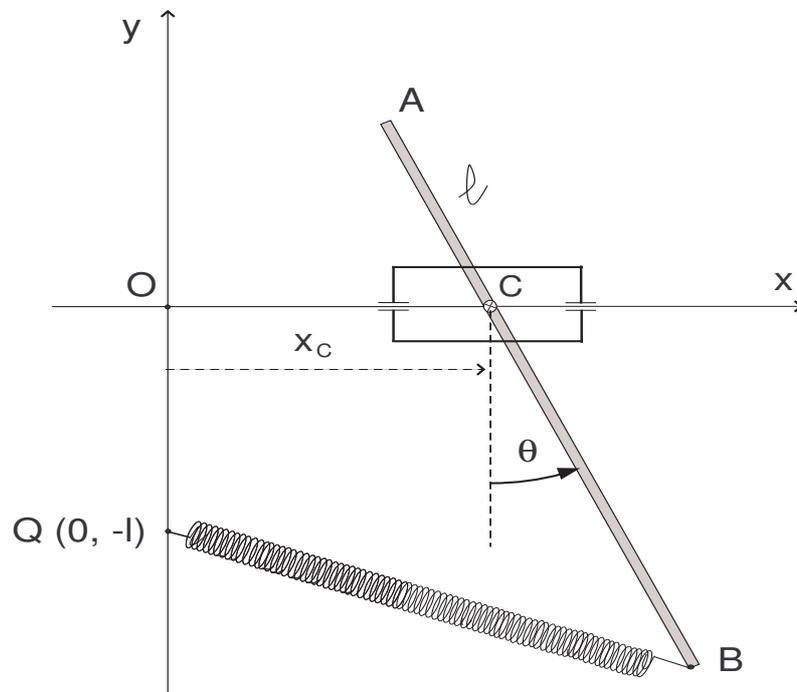
I vincoli sono supposti ideali e si assumono come variabili lagrangiane $x (= x_C)$ e θ (vedi figura).

Si chiede:

- 1) Ricavare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendole in funzione del parametro adimensionale $\lambda = mg/kl$ (> 0);
- 2) Studiare, in funzione di λ , la stabilità delle eventuali configurazioni di equilibrio in cui l'asta risulti verticale.

Supposto, ora, d'imporre l'ulteriore vincolo $\theta(t) = \pi/6$, si chiede:

- 3) usando le equazioni cardinali della dinamica, ricavare ed integrare l'equazione differenziale del moto del sistema e calcolare la componente orizzontale della reazione vincolare esercitata *dal* carrello *sull'*asta durante il moto stesso. Esaminare poi, con le stesse condizioni, il caso in cui sul sistema agisca una forza di resistenza viscosa $\mathbf{F}_v = -h\mathbf{v}$ ($h > 0$).



PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (7 settembre 2018)

(Prof. A. Muracchini)

Il sistema rappresentato in figura, posto in un piano verticale Oxy , è costituito di una circonferenza omogenea \mathcal{C} (massa M , raggio r) e di un punto P (massa m) mobile, senza attrito, sulla circonferenza. La circonferenza è vincolata a restare tangente, senza attrito, all'asse Ox .

Il sistema ha 3 gradi di libertà: si scelgono come parametri lagrangiani gli angoli θ (angolo che un raggio solidale con \mathcal{C} forma con l'orizzontale), φ (angolo che la direzione AP forma con l'orizzontale) e l'ascissa x del centro A della circonferenza (vedi figura). Si chiede:

1) Ricavare le equazioni di Lagrange del moto ed individuare eventuali integrali primi. Discutere brevemente il significato fisico di tali integrali primi.

Imposto ora il vincolo addizionale $\dot{\varphi} = \omega$ (costante > 0), si chiede:

2) Determinare la reazione vincolare che si esercita nel punto T sia in condizioni dinamiche che statiche;

3) Ricavare l'equazione differenziale del moto di A ed integrarla.

