Cenni di analisi combinatoria

In molti problemi concreti di teoria della probabilità e, in particolare, nell'ambito della interpretazione classica occorre calcolare quanti sono gli esiti che compongono un dato evento E per potere poi, ad esempio, eseguire il rapporto tra numero di casi favorevoli ad E e numero di casi possibili che costituiscono quelli dello spazio campione Ω. Nei casi più semplici ciò non è difficile ma, molto più spesso, le situazioni che si incontrano sono articolate e complesse. Si pensi, ad esempio, di chiedersi quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto, quante colonne del totocalcio si possono formare con i tre segni 1, X, 2 o in quanti modi differenti si possono sedere 10 persone intorno ad un tavolo ecc...

• **Definizione 0.1** *L'analisi combinatoria è quel ramo della matematica che ha come oggetto il calcolo della cardinalità (cioè del numero) di gruppi costruiti combinando,* `secondo regole assegnate`*, gli elementi di uno o più insiemi dati.*[1]

Sussiste un principio generale che viene posto a fondamento di ogni problema di conteggio: *se l' insieme A contiene n_A elementi e l'insieme B ne contiene n_B, allora l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$ definito da tutte le coppie ordinate (a, b) (con $a \in A, b \in B$) risulta formato da $n_A \cdot n_B$ elementi.*[2] Mediante tale principio è possibile risolvere molti problemi di conteggio.

Esempio 0.1 *Lanciando contemporaneamente una moneta e un dado, tutti gli esiti possibili sono $2 \times 6 = 12$ perchè 2 sono gli esiti per il lancio della moneta $A = \{T, C\}$ e 6 sono gli esiti per il lancio del dado $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

Esempio 0.2 *Le attuali targhe delle automobili in circolazione sono costituite da due lettere (che si possono anche ripetere: AA), da tre cifre (in cui lo zero come prima cifra è ammesso) e ancora da due lettere. Con questo sistema, quante targhe si possono formare?*

---

[1] Assumiamo che gli insiemi dati siano costituiti di un numero finito di elementi e che tali elementi siano distinguibili.

[2] Si può introdurre, equivalentemente, il seguente *principio fondamentale del calcolo combinatorio*: se una procedura può essere realizzata in n_1 modi diversi e se, dopo questa procedura, una seconda procedura può essere realizzata in n_2 modi diversi ecc..., allora il numero totale di modi di realizzazione della procedura è

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 .....$$

Si tratta, evidentemente, di una applicazione del principio fondamentale del calcolo combinatorio. Infatti, la prima lettera può essere scelta in 26 modi diversi (consideriamo anche le lettere dell'alfabeto anglosassone Y, W K ecc.) e analogamente la seconda. Le tre cifre possono essere scelte ognuna in 10 modi diversi (0,1,2, ...9). Infine ognuna delle due ultima lettere può essere scelta, ancora, in 26 modi diversi. Quindi, il numero N di targhe distinte che si possono formare è

$$N = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 456.976.000.$$

Consideriamo, ora, un insieme di n oggetti che si possano distinguere l'uno dall'altro (indichiamoli, ad es., con $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$). Supponiamo che con questi n oggetti si vogliano formare dei gruppi ciascuno costituito da una stesso numero (intero $\leq n$) di oggetti. È ovvio che il numero dei gruppi che si possono formare dipende dalla legge di formazione dei gruppi stessi.
Elenchiamo alcune delle più comuni leggi di formazione.

• **Definizione 0.2 Disposizioni (semplici)** *di ordine k. Si chiamano disposizioni semplici di n elementi (tra loro tutti diversi) presi a k a k (o disposizioni di ordine k) i gruppi formati da k elementi ciascuno e che differiscono tra loro o per (almeno) un elemento o per l'ordine in cui gli elementi sono disposti.*[3]

Indicheremo le disposizioni di ordine k con il simbolo $D_{n,k}$.

Si può dimostrare il seguente teorema:

•• **Teorema 0.1** *Il numero di disposizioni semplici è*

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

essendo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Esempio 0.3 *Le disposizioni semplici di 4 oggetti a 2 a 2 sono 12. Infatti*

$$D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Questo è il numero di gruppi (ognuno costituito di 2 elementi in modo che ogni gruppo differisca dagli altri per almeno un elemento o per l'ordine degli elementi) che si possono formare con 4 elementi. Dato che il numero di elementi è piccolo, possiamo costruire

[3]Si noti che la definizione data ha senso solo per $k \leq n$ (per $k = n$ si parla di permutazioni semplici di cui ci occuperemo nella successiva definizione).

direttamente i gruppi richiesti. Indichiamo con A, B, C, D i quattro elementi (ad esempio, quattro squadre di calcio). Si ha

$$\begin{array}{cccccc} AB & AC & AD & BC & BD & CD \\ BA & CA & DA & CB & DB & DC \end{array}$$

Essi sono 12 ed ognuno differisce dagli altri o per un elemento o per l'ordine degli elementi (cioè, il gruppo AC è considerato diverso dal gruppo CA: partita di andata e di ritorno tra le due squadre A e C).

• **Definizione 0.3 Permutazioni (semplici)** *di n elementi. È il caso delle disposizioni semplici quando $n = k$. In tale caso, ogni gruppo contiene tutti gli n elementi e differisce dagli altri gruppi solo per l'ordine degli elementi.*

Indicheremo le permutazioni semplici con il simbolo P_n.

Dal teorema precedente segue immediatamente (per $k = n$) il seguente corollario che fornisce il numero di permutazioni semplici

$$P_n = n!$$

Esempio 0.4 *Sono permutazioni i cosiddetti anagrammi cioè le parole che si ottengono da una parola qualunque mutando solo il posto delle sue lettere. Con la parola "caso" si possono allora formare $4! = 24$ parole (ovviamente anche non di senso compiuto). Sono ancora permutazioni le possibili graduatorie di n candidati ad un concorso, i possibili ordini di arrivo di n atleti ecc. È interessante osservare, però, che i modi possibili di disporsi intorno ad un tavolo di n persone sono $(n-1)!$ dato che tutti possono muoversi di un posto a destra (o a sinistra) senza cambiare la posizione relativa: in tal caso si parla di* `permutazioni circolari`.

A proposito delle permutazioni, accade spesso di volere conoscere il numero di permutazioni di oggetti alcuni dei quali sono, però, uguali tra loro (queste si chiamano ***permutazioni con ripetizione*** [4]). Si ha il seguente:

•• **Teorema 0.2** *Il numero di permutazioni di n oggetti di cui n_1 sono uguali, n_2 uguali,...,n_r uguali è*

$$P'_n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

[4] Indicheremo con un'apice le permutazioni con ripetizione e, successivamente, le disposizioni con ripetizione.

Esempio 0.5 *Il numero di anagrammi della parola "mamma" sono*

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

dato che nella parola si ripete 3 volte la lettera m e due volte la lettera a. Rappresentiamoli esplicitamente

$$\begin{cases} \textit{mamma}, & \textit{mamam}, & \textit{maamm}, & \textit{amamm}, & \textit{aammm} \\ \textit{mmmaa}, & \textit{mmama}, & \textit{mmaam}, & \textit{ammma}, & \textit{ammam} \end{cases}$$

Per le disposizioni si può avere il caso in cui i gruppi che si formano a partire dagli n elementi dati contengano degli elementi ripetuti. In tal caso si parla di ***disposizioni con ripetizione*** di n elementi presi a k ad k. Sussiste, in tal caso, il seguente:

•• **Teorema 0.3** *Il numero di disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k è*[5]

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio 0.6 *Quante possibili colonne ci sono nel gioco del totocalcio? Gli elementi a disposizione sono 3 e cioè 1,X,2. Le caselle di una colonna da riempire sulla schedina sono 13. Poiché gli elementi 1,X,2 si possono presentare anche ripetuti bisogna trovare il numero delle disposizioni con ripetizione di 3 elementi a 13 a 13:*

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323.$$

Esempio 0.7 *Quanti sono i numeri composti da 5 cifre? Qui ci riferiamo a numeri che si possono scrivere usando le 9 cifre significative ed anche lo zero. Avremo quindi fra essi numeri che hanno per prime cifre uno, due, tre o quattro zeri (ad es. 00372 ecc...) ed anche il numero 00000. Il numero totale trovato usando la formula delle disposizioni con ripetizione (infatti tra i gruppi di 5 cifre ci possono essere anche cifre ripetute e conta anche l'ordine delle cifre...) di 10 elementi a 5 a 5 risulta*

$$D'_{n,k} = n^k \ \Rightarrow D'_{10,5} = 10^5 = 100.000$$

Le disposizioni semplici e con ripetizione sono applicate in un tipo particolare di problemi che riguardano l'estrazione di una pallina da un'urna contenente n palline (o una carta da un mazzo o una persona da una popolazione ecc.).
Supponiamo di estrarre da un'urna una pallina dopo l'altra per k volte (questo assortimento di palline estratte viene chiamato *campione* di dimensione k). Si possono considerare due casi:

[5] Cioè, un elemento può figurare nei gruppi che si formano fino a k volte.

a) campionamento *con reimbussolamento* → in questo caso la pallina viene rimessa nell'urna prima di estrarre la pallina successiva: poiché ci sono n modi distinti per estrarre ciascuna pallina, ci sono, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio,

$$\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k\,volte} = n^k$$

distinti campioni ordinati di dimensione k con reimbussolamento (si noti che questo è proprio il numero delle disposizioni con ripetizione!)

b) campionamento *senza reimbussolamento* → in questo caso la pallina non viene rimessa nell'urna prima di estrarre quella successiva, quindi non ci possono essere ripetizioni nel campione ordinato. In altre parole, un campione ordinato di dimensione k senza reimbussolamento è una disposizione semplice di classe k, delle biglie dell'urna. Ne segue, che dalle n palline dell'urna, si possono estrarre

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

distinti campioni ordinati di dimensione k.

Introduciamo, ora, il seguente simbolo (si legge "n su k")

$$\binom{n}{k}$$

con k, n interi positivi e $k \leq n$. Esso è un <u>numero</u> definito come segue

$$\binom{n}{k} \overset{def}{=} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)k}$$

Questi numeri vengono chiamati coefficienti binomiali. Notiamo che

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)k} = \quad \Big| \text{ moltiplicando num. e den. per } (n-k)! \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)k(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned} \tag{1}$$

In base a questa formula e ricordando che $0! = 1$ definiamo

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \quad e \quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

I coefficienti binomiali permettono di formulare un teorema molto importante in algebra e in teoria della probabilità (vedi distribuzione binomiale) che si chiama *teorema binomiale*.

•• **Teorema 0.4 (binomiale)**

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + ... + n a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Avendo introdotto i coefficienti binomiali possiamo ora definire le *combinazioni* di n oggetti presi a k a k (o combinazioni di classe k)

• **Definizione 0.4 Combinazioni** *di classe k. Si chiama combinazione di classe k di n oggetti, un gruppo di k degli n oggetti, dove l'ordine non conta (cioè, in tal caso, ogni gruppo di k elementi differisce da ogni altro per almeno un elemento).*

Si può dire, con abuso di linguaggio, che le combinazioni di classe k coincidono con le disposizioni di ordine k quando in queste ultime non si tenga conto dell'ordine come fattore di differenziazione tra i vari gruppi. Anche ora, indicando con $C_{n,k}$, le combinazioni di classe k si ha il seguente teorema

•• **Teorema 0.5**

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$

Ricordando che il coefficiente binomiale è definito dalla (1) si può scrivere, dunque, anche

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Esempio 0.8 *Riferendoci all'esempio 0.3, determiniamo tutte le combinazioni dei quattro oggetti A,B,C,D presi a 2 a 2. Poiché, ora, l'ordine non interessa i vari gruppi devono differire soltanto per (almeno) un elemento. Si ha, quindi, che essi sono i seguenti*

$$AB \quad AC \quad AD \quad BC \quad BD \quad CD$$

Si puó, ovviamente, usare anche la

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} \Rightarrow C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Esempio 0.9 *Il numero di possibili cinquine nel gioco del lotto sono le combinazioni di 90 numeri scelti a 5 a 5 senza ripetizione e nelle quali l'ordinamento è irrilevante. Cioè*

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = 43.949.268.$$

Esempio 0.10 *Il numero di possibili segmenti che congiungono n punti discreti è*

$$C_{n,2} = \binom{n}{2}.$$

Quando si lavora con il calcolo combinatorio si ha sempre a che fare con fattoriali la cui determinazione spesso conduce a calcolare numeri molto grandi. Esiste una formula di approssimazione che risulta molto utile soprattutto quando si sia interessati all'ordine di grandezza delle espressioni in gioco. Si tratta della *formula di Stirling*

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \quad n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \quad e^{\{n[log(n)-1]\}}$$