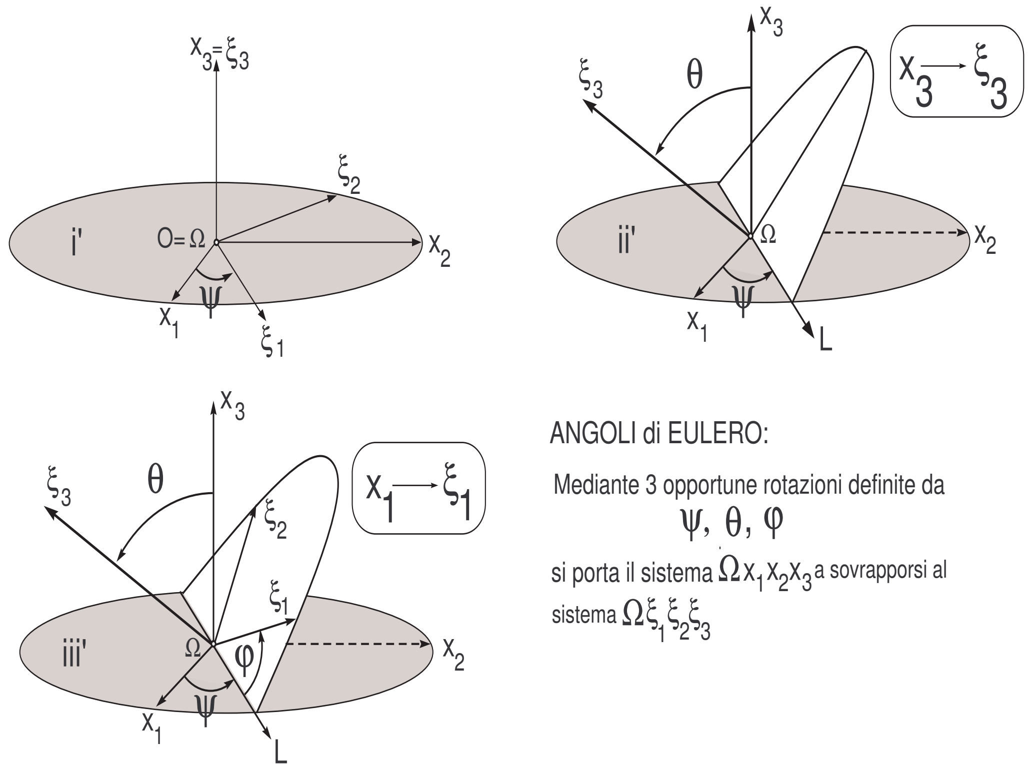

Figura 1: Angoli di Eulero.

ANGOLI DI EULERO

Gli angoli di Eulero, usualmente indicati con le lettere greche θ, φ e ψ sono rappresentati nella figura 1 e sono chiamati, rispettivamente, *angolo di nutazione*, *angolo di rotazione propria* e *angolo di precessione*.[1] Più precisamente, supposto che i due sistemi cartesiani ortogonali $\sum$ e $\sum^*$ abbiano la stessa origine in Ω (ora indichiamo con ξ_i, $(i = 1, 2, 3)$ gli assi del sistema solidale):

i) θ $(0 < \theta < \pi)$ è l'angolo compreso fra l'asse solidale $\Omega\xi_3$ e l'asse fisso Ωx_3;

ii) φ è l'angolo compreso fra l'asse solidale $\Omega\xi_1$ e la retta intersezione del piano solidale $\xi_1\xi_2$ col piano fisso x_1x_2 (detta *linea dei nodi* e che noi indichiamo con L);

iii) ψ è l'angolo tra la linea dei nodi e l'asse fisso Ωx_1.

[1] Essi furono introdotti da Eulero in relazione ai suoi studi sui moti celesti.

Si può dimostrare che è possibile sovrapporre il sistema fisso $\Omega x_1 x_2 x_3$ al sistema solidale $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ mediante tre successive rotazioni di angoli θ, φ, ψ ed eseguite in un ordine ben definito. Tali rotazioni sono le seguenti:

i') rotazione antioraria di angolo ψ eseguita intorno all'asse Ωx_3: indichiamo con $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ il sistema così ottenuto;

ii') rotazione antioraria di angolo θ intorno alla linea dei nodi che ora, grazie alla rotazione precedente coincide con Ωx_1: questa rotazione sovrappone l'asse Ωx_3 ad $\Omega\xi_3$ ($x_3 \to \xi_3$);

iii') rotazione antioraria di angolo φ intorno all'asse $\Omega\xi_3$ che, grazie alla rotazione definita in (ii'), coincide con Ωx_3: questa rotazione fà coincidere la linea dei nodi (cioé l'asse Ωx_1) con l'asse $\Omega\xi_1$ ($x_1 \to \xi_1$).

A causa della ortogonalità dei due sistemi è evidente che l'asse Ωx_2 si sovrappone, a sua volta, ad $\Omega\xi_2$ ($x_2 \to \xi_2$) e quindi infine i due sistemi fisso e solidale si trovano a coincidere.

Osservazione. Tra gli angoli di Eulero e le orientazioni del corpo rigido esiste una corrispondenza solo *localmente* biunivoca. Infatti, si osservi (fig. 1) che quando l'asse ξ_3 coincide con x_3 ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) non si può più definire la linea dei nodi perché il piano solidale $\xi_1\xi_2$ e il piano fisso x_1x_2 sono sovrapposti; in tale caso (che escludiamo come patologico) è sufficiente l'unico parametro ψ per descrivere l'orientazione reciproca delle due terne.

Osserviamo, da ultimo, che ognuna delle tre rotazioni precedentemente descritte si può caratterizzare matematicamente mediante una matrice di rotazione. Nel caso attuale si ottiene, senza difficoltà, che le matrici associate alle rotazioni i'), ii') e iii') sono rispettivamente

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \ \mathcal{C} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice prodotto $\mathcal{F} = \mathcal{ABC}$ rappresenta la matrice della trasformazione completa. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\mathcal{F} = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Le colonne di $\mathcal{F}$ forniscono, come noto, le componenti dei versori $\mathbf{e}_i$ della base solidale sulla base fissa $\mathbf{c}_i$. Si ha, cioè,

$$\mathbf{e}_1 = (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\mathbf{c}_1 + (\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\mathbf{c}_2 + (\sin\theta\sin\varphi)\mathbf{c}_3$$

$$\mathbf{e}_2 = (-\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\mathbf{c}_1 + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\mathbf{c}_2 + (\sin\theta\cos\varphi)\mathbf{c}_3$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin\psi\sin\theta\mathbf{c}_1 + (-\sin\theta\cos\psi)\mathbf{c}_2 + (\cos\theta)\mathbf{c}_3$$

Uno degli usi più importanti di questa matrice consiste nel fatto che essa ci permette di esprimere il vettore velocità angolare di un corpo rigido rappresentandolo sulla base solidale, come richiesto nello sviluppo della dinamica. Esamineremo tale situazione nel prossimo esempio.

Esempio 0.1 *Supponiamo che il corpo rigido sia mobile rispetto al sistema di riferimento fisso $Ox_1x_2x_3$ e sia $\boldsymbol{\omega}$ il vettore della sua velocità angolare. Ricaviamo, in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali, le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ sugli assi $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ solidali con il corpo.*
Scomponiamo, dapprima, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ lungo le seguenti direzioni: ΩL (linea dei nodi), Ωx_3 e $\Omega\xi_3$. Si osservi che tali assi sono proprio quelli intorno a cui avvengono le tre rotazioni definite dagli angoli di Eulero introdotti in precedenza.
Sia, dunque,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_L + \boldsymbol{\omega}_{x_3} + \boldsymbol{\omega}_{\xi_3}$$

Ma, ricordando la definizione di angoli di Eulero e la nozione di velocità angolare, potremo scrivere

$$\boldsymbol{\omega}_L = \dot\theta\mathbf{l}\ , \quad \boldsymbol{\omega}_{x_3} = \dot\psi\mathbf{c}_3\ , \quad \boldsymbol{\omega}_{\xi_3} = \dot\varphi\mathbf{e}_3$$

essendo $\mathbf{l}$, $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{e}_3$ i versori della linea dei nodi e degli assi Ox_3 e $\Omega\xi_3$, rispettivamente. Pertanto

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\mathbf{l} + \dot\psi\mathbf{c}_3 + \dot\varphi\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

Teniamo, ora, conto che $\mathbf{l}$ e $\mathbf{c}_3$ si possono esprimere in funzione dei versori solidali $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$.
Dalla matrice $\mathcal{F}$ si vede immediatamente (terza riga della matrice stessa) che

$$\mathbf{c}_3 = \sin\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_3$$

ed inoltre (si veda la fig.1)

$$\mathbf{l} = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2$$

Sostituendo le espressioni di $\mathbf{c}_3$ ed $\boldsymbol{l}$ nella (1) si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 - \dot\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \dot\varphi\,\boldsymbol{e}_3 + \dot\psi\sin\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_1 + \dot\psi\cos\varphi\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2 + \dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{e}_3$$

e, raccogliendo i termini in $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$,

$$\omega_{\xi_1} = p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\varphi\sin\theta\ , \quad \omega_{\xi_2} = q = -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\cos\varphi\sin\theta\ , \quad \omega_{\xi_3} = r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$$

Ragionando in modo simile si trova che nel sistema fisso si ha (farlo come esercizio...)

$$\omega_{x_1} = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi sin\theta \ , \quad \omega_{x_2} = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \ , \quad \omega_{x_3} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$$

Le espressioni di p, q *ed* r *risulteranno particolarmente utili nell'ambito della dinamica ove, per motivi che saranno a suo tempo chiariti, è necessario disporre della rappresentazione della energia cinetica e del momento angolare (di cui* $\boldsymbol{\omega}$ *è parte) di un corpo rigido rispetto ad una base solidale al corpo stesso.*