

## UN PÒ DI ALGEBRA DEGLI EVENTI

Il concetto di evento è fondamentale nella teoria della probabilità. Lo formalizziamo illustrando, sia pure per sommi capi, quella che si può chiamare "algebra degli eventi" che fa perno sulla teoria degli insiemi.

La formalizzazione degli eventi può essere riassunta nella seguente affermazione

*gli eventi formano un'algebra di Boole completa.*

Questa affermazione richiede, da un punto di vista didattico, una qualche esemplificazione che la renda chiara. Indicheremo un evento con le prime lettere maiuscole dell'alfabeto latino ( $A, B, C, \dots$ ) o talvolta con un suffisso quando vi sia una successione (o collezione) di eventi ( $E_1, E_2, \dots, E_i, i = 1, 2, \dots$ ). Introduciamo poi le seguenti tre operazioni tra eventi

- i) unione;
- ii) intersezione;
- iii) negazione.

i) Si dice unione (o somma) di due eventi  $A$  e  $B$  quell'evento  $C$  che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi  $A$  e  $B$ : cioè se si verifica  $A$ , se si verifica  $B$  o se si verificano contemporaneamente  $A$  e  $B$  (quando ciò sia possibile). Si indica con

$$A \cup B \quad (\text{o } A + B)$$

e si può estendere ad un numero finito o numerabile di eventi. Ad esempio la scrittura

$$A \cup B \cup C$$

indica quell'evento che si verifica quando si verifica almeno uno tra  $A, B, C$  oppure una qualsiasi combinazione dei tre eventi a due a due oppure a tre a tre. Similmente scriveremo

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

ii) Si chiama intersezione (o prodotto) di  $A$  e  $B$  quell'evento  $C$  che si verifica se e solo se si verificano contemporaneamente sia  $A$  che  $B$ , cioè se  $A$  e  $B$  assieme costituiscono il risultato della prova. Scriveremo

$$C = A \cap B \quad (\text{o } C = AB)$$

- iii) Si definisce negazione dell'evento  $A$  (o complementare di  $A$ ) quell'evento che si verifica quando non si verifica  $A$  e lo indicheremo con  $\overline{A}$  (non  $A$ ). Si noti che  $\overline{\overline{A}} = A, (\forall A)$ .

Indichiamo, poi, con  $\Omega$  lo spazio campione cioè l'insieme di tutti i risultati di un esperimento. Si osservi che lo spazio campione  $\Omega$  è esso stesso un evento che si verifica sempre (evento certo) perchè sicuramente si verifica uno degli eventi di cui  $\Omega$  è composto. Ovviamente  $\overline{\Omega}$  è l'evento impossibile (che sarà indicato, d'ora innanzi con  $\emptyset$ ).

Possiamo a questo punto introdurre il concetto di "algebra di Boole completa". Una collezione  $\mathcal{C}$  di eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  è un'algebra di Boole completa se valgono le seguenti due condizioni

- I) se  $E_i \in \mathcal{C}, \quad i = 1, 2, \dots$  allora  $\overline{E_i} \in \mathcal{C}$ ;  
 II) se  $E_i \in \mathcal{C}, \quad i = 1, 2, \dots$  allora  $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$

In altri termini: la collezione  $\mathcal{C}$  di eventi è un'algebra di Boole completa se è chiusa rispetto alla negazione e all'unione di una quantità numerabile di eventi.

Un'algebra di Boole completa si dice anche  $\sigma$ -algebra.

Concludiamo queste brevi considerazioni sull'algebra degli eventi dando alcune altre definizioni che sono di immediata comprensione se si fa riferimento ai diagrammi di Venn (nella figura (1) vengono rappresentati i diagrammi di Venn che illustrano graficamente alcune delle principali relazioni tra eventi).

- $\alpha$ ) Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono *incompatibili* (o *disgiunti* o *mutuamente esclusivi*) se non possono verificarsi contemporaneamente cioè se

$$A \cap B = \emptyset$$

Data una collezione di eventi  $E_i \in \mathcal{A} \quad (i = 1, 2, \dots)$  diciamo che essi sono incompatibili a due a due se

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

- $\beta$ ) Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono *necessari* se la loro unione è l'evento certo cioè se

$$A \cup B = \Omega$$

Analogamente, una collezione di eventi  $E_i \quad (i = 1, 2, \dots)$  appartenenti ad  $\Omega$ , si dice necessaria se

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \Omega$$

$\gamma$ ) Una collezione di eventi costituita da eventi necessari e incompatibili si chiama anche *partizione* di  $\Omega$ . (alcuni autori chiamano gli eventi  $E_i$  che soddisfano a queste condizioni eventi *mutuamente esclusivi ed esaustivi*). Cioè, la collezione di eventi  $E_i \subset \Omega$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) è una partizione di  $\Omega$  se e solo se

$$\begin{aligned} i) \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i &= \Omega \quad (\text{necessarietà}) \\ ii) \quad E_i \cap E_j &= \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (\text{incompatibilità a due a due}). \end{aligned}$$

### Leggi dell'algebra degli insiemi.

Leggi di idempotenza:

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Leggi associative:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leggi commutative:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Leggi distributive:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leggi d'identità:

- $A \cup \emptyset = A$  ;  $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$  ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$

Leggi del complemento:

- $A \cup \bar{A} = \Omega$  ;  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\bar{\bar{A}} = A$  ;  $\bar{\Omega} = \emptyset$  ;  $\bar{\emptyset} = \Omega$

Leggi di De Morgan:

- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

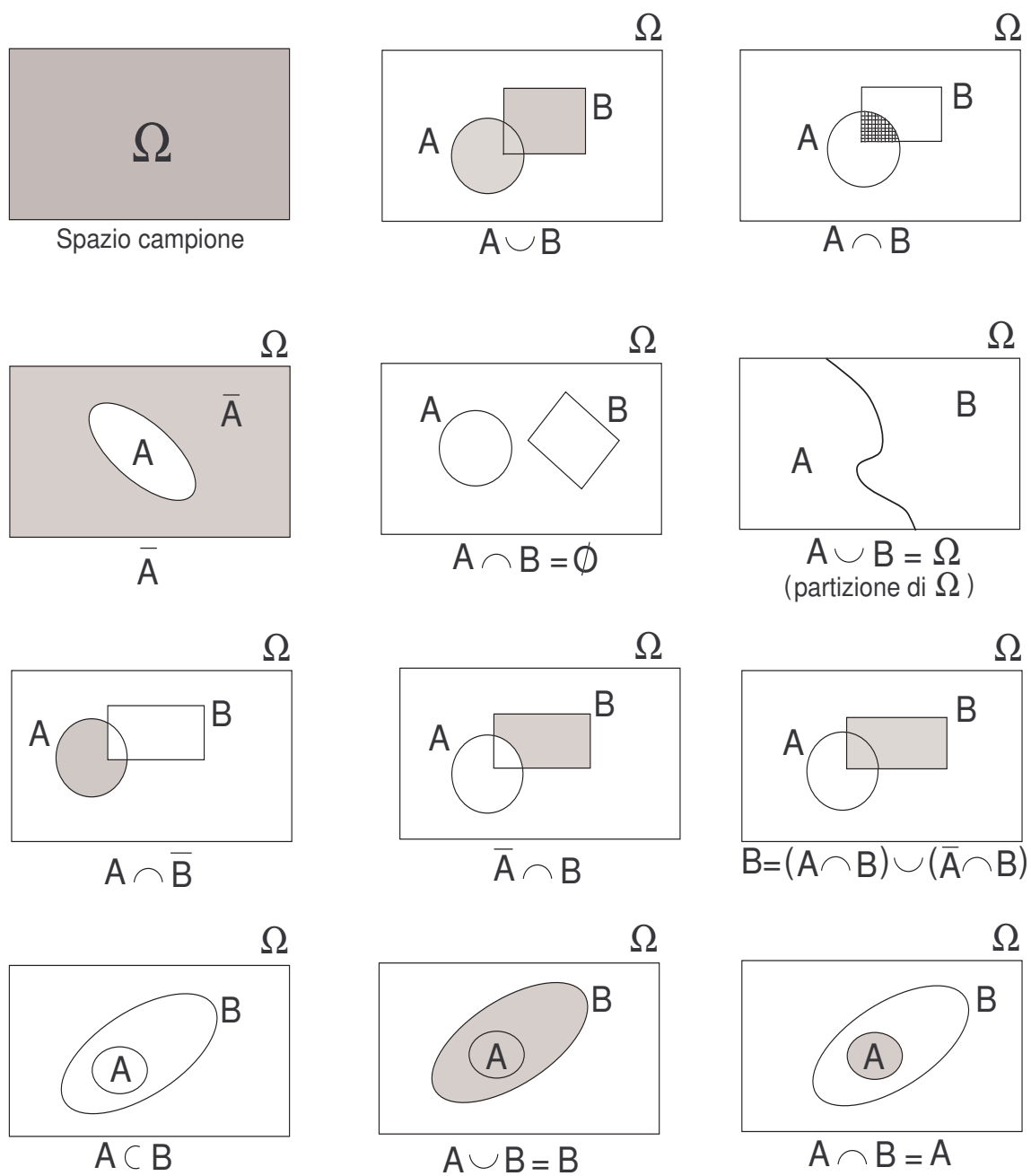


Figura 1: Diagrammi di Venn per alcune relazioni tra eventi.