

Definizione classica di probabilità

Dato un esperimento casuale ben specificato ed un evento E tra quelli possibili per quell'esperimento, se m è il numero dei possibili risultati che danno luogo all'evento E ed n è il numero di tutti i possibili risultati dell'esperimento, allora la probabilità dell'evento E è il rapporto m/n , purché tutti gli n risultati siano ugualmente possibili. Scriveremo*:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

*Si noti che quando $m = 0$ è $P(E) = 0$ cioè E è impossibile. Quando $m = n$ è $P(E) = 1$, cioè E è certo. Quando $0 < m < n$ è $0 < P(E) < 1$ ed E è possibile. Inoltre poiché è certo che quando non si presenta l'evento E si presenta il suo contrario ($\bar{E}$), risulta

$$P(\bar{E}) = \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(E)$$

Definizione frequentista di probabilità

Dato un esperimento ben specificato e perfettamente ripetibile, sia E un evento tra quelli possibili ed indichiamo con $f_n(E)$ il numero di volte che E si è verificato in una serie di n prove (frequenza assoluta) ripetute *nelle medesime condizioni*.

La probabilità di E è il limite a cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero delle prove:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(E)}{n}$$

Definizione soggettivista di probabilità

Dato un esperimento ben specificato, sia E un evento tra quelli possibili. Allora, la probabilità dell'evento E è la somma che un individuo "coerente" * è disposto a scommettere in un gioco equo nel quale al verificarsi di E egli riceve dal banco un importo unitario.

Alternativamente:

la probabilità è la misura del grado di fiducia che una persona coerente attribuisce al verificarsi di un evento.

*La coerenza dell'individuo consiste nella disponibilità ad accettare la scommessa senza cambiare la somma puntata quando da giocatore diventi banco (o viceversa).

"Momenti" dell'assiomatizzazione

- Individuazione dei concetti primitivi;
- Enunciazione dei postulati (o assiomi);
- Dimostrazione dei teoremi mediante l'uso dei postulati.

Nel caso della teoria assiomatica della probabilità:

- Concetti primitivi: prova, evento, probabilità.

Assiomi di Kolmogorov

Presentiamo ora i postulati, secondo la formalizzazione corrente della *teoria assiomatica* della probabilità.

Siano E_i ($i = 1, 2, \dots$) gli eventi dello spazio campione Ω . La probabilità di un evento E_i è un numero reale (che indichiamo con $P(E_i)$) che soddisfa i seguenti tre assiomi

- 1) $P(E_i) \geq 0 \quad \forall E_i \subset \Omega$
- 2) $P(\Omega) = 1$
- 3) $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots \quad \left| \begin{array}{l} \text{se } E_1, E_2, \dots \text{ sono eventi INCOMPATIBILI} \\ \text{(cioè gli } E_i \text{ sono a due a due disgiunti)} \end{array} \right.$

In forma "discorsiva" i postulati precedenti affermano, rispettivamente, che

- 1) la probabilità è una "**funzione**" che assegna ad ogni evento $E_i \in \Omega$ un numero reale non negativo;
- 2) l'evento certo ha probabilità uguale ad 1;
- 3) la probabilità dell'unione di una infinità numerabile di eventi incompatibili (cioè che non possono verificarsi contemporaneamente come ad. es. l'uscita simultanea di 1 e 5 nel lancio di un dado) è la somma delle singole probabilità.