1^a Prova intermedia di Matematica Applicata L-A (2 novembre 2006)
(Prof. P.P. Abbati Marescotti. C.d.L. Ing. Elettronica-Ing. Telecomunicazioni)

1] Un esperimento aleatorio consiste nel lanciare ripetutamente una moneta equilibrata, finché non compaia due volte di seguito la stessa faccia. Si chiede:

- a] Descrivere lo spazio di probabilità, individuando gli eventi dello spazio campione (ad es. indicando con T,C oppure 0,1 gli esiti, **indipendenti**, dei singoli lanci);
- b] Calcolare la probabilità che l'esperimento si concluda in non più di tre lanci.

2] In un gruppo di cinque monete, **una** ha "croce" su entrambe le facce (indichiamola con C), **due** hanno "testa" su entrambe (indichiamole con T) e le altre **due** sono regolari (R).

Una moneta viene presa ad occhi chiusi e lanciata:

- a] Qual'è la probabilità dell'evento E = "nella faccia **inferiore** c'è testa" ?

Si aprono gli occhi e si vede che la faccia **superiore** mostra "testa" (sia E* tale evento):

- b] Qual'è **ora** la probabilità di E?

La stessa moneta viene lanciata nuovamente (senza guardarla):

- c] Qual'è la probabilità dell'evento E in questo secondo lancio?

Guardando l'esito (faccia superiore) del lancio si vede "testa":

- d] Qual' è adesso la probabilità dell'evento E?

3] La v.a. X ha densità data da

$$f_X(x) = ke^{-2|x-a|}, \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad (a \in \mathfrak{R} \text{ assegnato, } k \text{ costante da determinare}).$$

Si chiede:

- a] Calcolare il valore di k affinché la funzione f_X sia una densità; ricavare media e varianza di X;
- b] Determinare il valore di a in modo tale che sia $P[X < 0] = 1/4$;
- c] Calcolare la probabilità $P[|X - E(X)| > \sqrt{2} \sigma_X]$.

4] Un dado equilibrato viene lanciato n volte. Sia X la v.a. che indica quante volte è uscito il numero 1. Si chiede:

- a] Rappresentare la distribuzione di probabilità di X;
- b] Valutare, usando la disuguaglianza di Cëbyšev, per quali valori di n si ha

$$P \left[|X - E(X)| > \frac{1}{2} E(X) \right] < \frac{1}{2}.$$