

2^a Prova intermedia di Matematica Applicata L-A (7 dicembre 2005)

1] La v.a. X è distribuita con legge esponenziale $e(\lambda)$, ($\lambda > 0$).

Sia $Y = X \rfloor$ la parte intera di X (cioè $Y = k$ per $X \in [k, k+1)$, $k \in \mathcal{N}$), e Z la sua parte frazionaria $Z = X - Y \in [0, 1)$. Si chiede:

a] Ricavare la distribuzione di probabilità della v.a. intera Y e riconoscere il tipo di distribuzione ed il parametro corrispondente;

b] Ricavare, per la v.a. Z , la funzione di ripartizione condizionata $F_{Z|Y}(z|Y = k)$, la densità corrispondente e calcolare $E(Z|Y = k)$.

2] Le v.a. X_1, X_2 sono entrambe $\sim N(0, 1)$ e indipendenti. Sia

$$X = X_1; \quad Y = X_1 + X_2.$$

a] Ricavare la matrice di covarianza di (X, Y) e calcolare il coefficiente di correlazione;

b] Calcolare la densità congiunta $f_{XY}(x, y)$;

c] Ricavare la densità condizionata $f_{Y|X}(y|X = x)$ e calcolare, poi, la probabilità condizionata $P(Y > 0|X = 1)$.

3] Un dado non truccato viene lanciato n volte.

a] Introdotte le v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ che rappresentano l'esito dei singoli lanci, calcolare la probabilità che, per $n = 100$, la somma dei punteggi sia compresa fra 320 e 380;

b] Indicato con E_i l'evento "esce un numero pari (alla i -esima prova)" e con Y_n il numero di volte in cui su n lanci esso si realizza, calcolare il valore di n per il quale

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.05\right) = 0.95.$$