DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Il triangolo ABC ha un angolo retto in C e lati di lunghezza a, b, c (vedi fig. (1)). Le funzioni trigonometriche dell'angolo α sono definite nel modo seguente:

- *seno* di $\alpha = \sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
- *coseno* di $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
- *tangente* di $\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
- *cotangente* di $\alpha = \cot\alpha = \dfrac{b}{a}$
- *secante* di $\alpha = \sec\alpha = \dfrac{c}{b}$
- *cosecante* di $\alpha = \csc\alpha = \dfrac{c}{a}$

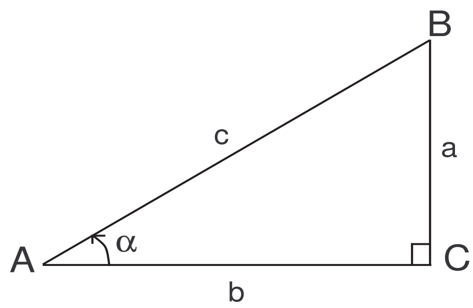


Figura 1: *Il triangolo ABC*

Si consideri, ora, un sistema di coordinate Oxy (vedi figg. (2)). Sia P un punto del piano Oxy di coordinate x, y: $P = P(x, y)$. La distanza di P dall'origine O è positiva e si indica con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'angolo α descritto in senso ***antiorario***, a partire da OX, si considera ***positivo***. Se esso è descritto in senso ***orario***, a partire da OX, è considerato ***negativo***. Chiamiamo $X'OX$ e $Y'OY$ gli assi delle x e delle y, rispettivamente. Indichiamo con I, II, III, IV i vari quadranti (primo, secondo, terzo, quarto quadrante, rispettivamente). In figura $(2)_1$, ad esempio, l'angolo α è nel secondo quadrante, mentre in figura $(2)_2$ è nel terzo quadrante.

Per un angolo α in un qualsiasi quadrante le funzioni trigonometriche sono definite così:

- $\sin\alpha = y/r$
- $\cos\alpha = x/r$
- $\operatorname{tg}\alpha = y/x$
- $\cot\alpha = x/y$
- $\sec\alpha = r/x$
- $\csc\alpha = r/y$

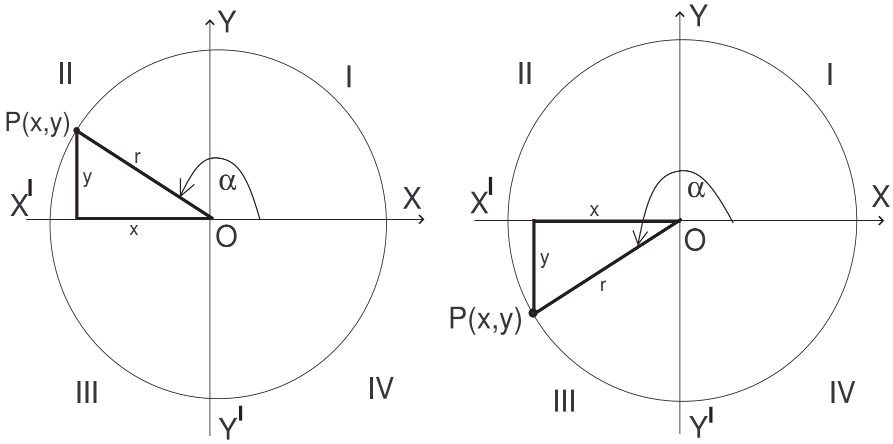


Figura 2: *Quadranti del cerchio trigonometrico.*

RELAZIONE TRA GRADI E RADIANTI

Un radiante è quell'angolo (θ) al centro di una circonferenza di centro O e raggio r, sotteso da un arco $\widehat{MN}$ di lunghezza uguale a quella del raggio r (vedi fig. (3)). Tenendo conto che 2π radianti equivalgono a $360°$ si ha:

- 1 radiante $=180°/\pi = 57.29577...°$
- $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianti $= 0.01745...$ radianti

Per passare dalla misura in gradi ($\theta°$) alla misura in radianti (θ_{rad}) si usa la proporzione

$$\theta° : 180 = \theta_{rad} : \pi.$$

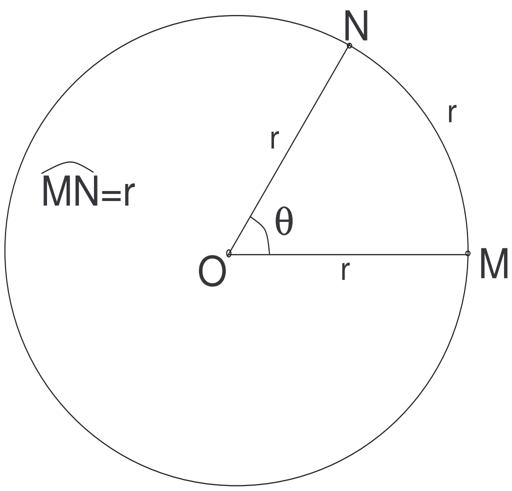


Figura 3: *Radiante.*

PRINCIPALI RELAZIONI TRA LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (il segno davanti alla radice dipende dal quadrante in cui cade α)
- $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$
- $\sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$
- $\cot\alpha = \pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}$
- $\csc\alpha = \pm\sqrt{\cot^2\alpha + 1}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

SEGNI E VARIAZIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Quadrante	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
I	$+$ $0 \to 1$	$+$ $1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$+$ $1 \to \infty$	$+$ $\infty \to 1$
II	$+$ $1 \to 0$	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$	$+$ $1 \to \infty$
III	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$-$ $-1 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$
IV	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to 1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$+$ $\infty \to 1$	$-$ $-1 \to -\infty$

VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI SPECIALI

Angolo α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\ \alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$0^\circ = 0\,(rad.)$	0	1	0	∞	1	∞
$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
$105^\circ = \frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-2\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$
$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$
$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
$165^\circ = \frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
$180^\circ = \pi$	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$-1/2$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
$360^\circ = 2\pi$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

FUNZIONI DI ANGOLI NEGATIVI

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
- $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
- $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

FORMULE DI ADDIZIONE

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$
- $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$
- $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
- $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

FORMULE DI BISEZIONE

- $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

POTENZE DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$
- $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$
- $\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
- $\cot^2\ \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$
- $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$
- $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$
- $\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- $\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$

SOMMA, DIFFERENZA E PRODOTTO DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}$
- $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
- $\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

RIDUZIONE AL PRIMO QUADRANTE

	$-\alpha$	$90° \pm \alpha$ $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$ $\pi \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$ $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$k(360°) \pm \alpha$ $2k\pi \pm \alpha$ (k intero)
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\cot\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$\sec\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

ULTERIORI FORMULE DI RIDUZIONE

- $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°) = -\sin(\alpha - 180°) = -\cos(\alpha - 270°)$
- $\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90°) = -\cos(\alpha - 180°) = \sin(\alpha - 270°)$
- $\mathrm{tg}\,\alpha = -\cot(\alpha - 90°) = \mathrm{tg}\,(\alpha - 180°) = -\cot(\alpha - 270°)$
- $\cot\alpha = -\mathrm{tg}\,(\alpha - 90°) = \cot(\alpha - 180°) = -\mathrm{tg}\,(\alpha - 270°)$
- $\sec\alpha = -\csc(\alpha - 90°) = -\sec(\alpha - 180°) = \csc(\alpha - 270°)$
- $\csc\alpha = \sec(\alpha - 90°) = -\csc(\alpha - 180°) = -\sec(\alpha - 270°)$

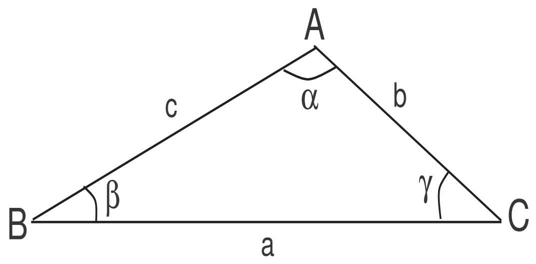
RELAZIONE FRA FUNZIONI DI ANGOLI

Funzione	$\sin\alpha = u$	$\cos\alpha = u$	$\mathrm{tg}\,\alpha = u$	$\cot\alpha = u$	$\sec\alpha = u$	$\csc\alpha = u$
$\sin\alpha$	u	$\pm\sqrt{1-u^2}$	$\frac{u}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\frac{1}{u}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-u^2}$	u	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{u}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{u}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}$	u	$\frac{1}{u}$	$\pm\sqrt{u^2-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{u^2-1}}$
$\cot\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\frac{u}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{u}$	u	$\frac{1}{\pm\sqrt{u^2-1}}$	$\pm\sqrt{u^2-1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{u}$	$\pm\sqrt{1+u^2}$	$\frac{\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$	u	$\frac{u}{\pm\sqrt{u^2-1}}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$	$\pm\sqrt{1+u^2}$	$\frac{u}{\pm\sqrt{u^2-1}}$	u

RELAZIONE FRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO PIANO

Per ogni triangolo piano ABC di lati a, b, c ed angoli α, β, γ (vedi figura seguente) valgono i seguenti risultati:

.



Teorema dei seni: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Teorema del coseno: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta\ ; \qquad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ ; \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Teorema delle tangenti: $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

RELAZIONI ESPONENZIALI (α in radianti), EQUAZIONE DI EULERO

- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad (i = \sqrt{-1})$
- $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$
- $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha = -i\left(\dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}\right)$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Se

$$x = \sin y \tag{1}$$

allora

$$y = \sin^{-1} x \tag{2}$$

è l'angolo il cui seno è x. La (2) è la funzione inversa della (1) e si chiama arcoseno di x (si indica con $\arcsin x$ o $\sin^{-1} x$) Si tratta di una funzione polidroma di x ed è un insieme di funzioni univoche dette *rami*. La stessa cosa vale per le altre funzioni trigonometriche inverse

$$\arccos x\,(\cos^{-1} x),\ \text{arctg}\, x\,(\text{tg}^{-1} x),\ \text{arccot}\, x\,(\cot^{-1} x),\ \text{arcsec}\, x\,(\sec^{-1} x),\ \text{arccsc}\, x\,(\csc^{-1} x).$$

Usualmente, per evitare le difficoltà connesse alla polidromia della funzione, se ne utilizza un ramo particolare detto *ramo principale* e i valori relativi a tale ramo sono detti *valori principali*.

VALORI PRINCIPALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$-\frac{\pi}{2} \le (\sin^{-1} x) \le \frac{\pi}{2}$	$-1 \le x \le 1$
$0 \le (\cos^{-1} x) \le \pi$	$-1 \le x \le 1$
$-\frac{\pi}{2} < (\text{tg}^{-1} x) < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$0 < (\cot^{-1} x) < \pi$	$-\infty < x < \infty$
$0 \le (\sec^{-1} x) < \frac{\pi}{2}$	$x \ge 1$
$-\pi \le (\sec^{-1} x) < -\frac{\pi}{2}$	$x \le -1$
$0 < (\csc^{-1} x) \le \frac{\pi}{2}$	$x \ge 1$
$-\pi < (\csc^{-1} x) \le -\frac{\pi}{2}$	$x \le -1$

N.B. Non vi accordo generale sulle definizioni di $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ e $\csc^{-1} x$ per valori negativi di x.

ALCUNE RELAZIONI TRA LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE
(per i valori principali)

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{arctg}\, x + \text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- $\text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\, x$
- $\text{arccot}\,(-x) = \pi - \text{arccot}\, x$

Mentre le precedenti relazioni valgono sia per $x < 0$ che per $x > 0$, le seguenti valgono solo per $x \geq 0$:

- $\arcsin x = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$
- $\arccos x = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arcsec} x = \pi + \operatorname{arcsec}(-x)$
- $\operatorname{arccsc} x = \pi + \operatorname{arccsc}(-x)$

Le seguenti relazioni sono, invece, valide solo per $x < 0$:

- $\arcsin x = -\pi - \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$
- $\arccos x = -\operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x} - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arccot} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$
- $\operatorname{arcsec} x = -\arccos \frac{1}{x} = -\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsec}(-x) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc}(-x)$
- $\operatorname{arccsc} x = -\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x = -\pi - \arcsin \frac{1}{x} = \operatorname{arccsc}(-x) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec}(-x)$

Se $\alpha = \arcsin x$, allora:

- $\sin \alpha = x, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad ,$
- $\csc \alpha = \frac{1}{x}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \cot\ \alpha = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad .$

Se $\alpha = \arccos x$, allora:

- $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad ,$
- $\csc \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{x}, \quad \cot\ \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad .$

Se $\alpha = \operatorname{arctg} x$, allora:

- $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = x \quad ,$
- $\csc \alpha = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}, \quad \sec \alpha = \sqrt{1 + x^2}, \quad \cot\ \alpha = \frac{1}{x} \quad .$