Capitolo 1

Vettori e Matrici

1.1 Principali proprietà dei vettori

In fisica si utilizzano delle grandezze che sono completamente individuate da un numero reale. Sono i cosiddetti *scalari* (ad esempio: temperatura, energia, volume, ecc.).

D'altra parte, esistono delle quantità che per essere specificate in modo completo richiedono anche la conoscenza di una direzione e di un verso. Tali enti si chiamano *vettori* (ad esempio: spostamento, velocità, forza ecc.).

Diamo, dunque, la seguente

• **Definizione 1.1** *Un vettore è una grandezza caratterizzata da un modulo, una direzione e un verso.*

Per indicare un vettore useremo una delle seguenti notazioni

$$\mathbf{w} = AB = B - A. \quad \text{In modulo}: \mid \mathbf{w} \mid \text{(o} \quad \text{w)}, \quad \mid \text{AB} \mid .$$

Due (o più) vettori possono essere sommati con la nota *regola del parallelogramma* (si veda la fig.1.1-(II)- in cui $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ è la diagonale del parallelogramma i cui lati sono $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$).

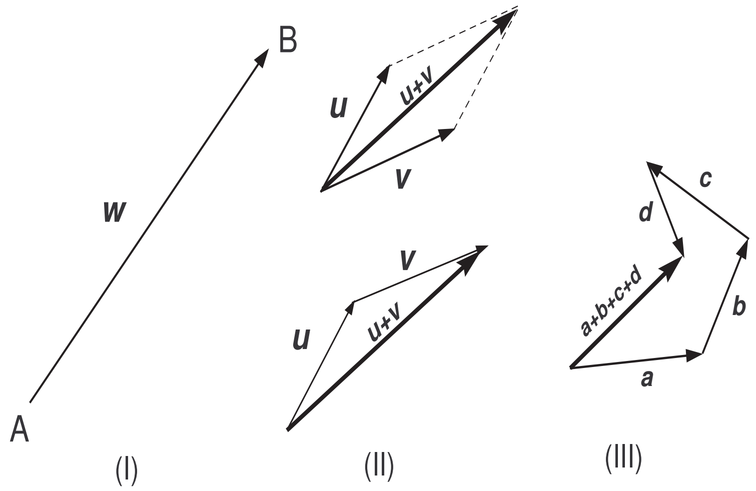

Figura 1.1: *Un vettore (I). Somma di due (II) o più vettori (III).*

Detto X un insieme di vettori, si ha [1]

$$\begin{aligned} &i)\ \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X : \mathbf{a} + \mathbf{b} \in X \\ &ii)\ \exists\ \mathbf{0} \in X : \forall \mathbf{a} \in X, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \\ &iii)\ \forall \mathbf{a} \in X, \exists\ (-\mathbf{a}) \in X : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \\ &iv)\ \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in X : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &v)\ \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X : \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Queste proprietà esprimono, da un punto di vista algebrico, il fatto che i vettori possono essere considerati *elementi di un gruppo commutativo rispetto alla operazione di somma.* [2]
Un vettore può essere moltiplicato per uno scalare k.
Il prodotto $k\mathbf{u}$ si ottiene moltiplicando per k il modulo di $\mathbf{u}$ e conservando lo stesso verso di $\mathbf{u}$ se $k > 0$ e verso opposto se $k < 0$ (vedi fig. 1.2). Se $k = 0$ il vettore $k\mathbf{u}$ è uguale a $\mathbf{0}$. Se $k = -1$, si ha $k\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ che è il vettore opposto di $\mathbf{u}$.
L'operazione di prodotto di un vettore per uno scalare introduce nel gruppo una struttura di spazio vettoriale, chiamiamolo $\mathcal{S}$, in cui valgono le seguenti proprietà che si aggiungono a quelle elencate in (1.1)

[1] Si lascia al lettore l'interpretazione di ciascuna di queste proprietà.

[2] Ricordiamo che un gruppo è una struttura algebrica formata da un insieme (A) e da, almeno, una operazione ($*$) definita in quell'insieme. Quando l'operazione $*$ è associativa, possiede l'elemento neutro ed ogni elemento ha il simmetrico rispetto a $*$ il gruppo si dice commutativo.

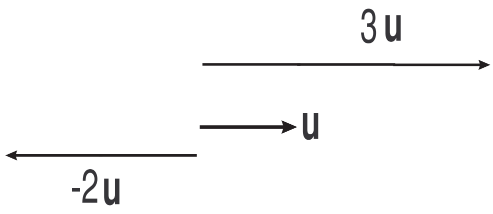

Figura 1.2: *Prodotto di un vettore per uno scalare:* ***u*** *viene moltiplicato per 3 (in alto) e per -2 (in basso)*

$$
\begin{aligned}
&i)\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}, \mathbf{a} \in X : (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a} \\
&ii)\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}, \mathbf{a} \in X : (\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}) = \beta(\alpha\,\mathbf{a}) \\
&iii)\ \forall \alpha \in \mathcal{S}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X : \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b} \\
&iv)\ \exists 1 \in \mathcal{S}, \forall \mathbf{a} \in X : 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

• **Definizione 1.2** *Si chiama spazio ad n-dimensioni (o n-spazio) l'insieme di tutte le n-ple di numeri reali. Lo indicheremo con* $\Re^n$.

Lo spazio fisico in cui viviamo è 3-dimensionale e viene quindi rappresentato mediante terne di numeri reali. Esso possiede anche la struttura euclidea (valgono, cioè, in esso le proprietà della geometria euclidea) e lo indicheremo pertanto, equivalentemente, con i simboli $\Re^3$ o E^3.

• **Definizione 1.3** *Dati n vettori non nulli* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ *ed n scalari* $m_1, m_2, ..., m_n$ *si dice che i vettori sono linearmente indipendenti se si verifica che*

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n = 0 \Longleftrightarrow m_1 = 0, m_2 = 0, ..., m_n = 0$$

Si dice, poi, dimensione di uno spazio il numero massimo di vettori lineramente indipendenti che in esso si possono ottenere.

Lo spazio fisico ordinario ha 3 dimensioni e in esso si possono avere al più tre vettori linearmente indipendenti.

• **Definizione 1.4** *Un insieme di vettori linearmente indipendenti e in numero pari alla dimensione dello spazio si chiama base.*

In $\Re^3$ una base è costituita da tre vettori linearmente indipendenti e la indicheremo, nel seguito, con una di queste notazioni

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \equiv \{\mathbf{e}_k\} \text{ (con } k = 1, 2, 3) \qquad \text{oppure :} \qquad \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

Una base si dice *ortonormale* quando i vettori di base sono tra loro ortogonali e di modulo unitario (*versori* della base). Si può stabilire che un generico vettore $\mathbf{w}$ si rappresenta in $\Re^3$ come combinazione lineare dei tre versori di base. Cioè

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3 \quad \text{oppure} \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$$

I numeri reali w_1, w_2, w_3 sono scalari che rappresentano *le componenti* di $\mathbf{w}$ lungo i tre assi (ad esempio, gli assi cartesiani Oxyz) che sono diretti come $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Nella fig.1.3 sono illustrate le componenti di un generico vettore lungo gli assi di un sistema cartesiano ortogonale Oxyz.

Esempio 1.1 *Rappresentiamo, in termini di componenti, la somma e la differenza di due vettori,il prodotto di un vettore per uno scalare k e il modulo di un vettore. Siano dati i due vettori $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$. Allora*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e}_2 + (a_3 + b_3)\boldsymbol{e}_3\,;$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = (a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{e}_2 + (a_3 - b_3)\boldsymbol{e}_3\,;$$

$$k\boldsymbol{a} = k(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) = (ka_1)\boldsymbol{e}_1 + (ka_2)\boldsymbol{e}_2 + (ka_3)\boldsymbol{e}_3\,;$$

$$\mid \boldsymbol{a} \mid = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

Tra i vettori si possono eseguire varie operazioni che ora descriveremo in dettaglio. Ci limitiamo, nel seguito, a considerare vettori in $\Re^3$. D'altronde, l'estensione di ciò che segue al caso di $\Re^n$ è, usualmente, del tutto ovvia.

1.1.1 Prodotto scalare ($\times$)

È uno scalare che si definisce così

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \tag{1.3}$$

ove θ è l'angolo compreso tra i due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Da tale definizione segue subito una interessante ed utile proprietà (spiegata nella didascalia della fig. 1.4)
Il prodotto scalare possiede numerose proprietà. Elenchiamo quelle di uso più comune.

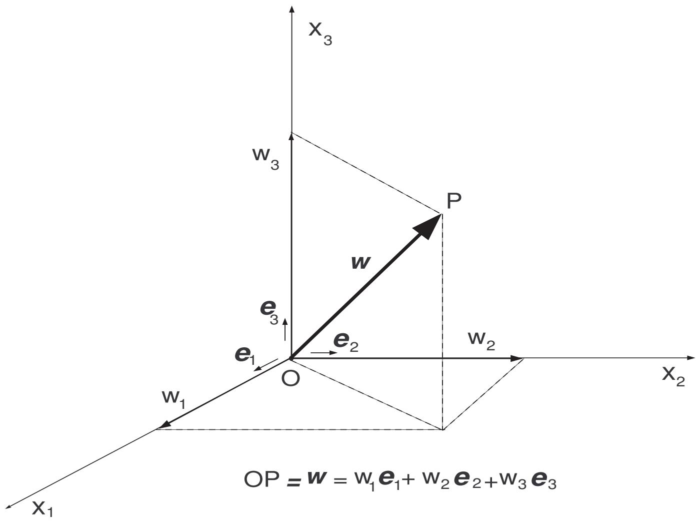

Figura 1.3: *Componenti di un vettore*

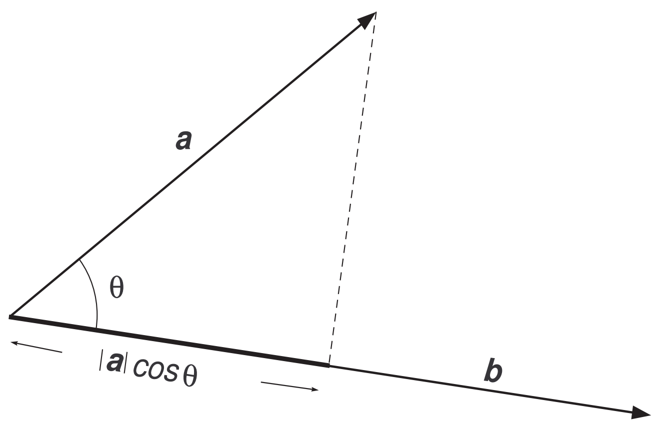

Figura 1.4: *Il prodotto scalare di due vettori. Si osservi che* $|\,\boldsymbol{a}\,|\cos\theta$ *è la proiezione del vettore* $\boldsymbol{a}$ *lungo la direzione di* $\boldsymbol{b}$. *(Viceversa,* $|\,\boldsymbol{b}\,|\cos\theta$ *è la proiezione del vettore* $\boldsymbol{b}$ *lungo la direzione di* $\boldsymbol{a}$.*) Quindi, ad esempio, la componente di un vettore* $\boldsymbol{w}$ *lungo la direzione individuata da un vettore unitario* $\mathbf{e}$ *sarà:* $w_{\mathbf{e}} = \boldsymbol{w} \times \mathbf{e}$.

1] Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ e $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ non sono entrambi nulli: $\mathbf{a}$ è ortogonale a $\mathbf{b}$
2] $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mid \mathbf{a} \mid\mid \mathbf{a} \mid \cos 0° = \mathrm{a}^2 \rightarrow \mathrm{a} = |\mathrm{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{a}}$
3] $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (proprietà commutativa)
4] $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (proprietà distributiva)
5] $\forall \alpha \in \Re : \alpha\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b})$.

Se rappresentiamo i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in termini di componenti, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, allora [3]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ = a_i b_i \ (i = 1, 2, 3) \quad \left(in\, \Re^3\right)$$

Il prodotto scalare tra i versori (vettori di base unitari e tra loro mutuamente ortogonali: vedi definizione 1.4) si scrive, in forma compatta,

$$\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_m = \delta_{lm} \ ; \ (l, m = 1, 2, 3)$$

con

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 0 & se\ l \neq m \\ \\ 1 & se\ l = m \end{cases}$$

che si chiama *simbolo di Kronecker*. Quindi, ad esempio, indicando i versori di base con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si ha

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1 \ ; \ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = 0$$

Esempio 1.2 *Possiamo utilizzare la definizione di prodotto scalare per determinare l'angolo tra due vettori* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$*. Infatti, dalla (1.3) si ha (supposto che i due vettori siano non nulli),*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\mid \boldsymbol{a} \mid\mid \boldsymbol{b} \mid} \Rightarrow \theta = arcos\left(\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\mid \boldsymbol{a} \mid\mid \boldsymbol{b} \mid}\right)$$

Così, ad esempio, per trovare l'angolo tra il versore $\boldsymbol{i}$ *e il vettore* $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ *avremo*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})}{\mid \boldsymbol{i} \mid\mid \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \mid} = \frac{\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e, quindi,

$$\theta = arcos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

[3] Si conviene di sottintendere la somma da 1 a 3 per gli indici ripetuti (*convenzione di sommatoria* di Einstein)

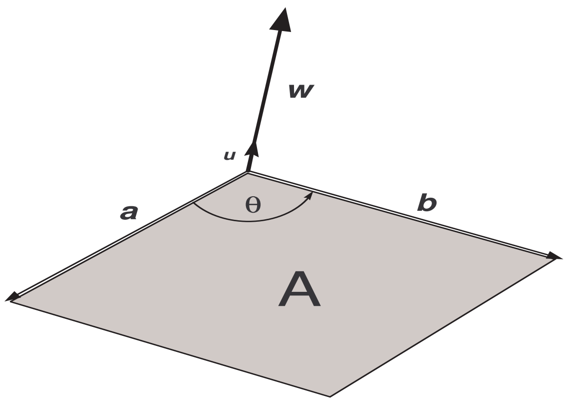

Figura 1.5: *Il prodotto vettoriale. Geometricamente, il modulo di* $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ *rappresenta l'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori.*

1.1.2 Prodotto vettoriale ($\wedge$)

È un vettore dato da

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (ab \sin\theta)\mathbf{u}$$

Il suo modulo vale, cioè, $ab \sin\theta$ (ed è uguale, geometricamente, all'area A del parallelogramma i cui lati sono i due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: vedi fig. 1.5). La sua direzione, individuata dal versore $\mathbf{u}$, è perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e il suo verso risulta quello per cui $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{w}$ formano una terna levogira (cioè tale che per portare $\mathbf{a}$ su $\mathbf{b}$ si debba compiere una rotazione in senso antiorario osservandola dal vertice del vettore $\mathbf{w}$).
Ricordiamo le principali proprietà del prodotto vettoriale

1] Se $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ e $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ non sono entrambi nulli: $\mathbf{a}$ è parallelo a $\mathbf{b}$.
Cioè: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ $(\lambda \in \Re)$
2] $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$
3] $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ (proprietà anticommutativa)
4] $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ (proprietà distributiva)
5] $\forall\alpha \in \Re : \ \alpha(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\alpha\mathbf{b})$.

Il prodotto vettoriale tra i versori si scrive, in forma compatta,

$$\mathbf{e}_l \wedge \mathbf{e}_m = \epsilon_{lmn}\mathbf{e}_n$$

con (*simbolo di Levi-Civita*) [4]

$$\epsilon_{lmn} = \begin{cases} 0 \text{ se due indici sono uguali} \\ +1 \text{ se } (lmn) \text{ è una permutazione pari di (1,2,3): (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)} \\ -1 \text{ se } (lmn) \text{ è una permutazione dispari di (1,2,3): (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3)} \end{cases}$$

e assumendo che $\epsilon_{123} = 1$. È opportuno ricordare che per permutazioni pari si intendono quelle ottenute con un numero pari di trasposizioni, mentre per permutazioni dispari si intendono quelle ottenute con un numero dispari di trasposizioni (per trasposizione si intende lo scambio di due elementi non necessariamente contigui; lo zero è considerato pari).
Ad esempio, per le permutazioni di (1,2,3) si ha:
- 123 è una permutazione pari perchè ottenuta con zero trasposizioni;
- 123 → 213 è una permutazione dispari perchè ottenuta con una trasposizione (scambio di 1 e 2);
- 123 → 213 → 231 è una permutazione pari perchè ottenuta con due trasposizioni (scambio di 1 e 2 e, poi, scambio di 1 e 3).

Esempio 1.3 *Usando il simbolo di Levi Civita rappresentiamo i vari prodotti vettoriali tra e_1, e_2, e_3. Si ha*
$e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$ *(perché due indici di ε_{lmn} sono uguali)*
$e_1 \wedge e_2 = \varepsilon_{123} e_3 = e_3 \quad , \quad e_1 \wedge e_3 = \varepsilon_{132} e_2 = -e_2$
$e_2 \wedge e_1 (= -e_1 \wedge e_2) = \varepsilon_{213} e_3 = -e_3 \quad , \quad e_2 \wedge e_3 = \varepsilon_{231} e_1 = e_1$
$e_3 \wedge e_1 (= -e_1 \wedge e_3) = \varepsilon_{312} e_2 = e_2 \quad , \quad e_3 \wedge e_2 (= -e_2 \wedge e_3) = \varepsilon_{231} e_1 = -e_1$

Ovviamente si ha, per i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

Rappresentiamo, ora, il prodotto vettoriale tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in termini delle loro componenti. Se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, possiamo scrivere

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

ed eseguendo i prodotti vettoriali tra i versori si ottiene

$$a_1\mathbf{i} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Una regola mnemonica utile per ricordare le componenti del prodotto vettoriale consiste nel calcolare, secondo gli elementi della prima riga, il seguente determinante simbolico

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

[4] Più in generale, per due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ qualsiasi, si ha: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_l b_m \epsilon_{lmn} \mathbf{e}_n$ o, in termini di componenti rispetto alla base $\{\mathbf{e}_k\}$: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \epsilon_{lmn} a_l b_m$

1.1.3 Prodotti tripli

Il prodotto scalare e quello vettoriale di *tre* vettori $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ possono dare luogo a due importanti operazioni vettoriali

$$\begin{array}{cc} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} & \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\ \text{(prodotto misto)} & \text{(doppio prodotto vettoriale)} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \text{è uno scalare} & \text{è un vettore} \end{array}$$

Il prodotto misto rappresenta geometricamente il volume del parallelepipedo i cui tre spigoli sono i tre vettori (vedi fig.1.6)
Da questa proprietà geometrica segue immediatamente che se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ e $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ non sono nulli allora i tre vettori $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ giacciono in uno stesso piano (infatti, in questo caso il volume del parallelepipedo è nullo).
Si tengano, inoltre, presenti le seguenti proprietà
1] $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Cioè: in un prodotto misto è possibile scambiare l'operatore $\wedge$ con l'operatore $\times$.
2] Se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Il doppio prodotto vettoriale possiede molte proprietà ma qui ricordiamo quelle più importanti per il nostro corso di Meccanica Razionale.
1] $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$. Cioè: il doppio prodotto vettoriale non è associativo.
2] $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$; $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}$.

1.1.4 Derivate e integrali di vettori

Nelle applicazioni fisiche accade spesso che un vettore sia funzione di qualche argomento. Ad esempio, in meccanica, il vettore che individua la posizione di un punto rispetto alla origine O di un sistema (*vettore posizione* di P) può essere funzione del tempo t: $OP = OP(t)$.
Un vettore si può, quindi, derivare o integrare secondo le usuali regole

$$\frac{dOP}{dt}\,,\ \frac{d^2OP}{dt^2}\,,\ ...\frac{d^nOP}{dt^n} \quad ; \quad \int OP(t)dt$$

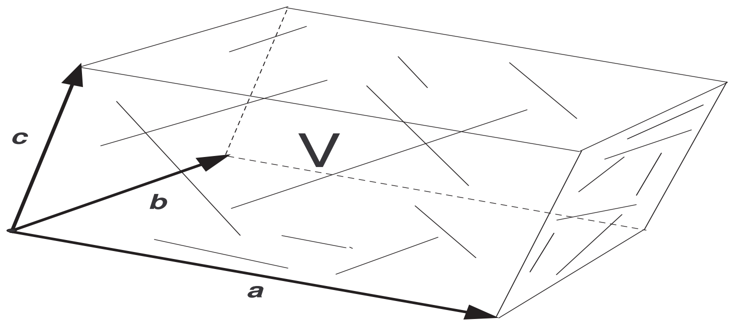

Figura 1.6: *Prodotto misto. Geometricamente, rappresenta il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i tre vettori* $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$.

Se $\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k}$,allora

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_3}{dt}\mathbf{k}$$

Esempio 1.4 *Se* $\mathbf{w} = (2t^2 - 3t)\mathbf{i} + 5\cos t\mathbf{j} - 3\sin t\mathbf{k}$ *si ha, derivando rispetto alla variabile* t*,*

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = (4t-3)\boldsymbol{i} - 5\sin t\boldsymbol{j} - 3\cos t\boldsymbol{k}$$

Se l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ *di un punto è* $\boldsymbol{a}(t) = 3e^{-t}\boldsymbol{i} + 4\cos t\boldsymbol{j} - 9\sin t\boldsymbol{k}$ *si ottiene, integrando, la sua velocità*

$$\boldsymbol{v}(t) = \int (3e^{-t}\boldsymbol{i} + 4\cos t\boldsymbol{j} - 9\sin t\boldsymbol{k})dt = -3e^{-t}\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 9\cos t\boldsymbol{k} + c_1$$

Se $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ (scalare), valgono le seguenti proprietà

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{a}\wedge\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt}\wedge\mathbf{b}.$$

1.1.5 Gradiente, Divergenza, Rotore

Sia dato il vettore $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, funzione del generico punto $\mathrm{P}(x, y, z)$ dello spazio e sia $\varphi = \varphi(x, y, z)$ una funzione scalare. Introduciamo il seguente operatore vettoriale

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

che è un vettore noto come *operatore nabla*.
• Applicando l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ alla funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ si ha

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$$

che è un vettore che si chiama *gradiente* di φ e si indica con grad φ o $\boldsymbol{\nabla}\varphi$.
• • Moltiplicando scalarmente $\boldsymbol{\nabla}$ per il vettore $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ si ha

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

È uno scalare che si chiama *divergenza* di $\mathbf{a}$ e che si indica con div$\mathbf{a}$ o $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}$.
• • • Moltiplicando vettorialmente $\boldsymbol{\nabla}$ per il vettore $\mathbf{a}(x, y, z)$ si ha

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

È un vettore che si chiama *rotore* di $\mathbf{a}$ e si indica con rot $\mathbf{a}$ o $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{a}$.

Esempio 1.5 *Se $\varphi(x, y, z) = xy^2z^3$ e $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + 3xy\boldsymbol{k}$, calcolare $\boldsymbol{\nabla}\varphi$, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{a}$.*
Si ha

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3)\boldsymbol{k} =$$

$$= y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a} = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\Big) \times (xz\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + 3xy\boldsymbol{k}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(3xy) = z + 3y^2$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{a} = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\Big) \wedge (xz\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + 3xy\boldsymbol{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & y^3 & 3xy \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial}{\partial y}(3xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^3)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\frac{\partial}{\partial x}(y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\Big)\boldsymbol{k} =$$

$$= 3x\boldsymbol{i} + (x - 3y)\boldsymbol{j}.$$

1.2 Operatori lineari e matrici

• **Definizione 1.5** *Dato uno spazio lineare* $(X, \mathcal{S})$*, una funzione*

$$\boldsymbol{f} : X \longrightarrow X$$

si dice operatore lineare se soddisfa le seguenti proprietà

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X \;\; : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$
2. $\forall \boldsymbol{x} \in X, \, \forall \alpha \in \mathcal{S} \;\; : \boldsymbol{f}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha \; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

In altre parole, $\mathbf{f} : X \longrightarrow X$ è lineare se conserva le due operazioni basilari di uno spazio vettoriale : addizione vettoriale e moltiplicazione per uno scalare.
Indicheremo nel seguito tali operatori con lettere maiuscole (in neretto) del tipo: **A**, **B** etc. In tale caso la linearità dell'operatore è espressa, allora, nello spazio 3-dimensionale, dalle proprietà

$1'$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^3, \;\; \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$
$2'$ $\forall \mathbf{x} \in \Re^3, \quad \forall \alpha \in \Re : \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$

Se si applica un operatore lineare ad un generico vettore $\mathbf{v}$ si ottiene un altro vettore $\mathbf{w}$. Tale trasformazione lineare viene indicata, simbolicamente, con la scrittura

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w} \tag{1.4}$$

Come i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono rappresentati, rispetto ad una base ortonormale, dalle loro componenti v_i e w_i $(i =, 1, 2, ...n)$ così un operatore $\mathbf{A}$ è rappresentato rispetto ad una base da una *matrice* (qui sta la differenza tra operatore e matrice anche se spesso, nel seguito, parleremo indifferentemente di operatore e di matrice...) ossia

$$\mathbf{A} = \| a_{jk} \| \,, \quad j = 1, 2, ..., m \,;\, k = 1, 2, ..., n.$$

Quando $m = n$ la matrice si dice *quadrata*; altrimenti è detta *rettangolare.* Gli elementi a_{jk} della matrice $\mathbf{A}$ sono, nell'attuale contesto, numeri reali (corrispondentemente, la matrice $\mathbf{A}$ si dice *reale*).
Nel caso particolare $n = m= 3$, che è la situazione che incontreremo più frequentemente, si ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Da notare che un vettore ad n componenti è rappresentabile mediante una n-pla orizzontale o verticale

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \quad o \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}$$

che si chiama *vettore riga* o *colonna.*
La (1.4) è una relazione assoluta, cioè indipendente dall'osservatore; la sua rappresentazione indiciale, cioè rispetto ad una assegnata base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ dello spazio, è la seguente

$$A_{jk} v_k = w_j \tag{1.5}$$

Per verificarlo, scegliamo una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ dello spazio. Rispetto a tale base potremo scrivere i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{e}_k \qquad \mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$$

Sostituendo in (1.4) si ottiene

$$\mathbf{A} v_k \mathbf{e}_k = w_i \mathbf{e}_i$$

Moliplicando scalarmente ambi i membri di quest'ultima per $\mathbf{e}_j$ otteniamo

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{A} v_k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j \times (w_i \mathbf{e}_i) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{e}_j \times \mathbf{A}\mathbf{e}_k v_k = w_i \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i \tag{1.6}$$

Ma, grazie alla ortonormalità dei versori, si ha $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Quindi, ricordando le proprietà del delta di Kronecker,

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{A}\mathbf{e}_k v_k = w_i \delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{e}_j \times \mathbf{A}\mathbf{e}_k v_k = w_j \tag{1.7}$$

Poniamo, allora

$$A_{jk} = \mathbf{e}_j \times \mathbf{A}\mathbf{e}_k \tag{1.8}$$

che rappresenta il generico elemento di matrice dell'operatore $\mathbf{A}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$. In tal modo, la (1.7) si può riscrivere

$$A_{jk} v_k = w_j \tag{1.9}$$

che rappresenta la (1.4) rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$.

Gli elementi di matrice sono per un operatore ciò che le componenti sono per un vettore e cambiando base, la matrice di uno stesso operatore cambia i suoi elementi (analogamente a quanto accade per un vettore).

Esempio 1.6 *In questo esempio,rappresentiamo la (1.9) in $\Re^3$.*

$$A_{jk} v_k = w_j \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \end{pmatrix}$$

essendo

$$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \equiv w_1$$

$$a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \equiv w_2$$

$$a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \equiv w_3$$

Si è eseguito il prodotto righe per colonne della matrice $\boldsymbol{A}$ per il vettore colonna $\boldsymbol{v}$ (si ricordi che se $\boldsymbol{A}$ $(m \times p)$ e $\boldsymbol{B}$ $(p \times n)$ allora il prodotto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ ha m righe ed n colonne e, quindi, nel caso attuale $\boldsymbol{A}(3 \times 3)$, $\boldsymbol{B}(3 \times 1)$ e quindi $\boldsymbol{C}(3 \times 1)$ (vedi paragrafo seguente).

1.2.1 Le principali operazioni tra operatori

a] Prodotto di uno scalare $\lambda \in \Re$ per un operatore $\mathbf{A}$

$$\lambda\, \mathbf{A} = \mathbf{C} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\, A_{ij} = C_{ij}$$

Esempio 1.7

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}$$

b] Somma di due (o più) operatori

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad \Longrightarrow \qquad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Esempio 1.8

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Ovviamente la somma di due o più matrici si può eseguire solo se le matrici hanno le stesse dimensioni.
La somma di matrici è commutativa e associativa. Ossia

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad e \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

c] Differenza di due (o più) operatori

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \qquad \Longrightarrow \qquad C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

d] Prodotto di due (o più) operatori
Ricordiamo preliminarmente che per potere eseguire il prodotto tra due matrici **A** e **B**, il numero di colonne di **A** deve essere uguale al numero di righe di **B**.
Quindi, ad esempio, se **A** ha m righe e p colonne (e scriveremo $\mathbf{A}(m \times p)$) deve essere $\mathbf{B}(p \times n)$.

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad \Longrightarrow \quad C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

che corrisponde al prodotto righe per colonne degli elementi di **A** per gli elementi di **B** (vedi esempio 0.6 e il seguente).

Esempio 1.9 *Siano date le due matrici*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

la matrice $\boldsymbol{A}$ ***è*** (2×2) *mentre la matrice* $\boldsymbol{B}$ *è* (2×3) *e il numero di colonne di* $\boldsymbol{A}$ *è uguale al numero di righe di* $\boldsymbol{B}$*.*
Allora

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di matrici possiede molte proprietà. Ne ricordiamo alcune.

1] $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$: la moltiplicazione tra matrici non è (in generale!) commutativa [5]
2] $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ proprietà associativa.
3] $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
4] $\lambda(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$ (λ scalare)
5] $\mathbf{AI} = \mathbf{IA}$.

1.2.2 Tipi di operatore (matrice)

OPERATORE (MATRICE) IDENTITÀ

C'è un particolare operatore (*operatore identità*) che indichiamo con il simbolo $\mathbf{I}$ che trasforma un qualsiasi vettore in sé stesso. Ossia

$$\mathbf{Iv} = \mathbf{v} \qquad (\forall \mathbf{v} \in \Re^n)$$

La matrice che rappresenta l'operatore identità rispetto a una qualsiasi base ortonormale di $\Re^3$ ha gli elementi

$$\mathbf{I} = \|\delta_{ij}\| \Rightarrow \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che la matrice identità deve necessariamente essere quadrata (una matrice è quadrata quando il numero di righe è uguale al numero di colonne).

MATRICE TRASPOSTA

Data una matrice $\mathbf{A}= \|a_{jk}\|$ si dice matrice *trasposta* la matrice $\|a_{kj}\|$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne. Si indica con il simbolo

$$\mathbf{A}^T \qquad \Longrightarrow \qquad A^T_{ik} = A_{ki}$$

Vale, tra le altre, la seguente proprietà

1] $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

---

[5] In alcune particolari situazioni si può avere $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. In tale caso si dice che i due operatori *commutano* fra loro (È da ossrvare, ad esempio, che se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine n, essa commuta con se stessa e con la matrice identità.)

2] $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

Si può definire soltanto per una *matrice quadrata* $(n \times n)$ ed è uno *scalare* associato ad $\mathbf{A}$ e che si indica con det $\mathbf{A}$. Si calcola come somma algebrica di tutti i prodotti degli elementi di una qualsiasi riga o colonna per i corrispondenti complementi algebrici.

• **Definizione 1.6** *Si dice complemento algebrico di un elemento a_{ik} di una matrice $\|a_{ik}\|$ il minore che si ottiene sopprimendo la riga i-esima e la colonna k-esima e moltiplicandolo per $(-1)^{i+k}$.*

Esempio 1.10 *Data la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

il complemento algebrico, ad esempio, dell'elemento a_{23} si trova sopprimendo la seconda riga e la terza colonna a cui appartiene a_{23} e moltiplicando il minore così ottenuto per $(-1)^{2+3} = (-1)^5 = -1$.
Pertanto

$$C_{23} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare det $\boldsymbol{A}$ come somma algebrica dei prodotti degli elementi della prima riga di $\boldsymbol{A}$ (o di qualsiasi altra riga o colonna, ovviamente) per i corrispondenti complementi algebrici, avendosi

$$det\boldsymbol{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

È evidente che per una matrice $\boldsymbol{A}(2 \times 2)$, si ha: $det\boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Alcune proprietà di det$\mathbf{A}$

1] $det\mathbf{A}^T = det\mathbf{A}$
2] $det(\mathbf{AB}) = det\mathbf{A}\, det\mathbf{B} = det(\mathbf{BA})$

3] $det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n det\mathbf{A}$ $(\alpha \in \Re)$
4] Se $\mathbf{A}$ ha una riga (o colonna) di zeri, allora $det\mathbf{A} = 0$
5] Se $\mathbf{A}$ ha due righe (o colonne) uguali, allora $det\mathbf{A} = 0$.

OPERATORE (MATRICE) INVERSO

• **Definizione 1.7** *Sia $\boldsymbol{A}$ un operatore tale he $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{w}$. Si dice operatore inverso di $\boldsymbol{A}$ (quando esiste), l'operatore $\boldsymbol{A}^{-1}$ tale che*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{w}$$

Si può dimostrare che l'operatore inverso, quando esiste, è unico.
Calcolare la matrice inversa non è semplice, in particolare se la matrice ha grandi dimensioni.
Vediamo nel prossimo esempio il calcolo di una matrice inversa facendolo però precedere da alcune necessarie considerazioni. Sia data una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine n

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• **Definizione 1.8** *Si chiama matrice complementare di $\boldsymbol{A}$ (e si indica con $\boldsymbol{A}^c$),la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi di $\boldsymbol{A}$.*

Una volta costruita la matrice $\mathbf{A}^c$ ne facciamo la trasposta $(\mathbf{A}^c)^T$ e, a questo punto, abbiamo che

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathbf{A}}(\mathbf{A}^c)^T$$

• **Definizione 1.9** *Una matrice per la quale il determinante è nullo si dice singolare, in caso contrario si dice non singolare.*

Quindi la condizione per l'esistenza della matrice (od operatore) inversa è che la matrice sia non singolare.

Esempio 1.11 *Calcoliamo la matrice inversa di*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Il lettore verifichi, ricodando l'esempio 1.10, che $det\boldsymbol{A} = -46$. *Quindi,* $\boldsymbol{A}$ *è non singolare.*
I complementi algebrici dei nove elementi di $\boldsymbol{A}$ *sono (completare, come esercizio, i calcoli non sviluppati ...)*

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -11 \quad , \quad C_{22} = 14 \quad , \quad C_{23} = 5$$

$$C_{31} = -10 \quad , \quad C_{32} = -4 \quad , \quad C_{33} = -8$$

Pertanto la matrice complementare è

$$\boldsymbol{A}^C = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\boldsymbol{A}^c)^T = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

e, infine,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^c)^T = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

Alcune proprietà delle matrice inversa

1] $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
2] $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ $\qquad (\mathbf{A}, \mathbf{B}$ non singolari)
3] $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
4] $det\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{det\mathbf{A}}$

OPERATORE (MATRICE) SIMMETRICO

• **Definizione 1.10** *Un operatore si dice simmetrico se è uguale al suo trasposto*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \quad \Rightarrow \quad A_{ik} = A_{ki}$$

Ovvero: la matrice (quadrata) rappresentativa dell'operatore si mantiene identica a sè stessa scambiando le righe con le colonne.

Esempio 1.12 *Esempi per una generica matrice* $\boldsymbol{A}(3 \times 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \ ; \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede da questo esempio che una matrice simmetrica 3×3 *possiede al più 6 elementi distinti perché gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale devono essere uguali.*

OPERATORE (MATRICE) ANTISIMMETRICO

• **Definizione 1.11** *Un operatore si dice antisimmetrico se è opposto al suo trasposto*

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T \Longrightarrow A_{ik} = -A_{ki}$$

Ovvero: la matrice rappresentativa dell'operatore ha gli elementi che cambiano segno scambiando la righe con le colonne.

Esempio 1.13 *Esempio per una generica matrice* $\boldsymbol{A}(3 \times 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A}$$

Si osservi che
• una matrice antisimmetrica 3×3 possiede al più 3 elementi distinti;
Infatti, essendo $A_{ik} = -A_{ki}$, segue che
• gli elementi della diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono sempre nulli.

• **Definizione 1.12** *Si dice traccia di un operatore* $\boldsymbol{A}$ *(e si indica con* tr $(\mathbf{A})$) la somma degli elementi della diagonale principale della sua matrice rappresentativa.

Nel caso di una matrice $\mathbf{A}(3 \times 3)$ si ha, quindi

$$(\mathbf{A}) = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Proprietà di $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$

1] $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$
2] $\mathrm{tr}\,(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) \quad \forall\alpha \in \Re$
3] $\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA})$
4] $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}\,(\mathbf{B})$

OPERATORE (MATRICE) DI ROTAZIONE

• **Definizione 1.13** *Si dice operatore di rotazione (e lo indicheremo sempre, d'ora innanzi, con* $\boldsymbol{R}$*) un operatore per il quale si verifichi che*

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T \qquad e \qquad det\boldsymbol{R} = 1$$

A partire da tale definizione si verifica immediatamente che

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

Infatti dalla prima condizione si ha (moltiplicando $\mathbf{R}^{-1}$ ambo i membri)

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{R}^{-1}$$

Ma $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}$.
Quindi

$$\mathbf{R}^T\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

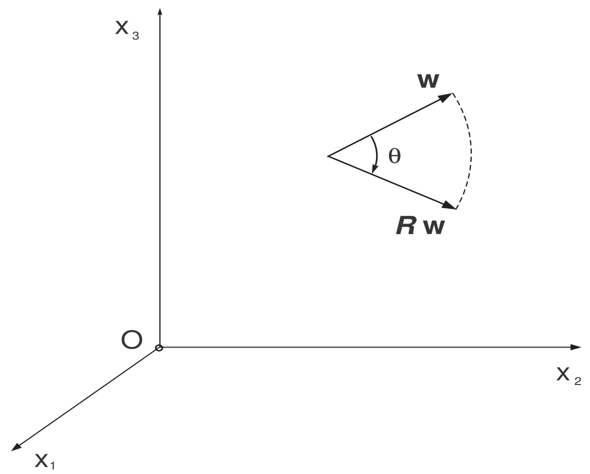

Figura 1.7: *L'azione di un operatore di rotazione* $\boldsymbol{R}$ *su un vettore* $\mathbf{w}$*: quest'ultimo viene ruotato ma il suo modulo resta invariato*

Vale, cioè, la seguente proprietà: l'inverso di un operatore di rotazione è uguale al suo trasposto. Questa proprietà svolge un ruolo importante nell'ambito delle cinematica del corpo rigido.
Gli operatori di rotazione traggono il loro nome dal fatto che agendo su un generico vettore $\mathbf{w}$ lo ruotano senza alterarne il modulo (fig.1.7)
Una ulteriore proprietà degli operatori di rotazione è la seguente: se si applica $\mathbf{R}$ ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_k\}$ si ottiene una nuova base $\{\mathbf{e}'_k\}$ ancora ortonormale. Inoltre, nel caso di uno spazio di dimensione n=3, se la base $\{\mathbf{e}_k\}$ è levogira anche la base $\{\mathbf{e}'_k\}$ lo è.

Osservazione.

È possibile dimostrare che per un operatore di rotazione vale in realtà, $det\mathbf{R} = \pm 1$. La condizione $det\mathbf{R} = 1$ che abbiamo inposto nella definizione 1.13, è fatta per garantire che la rotazione associata all'operatore $\mathbf{R}$ non alteri la simmetria della base $\{\mathbf{e}_k\}$. Gli operatori che soddisfano la sola condizione $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ma non necessariamente la condizione $det\mathbf{R} = 1$ (nel senso che possono soddisfare anche $det\mathbf{R} = -1$) si dicono *operatori ortogonali.*
Vediamo ora di determinare gli elementi della matrice di rotazione $\mathbf{R}$ che trasforma la base $\{\mathbf{e}_k\}$ nella nuova base ruotata $\{\mathbf{e}'_k\}$.
Abbiamo ovviamente,

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{R}\mathbf{e}_k \tag{1.10}$$

Ma possiamo scrivere il generico elemento R_{ik} di $\mathbf{R}$ come (vedi (1.8))

$$R_{ik} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{R}\mathbf{e}_k$$

e, usando la (1.10),

$$R_{ik} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_k = (\mathbf{e}'_k)_i = \alpha_{ik} \tag{1.11}$$

ove il simbolo a due indici α_{ik} indica i *coseni direttori* dei versori della base trasformata rispetto ai versori della base di partenza (che, ovviamente, coincidono con le componenti dei versori trasformati rispetto alla base di partenza).
Cioè

$$\mathbf{e}'_k \equiv (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k})$$

Esempio 1.14 *Tenendo conto di quanto appena detto possiamo, ad esempio, scrivere*

$$\boldsymbol{e}'_2 \equiv (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) \quad ; \quad \boldsymbol{e}'_1 \equiv (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) \quad ecc.$$

ove

$$\alpha_{12} = R_{12} = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}'_2 = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}'_2|\cos\theta_{12}$$

$$\alpha_{32} = R_{32} = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}'_2 = |\boldsymbol{e}_3||\boldsymbol{e}'_2|\cos\theta_{32} \quad \text{ecc.}$$

In definitiva, dunque, la matrice di rotazione $\mathbf{R}$ si può scrivere

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}'_1)_1 & (\mathbf{e}'_2)_1 & (\mathbf{e}'_3)_1 \\ (\mathbf{e}'_1)_2 & (\mathbf{e}'_2)_2 & (\mathbf{e}'_3)_2 \\ (\mathbf{e}'_1)_3 & (\mathbf{e}'_2)_3 & (\mathbf{e}'_3)_3 \end{pmatrix}$$

ove gli elementi della prima, seconda e terza colonna sono, rispettivamente, le componenti di $\mathbf{e}'_1$ $\mathbf{e}'_2$ ed $\mathbf{e}'_3$ sulla base di partenza.

Esempio 1.15 *Il piano coordinato Ox_1x_2 ruota di un angolo θ intorno all'asse Ox_3 ad esso perpendicolare (vedi fig. 1.8): scrivere la matrice di rotazione $\boldsymbol{R}$.*
In tale situazione i versori della base ruotata rispetto alla base fissa sono

$$\boldsymbol{e}'_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (cos\theta, sen\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (-sen\theta, cos\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (0, 0, 1)$$

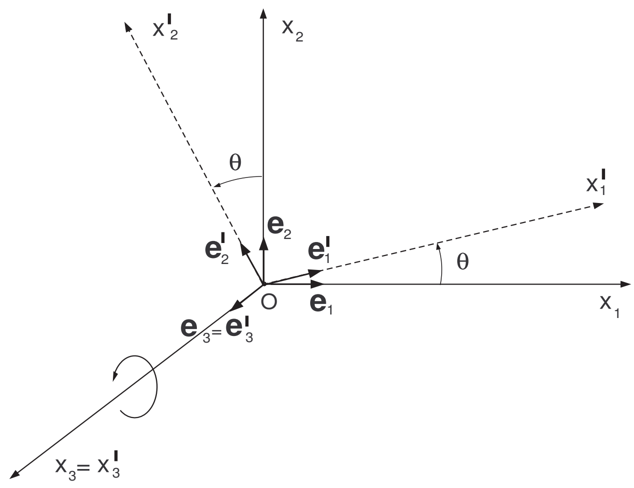

Figura 1.8: *Rotazione del piano coordinato Ox_1x_2 intorno all'asse Ox_3 ad esso perpendicolare.*

e, pertanto,

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante la matrice di rotazione $\mathbf{R}$ è possibile stabilire anche la relazione che intercorre tra le componenti di un generico vettore $\mathbf{v}$ rappresentato sulla base $\{\mathbf{e}_k\}$ e le componenti dello stesso vettore rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_k\}$.
Si dimostra, facilmente, che

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}' \quad ; \quad \mathbf{v}' = \mathbf{R}^T\mathbf{v} \tag{1.12}$$

essendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\mathbf{v}' = (v'_1, v'_2, ..., v'_n)$.

Esempio 1.16 *Come si trasformano le componenti di un vettore $\boldsymbol{v}$ nella rotazione illustrata nell'esempio 1.14?*
Si ha

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta \\ v'_2 = -v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta \\ v'_3 = v_3 \end{cases}$$

A conclusione della discussione sulle matrici di rotazione ricordiamo una importante proprietà.
Gli elementi α_{ik} di una matrice di rotazione non sono tra loro indipendenti ma sono legati dalle seguenti condizioni (*condizioni di ortogonalità*)

$$\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik} \tag{1.13}$$

Tali condizioni garantiscono che la matrice $\mathbf{R}$ sia ortogonale (quindi legata alla ortogonalità dei sistemi di riferimento). Nel caso di una matrice $\mathbf{R}(3 \times 3)$, le (1.13) costituiscono 6 relazioni. Dei nove elementi della matrice $\mathbf{R}$ solo tre sono, dunque, tra loro indipendenti (questa osservazione risulta utile nella discussione della cinematica del corpo rigido).

Esempio 1.17 *Rappresentiamo esplicitamente le (*1.13*).*

Tenendo conto della definizione di delta di Kronecker data in precedenza si ottiene, attribuendo a j e k i valori da 1 a 3,

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1 \quad ; \quad \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1 \quad ; \quad \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1;$$

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0 \quad ; \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0;$$

$$\alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{33} = 0.$$

1.2.3 Trasformazioni di similitudine

Le (1.12) descrivono come si trasformano le componenti di un vettore a causa di una rotazione degli assi cartesiani.
Ci chiediamo ora con quale legge si trasformino gli elementi della matrice rappresentativa di un generico operatore $\mathbf{A}$ quando ruota il riferimento cartesiano ortogonale.
Si dimostra che la matrice viene trasformata secondo la seguente legge

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R} \tag{1.14}$$

Per verificarlo partiamo dalle matrici che rappresentano l'operatore $\mathbf{A}$ rispetto alle due basi $\{\mathbf{e}_k\}$ $\{\mathbf{e}'_k\}$, rispettivamente

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| \quad , \quad \mathbf{A}' = \|a'_{ik}\|$$

Sappiamo già che

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{w}' = \mathbf{A}'\mathbf{v}' \tag{1.15}$$

Ma per $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ valgono, in base alle (1.12),

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{w}' \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}' \tag{1.16}$$

Sostituiamo, ora, le (1.16) nella prima delle (1.15). Avremo

$$\mathbf{R}\mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{v}'$$

e, moltiplicando quest'ultima a sinistra per $\mathbf{R}^T$,

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{w}' = \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{v}'$$

Ma $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Quindi

$$\mathbf{I}\mathbf{w}' = \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{v}' \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{w}' = \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{v}'$$

Quest'ultima si identifica con la seconda delle (1.15) se e solo se

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^T\mathbf{A}\mathbf{R}$$

Ovviamente vale anche

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{A}'\mathbf{R}^T$$

La (1.14) si chiama *trasformazione di similitudine* e fornisce la relazione che intercorre fra gli elementi di un operatore matriciale $\mathbf{A}$ rispetto a due diverse basi $\{\mathbf{e}_k\}$ ed $\{\mathbf{e}'_k\}$ essendo quest'ultima ottenuta dalla prima mediante l'azione dell'operatore di rotazione $\mathbf{R}$. Tramite essa si può verificare, tra l'altro, che:
• le proprietà di simmetria e antisimmetria di un operatore sono proprietà assolute: non dipendono,cioè, dalla scelta della base ma sono proprietà intrinseche dell'operatore.
•• Dato un operatore $\mathbf{A} \in \Re^3$, le grandezze scalari

$$I_1 = tr(\mathbf{A}) \quad , \quad I_2 = tr(\mathbf{A}^c) \quad , \quad I_3 = \det\mathbf{A}$$

sono indipendenti dalla base rispetto a cui l'operatore viene rappresentato. Queste grandezze si chiamano *invarianti principali dell'operatore.*

1.2.4 Autovalori ed autovettori di un operatore

Il problema agli autovalori è un importante argomento che interviene in molte questioni della fisica-matematica e che useremo frequentemente nel corso di Meccanica Razionale.
Esso nasce dal seguente quesito: dato un operatore $\mathbf{A}$, esistono dei vettori $\mathbf{v}$ (non nulli) tali che applicando ad essi l'operatore $\mathbf{A}$ il vettore trasformato che ne risulta sia parallelo al vettore $\mathbf{v}$ di partenza?
In termini matematici si pone, cioè, il problema di trovare vettori $\mathbf{v}$ tali che

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1.17}$$

essendo λ uno scalare da determinare.
La (1.17) si può riscrivere nella forma

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \tag{1.18}$$

Limitandoci al caso, per noi più interessante in cui sia $n = 3$, la (1.18) rappresenta, dal punto di vista algebrico, un sistema lineare, omogeneo di tre equazioni nelle tre incognite costituite dalle componenti del vettore $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$. Infatti la (1.18) scritta per esteso è (indichiamo con a_{ij} gli elementi di $\mathbf{A}$)

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + a_{23}v_3 = 0 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + (a_{33} - \lambda)v_3 = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Questo sistema ammette sempre la *soluzione banale* $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Soluzioni non banali esistono se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo. Ossia

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calcolando tale determinante si trova la seguente equazione cubica (*equazione caratteristica o polinomio caratteristico*)

$$\lambda^3 - tr(\mathbf{A})\lambda^2 + tr(\mathbf{A}^c)\lambda - detA = 0 \Longrightarrow \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{1.20}$$

Risolvendola si determinano i valori di λ in corrispondenza ai quali il problema ammette soluzioni non banali. Sostituendo tali valori di λ nel sistema (1.19) si trovano i corrispondenti v_1, v_2, v_3 che sono le componenti del vettore $\mathbf{v}$.
Le radici della equazione caratteristica (1.20) si chiamano *autovalori* di $\mathbf{A}$ e i vettori $\mathbf{v}$, che si determinano in corrispondenza, si chiamano *autovettori* di $\mathbf{A}$.
Si noti che, per ogni autovalore, esistono **infiniti** autovettori: infatti se $\mathbf{v}$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ anche ogni vettore ad esso parallelo (e ce ne sono infiniti) è un autovettore.

Osservazioni

• L'equazione caratteristica (1.20) è cubica nel caso $\mathbf{A}(3 \times 3)$. Se $\mathbf{A}(n \times n)$, l'equazione caratteristica è di grado n. I valori di λ che soddisfano la (1.20) possono anche essere complessi ma, come vedremo tra poco, se $\mathbf{A}$ è simmetrica i suoi autovalori sono necessariamente reali.

•• Le direzioni individuate dagli autovettori vengono chiamate *assi principali* dell'operatore **A**.
• • • I coefficienti della (1.20) coincidono a meno del segno con gli invarianti principali: ne consegue che anche gli autovalori sono invarianti rispetto ad una qualsiasi trasformazione di similitudine.

Esempio 1.18 *Determiniamo gli autovalori e gli autovettori dell,operatore simmetrico* $\boldsymbol{A}$ *la cui rappresentazione matriciale è*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0$ *(vedi (1.18)) è, nel caso attuale,*

$$\begin{cases} (3-\lambda)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + (3-\lambda)v_2 = 0 \\ (1-\lambda)v_3 = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Questo sistema ha soluzioni non banali se e solo se è soddisfatta la condizione $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, *cioè,*

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \tag{1.22}$$

Questo polinomio caratteristico ha, quindi, le seguenti soluzioni

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 1 \tag{1.23}$$

che sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$.
Per determinare gli autovettori relativi a ciascun autovalore, andiamo a sostituire, uno dopo l'altro, i valori (1.23) *nel sistema* (1.21).
Sostituendo,ad esempio, $\lambda_3 = 1$ *il sistema* (1.21) *diventa*

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \implies v_1 = v_2 = 0 \tag{1.24}$$

e v_3 *arbitrario. Dunque, una soluzione di* (1.21) *è*

$$v_1 = v_2 = 0 \quad e \quad v_3 = a \neq 0 \quad (arbitrario)$$

L'autovettore $\boldsymbol{v}^{\{3\}}$ *relativo all'autovalore* $\lambda_3 = 1$ *è, quindi, il seguente*

$$\boldsymbol{v}^{\{3\}} = (0, 0, a)$$

Tale autovettore individua una direzione (asse principale di $\boldsymbol{A}$*). Il vettore* $\boldsymbol{v}^{\{3\}}$ *si può normalizzare, dividendolo per il suo modulo a. Si ottiene*

$$\boldsymbol{d}_3 = (0, 0, 1)$$

Il lettore può verificare che gli autovettori (normalizzati) associati agli autovalori λ_1 *e* λ_2 *sono*

$$\boldsymbol{d}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \boldsymbol{d}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Si osservi, infine, che gli autovettori $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$ *hanno modulo unitario e sono tra loro ortogonali come si verifica immediatamente osservando che i loro prodotti scalari,* ($\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_3$ e $\boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{d}_3$)*, sono nulli.*

Esempio 1.19 *Verifichiamo che l'equazione caratteristica (*1.22*) coincide con l'espressione* $\lambda^3 - tr(\boldsymbol{A})\lambda^2 + tr(\boldsymbol{A}^c)\lambda - det\boldsymbol{A} = 0$ *(vedi (*1.20*)).*
Infatti

$$tr(A) = 7, \quad det\boldsymbol{A} = 8, \quad \boldsymbol{A}^c = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow tr(\boldsymbol{A}^c) = 14$$

*e si ottiene la (*1.22*).*

1.2.5 Autovalori ed autovettori di un operatore simmetrico

Se l'operatore **A** è simmetrico (ed è questo il caso di molti operatori che si incontrano in Meccanica Razionale) valgono della particolari proprietà per i suoi autovalori ed autovettori. In particolare, si può dimostrare che

•• **Teorema 1.1** *Gli autovalori di un operatore simmetrico sono reali.*

•• **Teorema 1.2** *Gli autovettori di un operatore simmetrico sono reali e formano una base ortonormale dello spazio.*

In relazione a questi teoremi occorre, però, fare alcune importanti considerazioni. Per il teorema fondamentale dell'algebra le radici della equazione caratteristica (1.20) sono tre ossia tante quanto è il grado della equazione stessa (ci poniamo, per le considerazioni che seguono nel caso particolare in cui sia $\mathbf{A}(3 \times 3)$, ma quel che segue vale in generale).
Ma, tra queste radici, ve ne possono essere anche di multiple. I casi possibili sono, cioè,

$$i)\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3\ ;\ ii)\ \begin{array}{c} \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ (\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2) \\ (\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1) \end{array}\ ;\ iii)\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Caso i). In questo caso si dimostra che i 3 autovettori corrispondenti ai 3 autovalori distinti sono tra loro ortogonali. In altri termini: un operatore simmetrico $\mathbf{A}$ che ammette 3 autovalori distinti possiede 3 autovettori tra loro ortogonali, ciascuno in corrispondenza di un autovalore.

Caso ii) Ora il sistema omogeneo (1.19) ammette ∞^2 soluzioni e ciò significa che esiste un *piano invariante* rispetto all'azione dell'operatore $\mathbf{A}$: qualunque vettore di tale piano è autovettore. Se, ad esempio, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono gli autovettori corrispondenti a λ_1 e λ_2, qualsiasi vettore del piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è autovettore di $\mathbf{A}$. L'autovettore corrispondente all'autovalore λ_3 è perpendicolare a tale piano.

Caso iii) In tale caso, tutto lo spazio risulta essere invariante rispetto all'azione dell'operatore $\mathbf{A}$ e tutte le rette dello spazio tra loro mutuamente perpendicolari sono assi principali di $\mathbf{A}$.

• **Definizione 1.14** *Un operatore lineare $\boldsymbol{A}$ si dice diagonalizzabile se esiste una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_k\}$ nella quale la sua matrice associata assume forma diagonale.*

Sussiste, a tale proposito,un fondamentale teorema

•• **Teorema 1.3** *Gli operatori diagonalizzabili sono tutti e soli quelli simmetrici*

Se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, la base rispetto alla quale esso assume forma diagonale è quella formata dai suoi autovettori e gli elementi che compaiono sulla diagonale di $\mathbf{A}$ sono gli autovalori di $\mathbf{A}$.
Per dimostare che gli elementi della matrice $\mathbf{A}$ diagonalizzata sono gli autovalori di $\mathbf{A}$ ragioniamo come segue. Sia $\{\mathbf{d}_k\}$ la base costituita dagli autovettori di $\mathbf{A}$ e sia $\mathbf{R}$ la matrice di rotazione che permette di passare dalla base $\{\mathbf{e}_k\}$, nella quale $\mathbf{A}$ è rappresentata, alla base $\mathbf{d}_k$:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{R}\mathbf{e}_k$$

ove (1.11)

$$R_{ik} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{d}_k = (\mathbf{d}_k)_i$$

Quindi

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} (\mathbf{d}_1)_1 & (\mathbf{d}_2)_1 & (\mathbf{d}_3)_1 \\ (\mathbf{d}_1)_2 & (\mathbf{d}_2)_2 & (\mathbf{d}_3)_2 \\ (\mathbf{d}_1)_3 & (\mathbf{d}_2)_3 & (\mathbf{d}_3)_3 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Rispetto alla base degli autovettori la matrice che rappresenta l'operatore $\mathbf{A}$ ha dunque la nuova rappresentazione (vedi (1.14))

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il risultato voluto. Ma, nel caso attuale, anzichè usare questa procedura, sfruttiamo il fatto che, siccome i versori della nuova base sono autovettori, si può scrivere (vedi (1.8))

$$\mathbf{A}'_{jk} = \mathbf{d}_j \times \mathbf{A}\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_j \times \lambda \mathbf{d}_k = \lambda^{(k)} \delta_{jk}$$

che, per esteso, equivale a

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.20 *Mediante la trasformazione di similitudine (1.14) si diagonalizzi la matrice simmetrica $\boldsymbol{A}$ discussa nell'esempio 0.18.*
Abbiamo determinato, in tale esempio gli autovettori, $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$, della matrice $\boldsymbol{A}$. È allora immediato costruire la matrice di rotazione (1.25) e, conseguentemente, la sua trasposta. Eseguendo il prodotto di matrici $\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}$ (il lettore è invitato a farlo...) si ottiene la matrice $\boldsymbol{A}'$ diagonalizzata che risulta essere

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.6 Operatori definiti di segno

• **Definizione 1.15** *Un operatore $\boldsymbol{A}$ si dice definito positivo o definito negativo se sono verificate, rispettivamente, le seguenti condizioni ($\boldsymbol{v}$ è un generico vettore)*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} > 0 \ \forall \boldsymbol{v} \neq 0, \ e \ A\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{definito positivo}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} < 0 \ \forall \boldsymbol{v} \neq 0, \ e \ A\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{definito negativo}$$

In particolare, $\boldsymbol{A}$ è semidefinito positivo se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \geq 0$ $(\forall \boldsymbol{v} \in \Re^3)$ ed è semidefinito nagativo se $A\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \leq 0$ $(\forall \boldsymbol{v} \in \Re^3)$

Esiste un criterio operativo per verificare se un operatore è definito di segno. Tale criterio è basato sul seguente

•• **Teorema 1.4** *Gli autovalori di un operatore* $\boldsymbol{A}$ *simmetrico definito positivo (negativo) sono tutti strettamente positivi (negativi).*

Peraltro, per verificare se un operatore $\mathbf{A}$ simmetrico è definito o semidefinito di segno si possono usare dei criteri (*criterio di Sylvester*) su sui non ci soffermiamo.
Ci preme, invece, segnalare un esempio, utile per la Meccanica Razionale, che è il seguente.
Consideriamo una matrice simmetrica $\mathbf{A}(2 \times 2)$. Se la matrice non si presenta in forma diagonale non occorre diagonalizzarla per trovare gli autovalori: infatti, essi si possono trovare direttamente dalla equazione caratteristica (1.20) che nel caso di un matrice di ordine due assume la forma

$$\lambda^2 - tr(\mathbf{A})\lambda + det\mathbf{A} = 0$$

Sappiamo che gli autovalori sono senz'altro reali perchè $\mathbf{A}$ è simmetrica e allora (si usi la regola dei segni di Cartesio) affinchè essi siano entrambi positivi (negativi) dovremo avere due variazioni (permanenze) dei segni dei coefficienti della equazione. Questo si realizza a condizione che

$$tr(\mathbf{A}) > 0 \; (< 0) \quad , \quad det\mathbf{A} > 0$$

È sufficiente, perciò, esaminare i segni della traccia e del determinante delle matrice $\mathbf{A}$ per stabilitre il segno degli autovalori. È ovvio che se la matrice simmetrica è (2×2) queste condizioni equivalgono a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc} tr\mathbf{A} > 0 & a_{11} + a_{22} > 0 \\ < 0 & a_{11} + a_{22} < 0 \\ det\mathbf{A} > 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \rightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \rightarrow a_{11}a_{22} > 0 \end{array}$$

Pertanto a_{11} e a_{22} hanno lo stesso segno e conseguentemente la richiesta che la traccia sia positiva (negativa) si riconduce alla richiesta che $a_{11} > 0$, (< 0).
Riassumendo, se la matrice $\mathbf{A}$ è di ordine $n = 2$ ed è simmetrica, risulta definita positiva o negativa se si verifica, rispettivamente, che:

$$a_{11} > 0 \; , \; det\mathbf{A} > 0,$$

$$a_{11} < 0 \; , \; det\mathbf{A} > 0.$$

Quest'ultimo caso (matrice definita negativa) è di interesse per lo studio della stabilità delle posizioni di equilibrio di un sistema conservativo.