

Esercizi - 6 Marzo 2017

Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche, a.a. 2016/17

Esercizio 1. Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che il sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

sia equivalente al sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 3y = 1 + k^2 \\ y - kz = k - 1 \end{cases}$$

[SOLUZIONE. Per $k = 1$.]

Esercizio 2. Risolvere, al variare del parametro reale b , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + by = 2 \\ (b + 1)x + 2y + (b + 2)z = -2 \\ x + by + (b + 2)z = 2 \end{cases}$$

Risolvere ora lo stesso sistema lineare interpretandolo come un sistema nelle incognite x, y, z, t .

[SOLUZIONE. Se $b \neq -2, 1$ una soluzione: $(\frac{2}{1-b}, \frac{2}{b-1}, 0)$. Se $b = -2$ infinite soluzioni: $\{(2y + 2, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Se $b = 1$ nessuna soluzione.]

Esercizio 3. Risolvere, al variare del parametro reale a , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ (a + 1)x + 4y + (a + 3)z = 2 \\ (a - 1)x + (1 - a)y = 0 \end{cases}$$

[SOLUZIONE. Se $a \neq -4, 1, 3$ una soluzione: $(\frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4}, \frac{1}{a+4})$. Se $a = -4$ nessuna soluzione. Se $a = 1$ infinite soluzioni: $\{(1 - 4z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Se $a = 3$ infinite soluzioni: $\{(y, y, \frac{1-4y}{3}) \mid y \in \mathbb{R}\}$.]

Esercizio 4. Determinare, se esistono, i valori del parametro reale α per i quali i sistemi lineari

$$\Sigma : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Sigma_\alpha : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti.

[SOLUZIONE. Per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 5. Risolvere, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2 \end{cases}$$

[SOLUZIONE. Se $k \neq 0, 1$ una soluzione: $(\frac{2-k}{k-1}, \frac{1}{1-k}, \frac{1}{k-1})$. Se $k = 0$ infinite soluzioni: $\{(-2, 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Se $k = 1$ nessuna soluzione.]

Esercizio 6. Risolvere, al variare dei parametri reali a e b , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1 \end{cases}$$

[SOLUZIONE. Se $a \neq 0, \pm 1$ una soluzione: $(\frac{a-b}{a^2+a}, \frac{a+b}{a^2+a}, \frac{a-1}{a^2+a})$. Se $a = 0$ nessuna soluzione. Se $a = -1$ nessuna soluzione. Se $a = 1$ infinite soluzioni: $\{(1 - y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.]

Esercizio 7. Risolvere, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -12 \\ 2x - ky + 2z = 12 \\ -kx + y + 2z = 4 \\ x + y - 2z = -8 \end{cases}$$

[SOLUZIONE. Se $k \neq 1, 3$ nessuna soluzione. Se $k = 1$ una soluzione: $(\frac{4}{3}, -2, \frac{11}{3})$. Se $k = 3$ una soluzione: $(0, -2, 3)$.]

Esercizi - 13 Marzo 2017

Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche, a.a. 2016/17

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + ky + z = k \\ 2x + y + kz = 2k \end{cases}$$

Sia S_k l'insieme delle soluzioni di Σ_k . Stabilire per quali valori del parametro reale k l'insieme S_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Per i valori trovati:

- a) stabilire se il sistema Σ_k è sempre risolubile;
- b) determinare esplicitamente l'insieme S_k delle soluzioni.

[SOLUZIONE. Per $k = 0$. a) Sì. b) $S_0 = \{(x, -2x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.]

Esercizio 2.

- a) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$.
- b) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?
- c) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?
- d) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 3, 2), (-1, 3, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$.

[SOLUZIONE. a) No. b) Sì. c) Sì. d) No.]

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$S = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (-1, 0, -1, 0, -1), (2, 0, 0, 0, -1), (0, 0, 2, 0, 3) \rangle.$$

- a) Determinare la dimensione di S e due basi diverse di S .

- b) Stabilire se il vettore $(1, 0, 3, 0, 4)$ appartiene ad S .
- c) Stabilire se S coincide con $T = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid b = d = 0\}$. In caso negativo, esibire, se possibile, un vettore di S che non appartenga a T ed un vettore di T che non appartenga ad S .

[SOLUZIONE. a) $\dim S = 2$. b) Sì. c) $S \neq T$, infatti $S \subsetneq T$.]

Esercizio 4. Stabilire per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti:

$$v_1 = (-1, k+1, k, 0), \quad v_2 = (k, 0, -2, 0), \quad v_3 = (1, -1, 0, 0).$$

Per ciascuno dei valori di k trovati, scrivere un vettore come combinazione lineare degli altri.

[SOLUZIONE. Per $k = -2, 0$.]

Esercizio 5. Siano $S = \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z - 2x = 0\}$.

- a) Verificare che T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e trovare un insieme di generatori per T .
- b) Trovare una base $\mathcal{A}$ di S . Tale base è unica?
- c) Verificare che $S \subset T$ e completare la base $\mathcal{A}$ in una base $\mathcal{B}$ di T .
- d) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori:

$$v_1 = (1, 1, k, k+1), \quad v_2 = (k, 1, 0, 2-k), \quad v_3 = (k+1, 2, 0, k+1).$$

Sia inoltre $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

- a) Per quali valori di k i vettori v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^4$?
- b) Stabilire al variare di k la dimensione di S e determinarne una base.
- c) Stabilire per quali valori di k il vettore $v_4 = (k, k, k, 6)$ appartiene a S .
- d) Per quali valori di k i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^4$?

[SOLUZIONE. a) Per nessun $k \in \mathbb{R}$. b) $\dim S = 3$ se $k \neq 1$. $\dim S = 2$ se $k = 1$. c) Per $k = -1, 0, 2$. d) Per $k \neq 0, \pm 1, 2$.]

Esercizi - 20 Marzo 2017

Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche, a.a. 2016/17

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a + 2c = 2b + d\}.$$

- Determinare una base $\mathcal{B}$ di S .
- Esibire un insieme di generatori di S che non sia una base di S e in cui i vettori non sono l'uno multiplo dell'altro.
- Determinare, se possibile, 5 vettori non nulli che generano S tali che l'ultimo vettore non appartiene al sottospazio generato dai primi 4.
- Determinare, se possibile, 3 vettori di S a due a due linearmente indipendenti che non costituiscano una base di S .
- Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^4$.
- Stabilire se i vettori $u = (1, 2, 1)_\mathcal{B}$ e $v = (1, 2, 1, 0)_\mathcal{D}$ sono uguali.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

- Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $(1, 2, 3) = (1, -1, 1)_\mathcal{A}$. Tale base è unica?
- Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che
 - $v_1, v_2 \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2z = y\}$;
 - $v_2, v_3 \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 2y\}$;
 - $(1, -2, 1) = (1, 0, -1)_\mathcal{B}$.

Tale base è unica?

- Sia ora $\mathcal{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se anche $\mathcal{D}' = \{u_1 + u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 + 3u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x + y, z - x, y + z, -y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Verificare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e trovare due diversi insiemi di generatori di S .
- b) Trovare due diverse basi di S e calcolare la dimensione di S .
- c) Trovare, se possibile, due vettori $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti tali che $u_1, u_2 \notin S$ e $u_1 - u_2 \in S$.
- d) Trovare, se possibile, due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che $v_1 \notin S$, $v_2 \in S$ e $v_1 - v_2 \in S$.

[SOLUZIONE. b) $\dim S = 2$. c) Ad esempio $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 0)$. d) No, infatti $v_1 = v_2 + (v_1 - v_2) \in S$.]

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\},$$

$$T = \langle (0, 1, -1, -2), (0, 0, 0, 1), (0, 3, -3, 0) \rangle.$$

- a) Determinare la dimensione di S e di T .
- b) $S \cup T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? In caso negativo, determinare il sottospazio $\langle S \cup T \rangle$.
- c) Determinare una base di $S + T$ e di $S \cap T$.
- d) Esibire un insieme di vettori linearmente indipendenti di $S + T$ che non sia una base e un insieme di generatori di $S \cap T$ che non sia una base.
- e) Determinare, se possibile, due sottospazi vettoriali $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^4$ tali che $T + T_1 \subsetneq \mathbb{R}^4$ con $\dim(T \cap T_1) = 0$ e $T + T_2 = \mathbb{R}^4$ con $\dim(T \cap T_2) > 0$.

[SOLUZIONE. a) $\dim S = 3$ e $\dim T = 2$. b) No, $\langle S \cup T \rangle = S + T$. e) Ad esempio $T_1 = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$ e $T_2 = S$.]