

**Foglio di esercizi numero 3**  
Corso di Algebra e Geometria  
Corso di Laurea in Informatica a.a. 2012/13  
Proff.ssa Nicoletta Cantarini

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:

- a) una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori riga di  $A$ ;
  - b) una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori colonna di  $A$ .
2. Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$ :  $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, 0, 0, 0)$ ,  $v_4 = (2, 2, 0, 3)$ ,  $v_5 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $v_6 = (2, 0, 2, 0)$ ,  $v_7 = (1, 7, 3, 2)$ . Si dimostri che essi individuano un sistema di generatori di  $\mathbb{R}^4$  e si estragga una base di  $\mathbb{R}^4$  dall'insieme  $\{v_1, \dots, v_7\}$ .
3. Si consideri il seguente sottoinsieme di  $M_2(\mathbb{R})$ :

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

- a) Verificare che  $W$  è un sottospazio di  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - b) Determinare una base  $\mathcal{B}$  di  $W$ .
  - c) Completare  $\mathcal{B}$  ad una base di  $M_2(\mathbb{R})$ .
4. Dimostrare che gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$

sono basi di  $\mathbb{R}^2$ . Determinare le coordinate dei vettori  $(1, 3)$ ,  $(2, -1)$  rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore  $(0, 1)_{\mathcal{B}_1}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}_2$ ?

5. Si considerino i vettori  $v_1 = (t, 2t, -1)$ ,  $v_2 = (-2, -4, t - 1)$ ,  $v_3 = (1, -2, 1)$  di  $\mathbb{R}^3$ , al variare del parametro reale  $t$ . Determinare, se esistono, i valori del parametro  $t$  per i quali  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente dipendenti.

6. Sia  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}$ .
- (a) Mostrare che  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - (b) Determinare una base  $\mathcal{B}$  di  $S$ .
  - (c) Completare  $\mathcal{B}$  in una base di  $M_2(\mathbb{R})$  in due modi diversi.
  - (d) Esibire un insieme di generatori di  $S$  che non sia una base di  $S$ .
7. Stabilire per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{(1, t), (-t, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ . Calcolare le coordinate del vettore  $(2, 1)$  rispetto alla base corrispondente ad uno dei valori trovati.