PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Anticipo Sessione Estiva 1998/99-I Appello: 12 Gennaio 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x/n)^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x - y + 2z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $(-1,1]$
☐ $[-1, \sqrt{2} + 2\sqrt{3}]$
☐ $[-(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}), \sqrt{2} + 2\sqrt{3}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{Y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

☐ $\alpha \geq 0$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$
☐ $\alpha = 0$, $\beta \geq 2$
☐ $\alpha = 0$, $\beta = 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli la misura $\mu_2(A)$ dell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 2,\ x^2+y^2 \le 2\sqrt{2}\,x\}$.

☐ $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$
☐ $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$
☐ $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia S la superficie con bordo definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \le 1/\sqrt{2}\}$ e sia $E(x,y,z)$ il campo vettoriale definito da $E(x,y,z) = (y, \frac{1}{2}y^2, xyz)$. Calcolare

$$\int\!\!\int_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma,$$

essendo ν_e la normale esterna e $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ π
☐ $\pi/2$
☐ $-\pi/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+2y^2}-1}{(2x^2+y^2)^\alpha},\ \text{se } (x,y) \ne (0,0),\ \ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha < 1,\ \alpha \ne 1/2$
☐ $\alpha < 1/2$
☐ $\alpha \le 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ come nell'esercizio **(6)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione è sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$.

☐ $\alpha \le 1$
☐ $\alpha < 1/2$
☐ $\alpha < 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \log(1+y)dx + \frac{x}{1+y}dy,\ x \in \mathbb{R},\ y > -1.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, dove Γ è la poligonale $\overrightarrow{ABC}$ (orientata da A a C) di estremi $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ e $C = (3,4)$.

☐ $\log(5^3/2)$
☐ $\log(5/2)$
☐ $\log 2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Anticipo Sessione Estiva 1998/99-I Appello: 12 Gennaio 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{e^{2x^2+y^2} - 1}{(x^2+2y^2)^\alpha}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha \leq 0$
☐ $\alpha < 1$, $\alpha \neq 1/2$
☐ $\alpha < 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ come nell'esercizio **(1)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione è sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

☐ $\alpha < 1/2$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha \leq 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia S la superficie con bordo definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq -1/\sqrt{2}\}$ e sia $E(x,y,z)$ il campo vettoriale definito da $E(x,y,z) = (y, \frac{1}{2}y^2, xyz)$. Calcolare

$$\iint_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma,$$

essendo ν_e la normale esterna e $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ $\pi/2$
☐ $-\pi/2$
☐ π
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli la misura $\mu_2(A)$ dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 2,\ x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{2}\,x\}$.

☐ $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$
☐ $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$
☐ $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \log(1 + y)dx + \frac{x}{1 + y}dy,\ x \in \mathbb{R},\ y > -1.$$

Calcolare $\int_\Gamma \omega$, dove Γ è la poligonale $\overrightarrow{ABC}$ (orientata da A a C) di estremi $A = (1, 1)$, $B = (3, 3)$ e $C = (3, 4)$.

☐ $\log(5/2)$
☐ $\log(5^3/2)$
☐ $\log 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x - y + 2z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}), \sqrt{2} + 2\sqrt{3}]$
☐ $[-1, \sqrt{2} + 2\sqrt{3}]$
☐ $(-1, 1]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{Y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

☐ $\alpha = 1,\ \beta = 2$
☐ $\alpha \geq 1$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$
☐ $\alpha = 0,\ \beta = 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x/\sqrt{n})^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Anticipo Sessione Estiva 1998/99-II Appello: 2 Febbraio 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 + y + z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-2, 9/4]$
☐ $[-1, 9/4)$
☐ $[-1, 9/4]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x\to+\infty} \frac{Y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R}^3$.

☐ $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$
☐ ($\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$) **oppure** ($\alpha > 0$ e $\beta = 1$)
☐ ($\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$) **oppure** ($\alpha = 1$ e $\beta > 0$)
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli il volume $\mu_3(A)$ dell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$.

☐ $\pi/4$
☐ $\pi/8$
☐ π
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia D il dominio definito da $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$ e sia $E(x, y, z)$ il campo vettoriale definito da $E(x, y, z) = (xy, y^2, z)$. Calcolare

$$\iint_{\partial D} \langle E, \nu_e \rangle d\sigma,$$

essendo ν_e la normale esterna e $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ π
☐ 2π
☐ 4π
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{(x^4 + 3y^4)^\alpha}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0),\ \ f(0, 0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha < 1/4$
☐ $\alpha < 1,\ \alpha \neq 1/4$
☐ $\alpha \leq 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ come nell'esercizio **(6)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione è sommabile sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

☐ $\alpha \geq 1$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la funzione $z = f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di f intorno all'asse z. Calcolare $A(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma$.

☐ $(3 + \sqrt{2})\pi$
☐ $(5 + 4\sqrt{2})\pi$
☐ $\pi/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Anticipo Sessione Estiva 1998/99-II Appello: 2 Febbraio 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(x^2+3y^2)}{(x^4+y^4)^\alpha}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0)=0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha \leq 0$
☐ $\alpha < 1/4$
☐ $\alpha < 1$, $\alpha \neq 1/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ come nell'esercizio **(1)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione è sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \geq 1\}$.

☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 2$
☐ $\alpha \geq 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia D il dominio definito da $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ |z| \leq 2\}$ e sia $E(x,y,z)$ il campo vettoriale definito da $E(x,y,z) = (x, y^2, yz)$. Calcolare

$$\int\!\!\int_{\partial D} \langle E, \nu_e \rangle d\sigma,$$

essendo ν_e la normale esterna e $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ 4π
☐ 2π
☐ π
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli il volume $\mu_3(A)$ dell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 1 - (x^2 + y^2),\ x \ge 0\}$.

☐ π
☐ $\pi/8$
☐ $\pi/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia data la funzione $z = f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \in [0, 2] \\ 1, & x \in [2, 3] \end{cases}$. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di f intorno all'asse z. Calcolare $A(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma$.

☐ $\pi/2$
☐ $(3 + \sqrt{2})\pi$
☐ $(5 + 4\sqrt{2})\pi$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 1\}$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y + z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-1, 9/4)$
☐ $[-2, 9/4]$
☐ $[-1, 9/4]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{Y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R}^3$.

☐ ($\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$) **oppure** ($\alpha > 0$ e $\beta = 1$)
☐ ($\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$) **oppure** ($\alpha = 1$ e $\beta > 0$)
☐ $\alpha > 0,\ \beta \ge 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} x^\alpha e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.

Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ $\alpha > 1$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

Sessione Estiva 1998/99-I Appello: 22 Maggio 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (e^{(x/n)} + e^{(n/x)})/n^2$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ per i quali converge **uniformemente** la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $x > 0$
☐ $x < 0$
☐ $x \neq 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - (x^2+y^2)\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z - \frac{2}{3})^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $(-\infty, 2]$
☐ $[0, 19/36]$
☐ $[0, 4/9]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a \geq 0,\ b, c \in \mathbb{R}$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = 1,\ b = c = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli il volume $\mu_3(A)$ dell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1+x^2+y^2}\}$.

- ☐ $\frac{2\pi}{3}(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$
- ☐ $\pi/8$
- ☐ $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $f\colon \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z > -1/4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = xy/\sqrt{1+4z}$, e sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2+y^2,\ z \le x+y\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma f\,d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

- ☐ $-\pi$
- ☐ $\pi/8$
- ☐ $-\pi/8$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)^{2\alpha}}{\arctan(2x^2+y^2)},\ \text{se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \ge 0$ per i quali f risulta differenziabile.

- ☐ $\alpha > 1$
- ☐ $\alpha > 1/2$
- ☐ $\alpha > 3/4$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{1+x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$, sia $\alpha \ge 0$, e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus$ asse $z \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = f(x,y) = \log\left(1 + \frac{1}{(2x^2+y^2)^\alpha}\right)$. Determinare tutti gli $\alpha \ge 0$ per i quali la funzione è sommabile su A.

- ☐ $\alpha > 3/2$
- ☐ $\alpha > 3$
- ☐ $\alpha > 1$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{2x-1}{x^2+y^2}dx + e^{y-x}dy$ definita sul suo dominio naturale. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la poligonale chiusa orientata $\overrightarrow{ABCA}$, di vertici $A = (-1,-2)$, $B = (2,1)$ e $C = (-1,1)$.

- ☐ $4e^{-1} - e^2 + \arctan 2 + \log(2/5) + \pi/4$
- ☐ $3e^2 + \pi/4 + \arctan 2$
- ☐ $2e^{-1} + e^{-4} + \arctan 2 + \log(2/5) + \pi/4$
- ☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Sessione Estiva 1998/99-I Appello: 22 Maggio 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)^{2\alpha}}{\Big(\arctan(x^2 + 2y^2)\Big)^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha > 5/4$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 3/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{1 + x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4(x^2 + y^2)}\}$, sia $\alpha \geq 0$, e sia $f: \mathbb{R}^3 \setminus$ asse $z \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = f(x,y) = \sqrt{\arctan \frac{1}{(x^2+2y^2)^\alpha}}$. Determinare tutti gli $\alpha \geq 0$ per i quali la funzione è sommabile su A.

☐ $\alpha > 3/2$
☐ $\alpha > 3$
☐ $\alpha > 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z > -1/4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = xy/\sqrt{1 + 4z}$, e sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2,\ z \leq x - y\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma f d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

☐ $-\pi$
☐ $\pi/8$
☐ $-\pi/8$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Si calcoli il volume $\mu_3(A)$ dell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{4(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{1+x^2+y^2}\}$.

☐ $\frac{2\pi}{3}(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$
☐ $\pi/8$
☐ $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia data la forma differenziale $\omega(x, y) = \dfrac{2x-1}{x^2+y^2}dx + e^{x-y-2}dy$ definita sul suo dominio naturale. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la poligonale chiusa orientata $\overrightarrow{ABC}A$, di vertici $A = (-1, -2)$, $B = (2, 1)$ e $C = (-1, 1)$.

☐ $4e^{-1} - e^2 + \arctan 2 + \log(2/5) + \pi/4$
☐ $3e^2 + \pi/4 + \log(2/5)$
☐ $2e^{-1} + e^{-4} + \arctan 2 + \log(2/5) + \pi/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 1 - (x^2 + y^2)\}$ e sia $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{3})^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $(-\infty, 2]$
☐ $[0, 19/36]$
☐ $[0, 4/9]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a \ge 0$, $b, c \in \mathbb{R}$
☐ $a = 1$, $b = c = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (e^{(x/n)} + e^{(n/x)})/n^2$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$. Determinare l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per i quali converge **uniformemente** la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $x < 0$
☐ $x \neq 0$
☐ $x > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

Sessione Estiva 1998/99-II Appello: 18 Giugno 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(e^{nx})/n^x$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $x \geq 0$. Usando il fatto che $\arctan t \longrightarrow \pi/2$ per $t \to +\infty$, determinare tutti i sottoinsiemi di $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$ sui quali converge **uniformemente** la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $x \in [0, +\infty)$
☐ $x \in (1, +\infty)$
☐ $x \in [1 + \delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = 2x + y + z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $(-\infty, +\infty]$
☐ $[-1/4, 2 + \sqrt{2}]$
☐ $[-1/6, 3 + \sqrt{2}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-3x} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = 1,\ b = c$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,+\infty),\ x \le y \le 3x\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_A xe^{-xy}dxdy$.

☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$
☐ $\pi/2$
☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = z|x|$, e sia Σ la superficie $\varphi\colon (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \theta)$, $(\rho,\theta) \in [1,2] \times [0,2\pi]$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_\Sigma f d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

☐ $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$
☐ $\frac{4}{5}\pi(\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$
☐ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(\sqrt{5} - 1)$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + y^4}{\arctan(x^2 + 2y^2)}, \text{ se } (x,y) \ne (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha \ge 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $A = [-1,1] \times [-1,1]$, sia $\alpha > 0$, e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da $f(x,y) = 1/(y-x)^{2\alpha}$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali la funzione è sommabile su A.

☐ $0 < \alpha < 3/2$
☐ $0 < \alpha < 1/2$
☐ $0 < \alpha < 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ |z| \le 1\}$, orientata secondo il versore normale $\nu(x,y,z)$ tale che $\nu(1,0,0) = (1,0,0)$. Sia $E(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Calcolare $\displaystyle\int\!\!\int_\Sigma \langle \nabla \times E, \nu \rangle d\sigma$.

☐ 0
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

Sessione Estiva 1998/99-II Appello: 18 Giugno 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^4 + |y|^\alpha}{\arctan(2x^2 + y^2)}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha \geq 2$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = [-1,1] \times [-1,1]$, sia $\alpha > 0$, e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da $f(x,y) = 1/(y+x)^{2\alpha}$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali la funzione è sommabile su A.

☐ $0 < \alpha < 1/2$
☐ $0 < \alpha < 3/2$
☐ $0 < \alpha < 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = z|x|$, e sia Σ la superficie $\varphi: (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \theta)$, $(\rho,\theta) \in [1,2] \times [0, 2\pi]$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma f\, d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

☐ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$
☐ $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$
☐ $\frac{4}{5}\pi(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,+\infty),\ x \le y \le 5x\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\int_A xe^{-xy}dxdy$.

☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$
☐ $\pi/2$
☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \le 0,\ |z| \le 1\}$, orientata secondo il versore normale $\nu(x,y,z)$ tale che $\nu(-1,0,0) = (1,0,0)$. Sia $E(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Calcolare $\displaystyle\int\int_\Sigma \langle \nabla \times E, \nu \rangle d\sigma$.

☐ $1/2$
☐ $-1/2$
☐ 0
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2+z^2 \le x \le 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = 3x+y+z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-1/4, 2+\sqrt{2}]$
☐ $[-1/6, 3+\sqrt{2}]$
☐ $(-\infty, +\infty]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a,b,c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-3x} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = 1,\ b = c$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(e^{nx})/n^x$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$, $x \ge 0$. Usando il fatto che $\arctan t \longrightarrow \pi/2$ per $t \to +\infty$, determinare tutti i sottoinsiemi di $\{x \in \mathbb{R};\ x \ge 0\}$ sui quali converge **uniformemente** la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $x \in [1+\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$
☐ $x \in (1, +\infty)$
☐ $x \in [0, +\infty)$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

II Sessione 1998/99-I Appello: 9 Settembre 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n/n^x$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sui quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
Suggerimento: si determini dapprima l'insieme sul quale la serie converge puntualmente.

- ☐ $x \in \mathbb{R}$
- ☐ $x \in (-1,1)$
- ☐ $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta \in (0,1]$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 1/2\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x+2y+z$. Calcolare $f(A)$.

- ☐ $((1-\sqrt{15})/2, 1]$
- ☐ $[(1-\sqrt{15})/2, (1+\sqrt{15})/2]$
- ☐ $[(7-\sqrt{15})/2, (7+\sqrt{15})/2]$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a,b,c \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x\to+\infty} e^{-5x}Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- ☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
- ☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
- ☐ $a = 1,\ b = c$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,+\infty),\ x \le y \le \sqrt{5}\,x^3 + 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_A e^{-x} dxdy$.

☐ $6\sqrt{5}$
☐ $6\sqrt{7}$
☐ $6\sqrt{3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia Σ la superficie $\varphi\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le u^2 + v^2 \le 3\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$. Si calcoli l'area di Σ.

☐ $4\sqrt{2}\pi$
☐ $2\sqrt{2}\pi$
☐ $3\sqrt{2}\pi$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(|x|^\alpha + y^4)}{\sqrt{2x^2+y^2}},\ \text{se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = z$. Si calcoli $\displaystyle\int_A f dxdydz$.

☐ $\pi/8$
☐ $\pi/16$
☐ $\pi/32$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\omega(x,y,z)$ la forma differenziale definita, per $y > 0$, da

$$\omega(x,y,z) = \frac{x}{y}dx - \frac{1}{2}\frac{x^2+z^2}{y^2}dy + \frac{z}{y}dz.$$

Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la poligonale orientata $\overrightarrow{(0,1,0)(1,1,0)(0,2,1)(0,2,0)(0,1,0)}$.

☐ π
☐ $1/2$
☐ $-1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

II Sessione 1998/99-I Appello: 9 Settembre 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(|y|^\alpha + x^4)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha > 2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq y^2,\ y \geq 0,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ e sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = 2y$. Si calcoli $\displaystyle\int_A f dxdydz$.

☐ $\pi/8$
☐ $\pi/16$
☐ $\pi/32$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia Σ la superficie $\varphi: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$. Si calcoli l'area di Σ.

☐ $4\sqrt{2}\pi$
☐ $2\sqrt{2}\pi$
☐ $3\sqrt{2}\pi$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in[0,+\infty),\ x\le y\le\sqrt{7}\,x^3+1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A e^{-x}dxdy$.

☐ $6\sqrt{5}$
☐ $6\sqrt{7}$
☐ $6\sqrt{3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\omega(x,y,z)$ la forma differenziale definita, per $z>0$, da

$$\omega(x,y,z)=\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{z^2}dz.$$

Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma\omega$, dove γ è la poligonale orientata $\overrightarrow{(0,0,1)(1,0,1)(0,1,2)(0,0,2)(0,0,1)}$.

☐ π
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 1/2\}$ e sia $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z)=2x+y+z+3$. Calcolare $f(A)$.

☐ $((1-\sqrt{15})/2,1]$
☐ $[(1-\sqrt{15})/2,(1+\sqrt{15})/2]$
☐ $[(7-\sqrt{15})/2,(7+\sqrt{15})/2]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R}\ni x\longmapsto Y(x)\in\mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x)=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-2&4&1\\-2&2&3\end{bmatrix}Y(x),\quad Y(0)=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a,b,c\in\mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-5x}Y(x)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

☐ $a=1,\ b=c$
☐ $a=b\in\mathbb{R}$ e $c=0$
☐ $a=b\in\mathbb{R}$ e $c\in\mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n/n^x$, $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$. Determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sui quali converge **totalmente** la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$.
Suggerimento: si determini dapprima l'insieme sul quale la serie converge puntualmente.

☐ $x\in\mathbb{R}$
☐ $x\in[-1+\delta,1-\delta]$ per ogni $\delta\in(0,1]$
☐ $x\in(-1,1)$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

II Sessione 1998/99-II Appello: 2 Ottobre 1999 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan\Big(1/(1+n^2x^2)\Big)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sui quali essa converge **uniformemente**.

☐ $x \in \mathbb{R}$
☐ $|x| \leq 1 + \delta$, per ogni $\delta > 0$
☐ $|x| \geq \delta$, per ogni $\delta > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^4 + y^4 + z^4 \leq 9\}$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[0, 3\sqrt{2}]$
☐ $[0, 5\sqrt{2}]$
☐ $[3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} Y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = b = 1,\ c = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_A (x^2 + y^2) dx dy$.

☐ 2/3
☐ 8/3
☐ 16/3
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $E: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $E(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{1 + |x|^2}(x_1, x_2, x_3)$, dove $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Si calcoli il

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1 + 3r^2}{r^3} \int\!\!\int\!\!\int_{|x| \le r} \operatorname{div} E(x) dx_1 dx_2 dx_3$$

☐ $4\pi/3$
☐ 12π
☐ 20π
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\arctan(|x|^\alpha + y^8)}{\arctan \sqrt{2x^2 + y^2}}, \text{ se } (x, y) \ne (0, 0),\ f(0, 0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha \ge 2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ 0 < x^2 + y^2 \le z\}$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determinino tutti gli α per i quali risulta convergente l'integrale

$$\int\!\!\int\!\!\int_A \frac{z}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy dz$$

☐ $\alpha < 1$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha < 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia ω la forma differenziale definita, sul suo dominio naturale, da

$$\omega(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy + z dz.$$

Sia γ la poligonale orientata $\overrightarrow{(1, 0, 0)(0, 1, \pi/2)(-1, 0, \pi)}$. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

☐ 0
☐ $\pi^2/2$
☐ $\pi/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

II Sessione 1998/99-II Appello: 2 Ottobre 1999 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella. **Indicare** il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(|y|^\alpha + x^8)}{\arctan\sqrt{2x^2+y^2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile.

☐ $\alpha \geq 2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, 0 < x^2+y^2 \leq z\}$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determinino tutti gli α per i quali risulta convergente l'integrale

$$\iiint_A \frac{z}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdydz$$

☐ $\alpha < 1/2$
☐ $\alpha < 1$
☐ $\alpha < 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia ω la forma differenziale definita, sul suo dominio naturale, da

$$\omega(x,y,z) = xdx + \frac{y}{y^2+z^2}dy + \frac{z}{y^2+z^2}dz.$$

Sia γ la poligonale orientata $\overrightarrow{(0,0,1)(\pi/2,1,0)(\pi,0,-1)}$. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

☐ $\pi/2$
☐ 0
☐ $\pi^2/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A (x^2 + y^2)dxdy$.

☐ $16/3$
☐ $2/3$
☐ $8/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $E\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $E(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{1 + |x|^2}(x_1, x_2, x_3)$, dove $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Si calcoli il

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1 + 5r^2}{r^3} \iiint_{|x|\leq r} \operatorname{div} E(x)dx_1dx_2dx_3$$

☐ $4\pi/3$
☐ 12π
☐ 20π
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^4 + y^4 + z^4 \leq 25\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[0, 3\sqrt{2}]$
☐ $[0, 5\sqrt{2}]$
☐ $[3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ $a = b = 1$, $c = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan\Big(1/(1+n^2x^2)\Big)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sui quali essa converge **uniformemente**.

☐ $|x| \leq 1 + \delta$, per ogni $\delta > 0$
☐ $|x| \geq \delta$, per ogni $\delta > 0$
☐ $x \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

(Alberto PARMEGGIANI)

III Sessione 1998/99-I Appello: 11 Gennaio 2000 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha} \log\left(\dfrac{2+n^2x^2}{1+n^2x^2}\right)$, con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge **totalmente** su $\mathbb{R}$ la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha \geq 2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-1,2]$
☐ $[-1,8]$
☐ $[-4,8]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a,b,c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ $a = 1$, $b = c$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1, |x| \leq |y|\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\int_A (x^2-y^2)dxdy$.

☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ $1/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia data la funzione $z = f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in [1,2] \end{cases}$. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse z. Calcolare l'area di Σ.

☐ $\pi(5\sqrt{5}+47)/6$
☐ $\pi(\sqrt{5}+1)/6$
☐ $\pi(5\sqrt{5}+17)/6$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(x^4)+\arctan(y^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

☐ $\alpha < 1$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha < 4$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ come nel punto **(6)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f risulta sommabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

☐ $\alpha < 1$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha < 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$, orientata secondo il versore normale esterno ν_e (cioè $\nu_e(0,0,-1) = (0,0-1)$). Sia dato il campo $E(x,y,z) = (x,y,xyz)$. Si calcoli $\displaystyle\int\int_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ 0
☐ $\pi/2$
☐ $-\pi/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

III Sessione 1998/99-I Appello: 11 Gennaio 2000 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan(x^2) + \arctan(y^4)}{(x^2+y^2)^\alpha}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

☐ $\alpha < 4$
☐ $\alpha < 1$
☐ $\alpha < 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia f come nel punto **(1)**. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f risulta sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\; x^2+y^2 \leq 1\}$.

☐ $\alpha < 4$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha < 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia data la funzione $z = f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, \; x \in [0,1] \\ 4, \; x \in [1,3] \end{cases}$. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse z. Calcolare l'area di Σ.

☐ $\pi(5\sqrt{5}+47)/6$
☐ $\pi(5\sqrt{5}+17)/6$
☐ $\pi(\sqrt{5}+1)/6$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$, orientata secondo il versore normale esterno ν_e (cioè $\nu_e(0,0,-1) = (0,0-1)$). Sia dato il campo $E(x,y,z) = (x,y,xyz)$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ $\pi/2$
☐ $-\pi/2$
☐ 0
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1, |x| \leq |y|\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_A (y^2 - x^2)dxdy$.

☐ $1/2$
☐ $-1/2$
☐ $1/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 8, x^2+y^2 \leq 4\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-4, 8]$
☐ $[-1, 8]$
☐ $[-1, 2]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $a,b,c \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $a = 1,\ b = c$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$
☐ $a = b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^{2\alpha}} \log\left(\dfrac{2+nx^2}{1+nx^2}\right)$, con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge **totalmente** su $\mathbb{R}$ la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha \geq 2$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica

III Sessione 1998/99-II Appello: 3 Febbraio 2000 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.
INDICARE il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia data la successione di funzioni $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x + 2 + \dfrac{1}{n})^n (x+2)^n$, con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ sui quali la successione di funzioni converge **uniformemente**. *Suggerimento*: si determini dapprima il limite puntuale e poi si usi il criterio del rapporto per successioni a termini positivi.

☐ $(-3, 3)$
☐ $[-3, -2 + \delta)$ per ogni $\delta \in [0, 1)$
☐ $x \in [-2 - \delta, -2 + \delta]$ per ogni $\delta \in [0, 1)$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y + z \geq 0\}$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = 3x + y - z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-3\sqrt{2}, \sqrt{21}]$
☐ $[-2\sqrt{2}, \sqrt{11}]$
☐ $[-2\sqrt{2}, \sqrt{21}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha e^{\beta x}} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $(\beta > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R})$ **oppure** $(\beta = 0$ e $\alpha > 1)$
☐ $\beta = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
☐ $(\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0)$ **oppure** $(\alpha = 0$ e $\beta > 1)$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq x^3, x^2+y^2 \leq 2\}$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_A |y| dxdy$. [Suggerimento: $1^3 + 1^2 = 2$.]

☐ $(16\sqrt{2} - 17)/12$
☐ $(16\sqrt{2} - 15)/12$
☐ $(4\sqrt{2} - 5)/12$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia Σ la superficie $\varphi\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ \max\{|u|,|v|\} \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u, v, u^2+v)$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_\Sigma |x| d\sigma$, dove $d\sigma$ è l'elemento d'area di Σ.

☐ $4\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)/3$
☐ $\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)/3$
☐ $2\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^{2\alpha}\sqrt{x^4+y^2}}{\arctan(x^2+y^2)},\ \text{se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

☐ $\alpha > 1/2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\alpha > 0$ e sia f come nel punto **(6)**. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 101, z \geq 0\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0\}$, orientata secondo il versore normale esterno ν_e. Sia dato il campo $E(x,y,z) = (z,x,y)$. Si calcoli $\displaystyle\int\!\!\int_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ 101π
☐ 0
☐ 100π
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ANALISI MATEMATICA 2
Ing. [Elettn, Gestio, Informa, Teleco](P/Z), Chimica
(Alberto PARMEGGIANI)

III Sessione 1998/99-II Appello: 3 Febbraio 2000 (2)

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Ammissione** con punteggio ≥ 7. Barrare **una sola** casella.
INDICARE il punteggio ottenuto nel precedente scritto (se sostenuto).

(1). Sia $\alpha > 0$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|y|^{2\alpha}\sqrt{x^4+y^2}}{\arctan(x^2+y^2)}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
☐ $\alpha > 2$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $\alpha > 0$ e sia f come nel punto **(1)**. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta sommabile sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.
☐ $\alpha > 2$
☐ $\alpha > 1/2$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia Σ la superficie $\varphi\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ \max\{|u|,|v|\} \leq 1, v \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (u,v,v^2+u)$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma y\,d\sigma$, dove $d\sigma$ è l'elemento d'area di Σ.
☐ $\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)/3$
☐ $2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)/3$
☐ $4\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 101, z \geq 0\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0\}$, orientata secondo il versore normale esterno ν_e. Sia dato il campo $E(x,y,z) = (z,x,y)$. Si calcoli $\displaystyle\iint_S \langle \nabla \times E, \nu_e \rangle d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S.

☐ 100π
☐ 101π
☐ 0
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y^3, x^2+y^2 \leq 2, x \geq 0\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A 2|x|dxdy$. [Suggerimento: $1^3+1^2=2$.]

☐ $(16\sqrt{2}-15)/12$
☐ $(4\sqrt{2}-5)/12$
☐ $(16\sqrt{2}-17)/12$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x+y+z \geq 0\}$ e sia $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = 4x+y-2z$. Calcolare $f(A)$.

☐ $[-2\sqrt{2}, \sqrt{11}]$
☐ $[-3\sqrt{2}, \sqrt{11}]$
☐ $[-2\sqrt{2}, \sqrt{21}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto Y(x) \in \mathbb{R}^3$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} Y(x), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha e^{\beta x}} Y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ $(\alpha > 1$ e $\beta = 5)$ **oppure** $(\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R})$
☐ $(\beta > 5$ e $\alpha \in \mathbb{R})$ **oppure** $(\beta = 5$ e $\alpha > 1)$
☐ $\alpha > 0$ e $\beta > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia data la successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+3+\frac{1}{n})^n(x+3)^n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Determinare tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ sui quali la successione converge **uniformemente**. *Suggerimento*: si determini dapprima il limite puntuale e poi si usi il criterio del rapporto per successioni a termini positivi.

☐ $[-4, -3+\delta)$ per ogni $\delta \in [0,1)$
☐ $[-3-\delta, -3+\delta]$ per ogni $\delta \in [0,1)$
☐ $x \in (-4,4)$
☐ Nessuno dei precedenti