# I PROVA SCRITTA DI
# ANALISI MATEMATICA A
## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)
(Alberto PARMEGGIANI)

**A.A. 1999/2000: 22 Ottobre 1999** (1)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**.

**(1).** Dette $z_1, z_2$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$3z - z^2 = |z|^2 - 2,$$

calcolare $z_1 + z_2$

☐ $-1/4$
☐ $3/2$
☐ $3 - 2i$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Determinare, se esistono, gli asintoti della funzione $f\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$ definita sul suo **dominio naturale**

☐ La funzione non ha asintoto alcuno
☐ La retta di equazione $x = -1$ e non c'è asintoto all'infinito
☐ La retta di equazione $x = -1$ e $y = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $f\colon x \longmapsto f(x) = e^{2x} \sin x$. Si determinino $\alpha$ e $\beta$ in $\mathbb{R}$ in modo tale che

$$\alpha f''(x) + f'(x) + \beta f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

☐ $\alpha = -2/5$, $\beta = 1/10$
☐ $\alpha = -4$, $\beta = -5$
☐ $\alpha = -1/4$, $\beta = -5/4$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Dette $z_0, z_1, z_2$, le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z+i}{1-i}\right)^3 = 8i,$$

determinare $2\Big(\mathrm{Im}(z_0+z_1+z_2)\Big)^2$

☐ $9/2$
☐ $0$
☐ $18$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $f\colon x \longmapsto y = \sqrt[3]{e^{(2x+1)/(x+3)}}$ definita sul suo dominio naturale, e sia $g\colon y \longmapsto g(y)$ la sua inversa. Allora:

☐ $g$ non è mai definita
☐ $g$ ha un asintoto verticale $y = e^{2/3}$ ed uno orizzontale $x = -3$ a $+\infty$
☐ $g$ è definita per $y > 0$ e $y \neq e^{2/3}$, ed è infinitesima per $y \to +\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $A = \{\dfrac{x+1}{x+2};\ x \in (0,2]\}$. Si determinino $\sup A$ ed $\inf A$.

☐ $\sup A = 3/4$ e $\inf A = 1/2$
☐ $\sup A = 3/5$ e $\inf A = 1/2$
☐ $\sup A = 3/5$ e $\inf A = 1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

# I PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 22 Ottobre 1999** (2)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**.

**(1).** Dette $z_0, z_1, z_2$, le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^3 = -8i,$$

determinare $\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Im}(z_0+z_1+z_2)\Big)^2$

☐ $-9/2$
☐ $9/2$
☐ $18$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia $A = \{\frac{x+1}{x+3};\ x \in (0,2]\}$. Si determinino $\sup A$ ed $\inf A$.

☐ $\sup A = 3/4$ e $\inf A = 1/2$
☐ $\sup A = 3/5$ e $\inf A = 1/2$
☐ $\sup A = 3/5$ e $\inf A = 1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $f\colon x \longmapsto y = \sqrt[3]{e^{(x+2)/(x+3)}}$ definita sul suo dominio naturale, e sia $g\colon y \longmapsto g(y)$ la sua inversa. Allora:

☐ $g$ è definita per $y > 0$ e $y \neq e^{1/3}$, ed è infinita per $y \to +\infty$
☐ $g$ non è mai definita
☐ $g$ ha un asintoto verticale $y = e^{1/3}$ ed uno orizzontale $x = -3$ a $+\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Dette $z_1, z_2$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$3z - 2z^2 = 2|z|^2 - 1,$$

calcolare $z_1 z_2$

☐ $-1/4$
☐ $3/2$
☐ $3 - 2i$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $f\colon x \longmapsto f(x) = e^{2x} \sin x$. Si determinino $\alpha$ e $\beta$ in $\mathbb{R}$ in modo tale che

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

☐ $\alpha = -4/5$, $\beta = 1/10$
☐ $\alpha = -4$, $\beta = 5$
☐ $\alpha = -5/4$, $\beta = -1/4$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Determinare, se esistono, gli asintoti della funzione $f\colon x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x+1}}$ definita sul suo **dominio naturale**

☐ La retta di equazione $x = -1$ e non c'è asintoto all'infinito
☐ Le rette di equazioni $x = -1$ e $y = 0$
☐ La funzione non ha asintoto alcuno
☐ Nessuno dei precedenti

# II PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 19 Novembre 1999** (1)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**.

**(1).** Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cosh(x\sqrt{2})}{(x - \sin x)\tan x}$$

☐ $+\infty$
☐ 2
☐ 1/2
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Determinare tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $\dfrac{2x}{4x^2-3} = \lambda$, $x \neq \pm\sqrt{3}/2$ ha esattamente 2 soluzioni reali distinte

☐ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
☐ Soltanto $\lambda = 0$
☐ $\lambda \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha$ per i quali

$$\max_{x\in[0,+\infty)} (xe^{-\alpha x}) = \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x} dx$$

☐ $\alpha = e^2$
☐ $\alpha = 1/e$
☐ $\alpha = e$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Determinare l'ordine di infinito della funzione

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{t^2+\sqrt{t}+1}{t+1}dt, \quad \text{per } x \to +\infty$$

☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Calcolare

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+2)}dx$$

☐ $\frac{1}{2}+\log 3$
☐ $\frac{\log 2}{4}$
☐ $2\log 2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Determinare il codominio della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^4}dt, \;\; x \geq 0$$

☐ $[0,+\infty)$
☐ $[0,\pi]$
☐ $(0,+\infty)$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = x^\alpha \sin x \;\; \text{se} \;\; 0 < x \leq 1, f(0) = 0, \;\; f(x) = |x|^\beta \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{se} \quad -1 \leq x < 0,$$

risulta continua in $[-1,1]$
☐ $\alpha \geq -1$ e $\beta > 0$
☐ $\alpha > -2$ e $\beta \geq 0$
☐ $\alpha > -1$ e $\beta > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{|x^3-27|^\alpha}dx$$

☐ $\alpha \in (-1/3, 1)$
☐ $\alpha \in (-1, 1)$
☐ $\alpha \in (-1/3, 1/3)$
☐ Nessuno dei precedenti

Alcuni sviluppi utili per $y \to 0$ : $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$, $\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$, $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$.

# II PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 19 Novembre 1999** (2)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**.

**(1).** Calcolare

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)x^2}dx$$

☐ $\frac{1}{2} + \log 3 - 2\log 2$
☐ $\frac{1}{2} + \log 3$
☐ $\frac{\log 2}{4}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Determinare l'ordine di infinito della funzione

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{t^4 + t\sqrt{t} + 1}{t^2 + 1}dt, \quad \text{per } x \to +\infty$$

☐ 3
☐ 2
☐ 1
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^2) - \log(1 + x^2)}{(e^{x^2} - 1)\arctan(x^2)}$$

☐ 2
☐ 1/2
☐ $+\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha$ per i quali

$$\max_{x\in[0,+\infty)}(xe^{-\alpha x}) = \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx$$

☐ $1/e$
☐ $e^2$
☐ $e$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = x^\alpha \log(1+x^2) \ \text{ se } \ 0 < x \leq 1, f(0) = 0, \ f(x) = |x|^\beta \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \ \text{ se } \ -1 \leq x < 0,$$

risulta continua in $[-1, 1]$
☐ $\alpha > -1$ e $\beta > 0$
☐ $\alpha > -2$ e $\beta > 0$
☐ $\alpha > -1$ e $\beta \geq 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x^4})}{|x^3-8|^\alpha}dx$$

☐ $1 > \alpha > -1/3$
☐ $|\alpha| < 1/3$
☐ $|\alpha| < 1$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Determinare tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $\dfrac{2x^2-1}{x} = \lambda$, $x \neq 0$, ha esattamente 2 soluzioni reali distinte
☐ $\lambda \in \mathbb{R}$
☐ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
☐ Soltanto $\lambda = 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Determinare il codominio della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{1+t^2}dt, \ x \geq 0$$

☐ $[0, 2\pi]$
☐ $[0, +\infty)$
☐ $(0, +\infty)$
☐ Nessuno dei precedenti

Alcuni sviluppi utili per $y \to 0$ : $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$, $\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$, $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$.

# III PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 8 Gennaio 2000** (1)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**.

**(1).** Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{1+y^2}{2x^2 y}, \quad y(1) = 1.$$

Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

☐ $+\infty$
☐ $\sqrt{2e-1}$
☐ $5e-1$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ se $x \leq 0$, $f(x) = e^x - 1$ se $x > 0$. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+2}\right)\Big(f(x)\Big)^n$.

☐ $x \in \mathbb{R}$
☐ $x \in (-1, \log 2)$
☐ $x \in [-1, e-1)$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + y^2}{\Big(\arctan(x^2+y^2)\Big)^{1/4}}, \ (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0,$$

risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

☐ $\alpha > 3/4$
☐ $\alpha \geq 3/2$
☐ $\alpha > 3/2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^3 + 2yx + y^2$. Allora:

☐ La funzione non ha punti critici
☐ La funzione ha due punti critici, dei quali uno è di minimo locale
☐ La funzione ha due punti critici, nessuno dei quali è di massimo o di minimo locale
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} \in \mathbb{R}$.

☐ ($\beta \geq 0$ e $\alpha = 3$) **oppure** ($\alpha > 3$ e $\beta \in \mathbb{R}$)
☐ ($\beta = 5$ e $\alpha \geq 0$) **oppure** ($\beta > 5$ e $\alpha \in \mathbb{R}$)
☐ ($\beta = 3$ e $\alpha \geq 0$) **oppure** ($\beta > 3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$)
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $f_n\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}\frac{x}{1+n^2x^2}$. Si determinino tutti gli $\alpha$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge **totalmente** (cioè converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)|$).

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

E' utile ricordare il seguente metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t} f_d(t)$, dove $f_d(t)$ è un polinomio di grado $d$, si cerca una soluzione particolare $y_p(t)$ della forma $y_p(t) = t^m e^{\mu t} g_d(t)$, dove $g_d(t)$ è un polinomio di grado $d$ da determinarsi, ed $m$ è scelto essere la molteplicità di $\mu$ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.

# III PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 8 Gennaio 2000** (2)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**.

**(1).** Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = e^{5t},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} \in \mathbb{R}$.

☐ $(\beta \geq 0$ e $\alpha = 5)$ **oppure** $(\alpha > 5$ e $\beta \in \mathbb{R})$
☐ $(\beta = 3$ e $\alpha \geq 0)$ **oppure** $(\beta > 3$ e $\alpha \in \mathbb{R})$
☐ $(\beta = 5$ e $\alpha \geq 0)$ **oppure** $(\beta > 5$ e $\alpha \in \mathbb{R})$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = -x^2 + 2x^2y - y$. Allora:

☐ La funzione ha due punti critici, nessuno dei quali è di massimo o di minimo locale
☐ La funzione ha due punti critici, dei quali uno è di massimo locale
☐ La funzione non ha punti critici
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5$ se $x \leq 0$, $f(x) = \log(1 + x)$ se $x > 0$. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{n}{n^2+2}\right)\Big(f(x)\Big)^n$.

☐ $x \in (-1, e - 1)$
☐ $x \in [-1, \log 2)$
☐ $x \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia $f_n\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{1}{n^{2\alpha}} \dfrac{x}{1+nx^2}$. Si determinino tutti gli $\alpha$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge **totalmente** (cioè converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)|$).

☐ $\alpha > 1/4$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $\alpha > 0$. Determinare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 + |y|^{2\alpha}}{\Big(\log\Big(1 + (x^2+y^2)\Big)\Big)^{1/4}}, \ \ (x,y) \neq (0,0), \ \ f(0,0) = 0,$$

risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

☐ $\alpha > 3/2$
☐ $\alpha \geq 3$
☐ $\alpha > 3/4$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{1+y^2}{2y\sqrt{x}}, \quad y(1) = 2.$$

Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

☐ $\sqrt{2e-1}$
☐ $\sqrt{5e-1}$
☐ $+\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

E' utile ricordare il seguente metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t} f_d(t)$, dove $f_d(t)$ è un polinomio di grado $d$, si cerca una soluzione particolare $y_p(t)$ della forma $y_p(t) = t^m e^{\mu t} g_d(t)$, dove $g_d(t)$ è un polinomio di grado $d$ da determinarsi, ed $m$ è scelto essere la molteplicità di $\mu$ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.

# IV PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 10 Febbraio 2000** (1)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**.

**(1).** Sia data la curva $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t, t^2, t)$, e sia dato il campo vettoriale $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x, 1, z^3)$. Si calcoli il lavoro $\displaystyle\int_\psi \langle F, d\vec{s}\rangle$, dove $\psi$ è la curva $\varphi$ percorsa con verso opposto e $d\vec{s} = \dot{\psi}(t)dt$.

☐ $7/4$
☐ $-11/6$
☐ $1$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(1+y^2)dx + \dfrac{xy}{1+y^2}dy$. Detto $f(x,y)$ un potenziale di $\omega$, si consideri la curva equipotenziale determinata da $f(x,y) = f(1,1)$, pensata come equazione nella incognita $y$. Esplicitata la $y$ come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale, tale che $y(1) = 1$, si calcoli $\displaystyle\lim_{x\to\log 2} y(x)$.

☐ $\sqrt{\log 2}$
☐ $e-1$
☐ $\sqrt{e-1}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare tutti gli $\alpha$ per i quali la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{e^{x^4+y^2} - 1}{(x^2+y^2)^\alpha},\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0,$$

risulta sommabile nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

☐ $\alpha > -1$
☐ $\alpha < 2$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geq 0, z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y, z) = x + y + 2z$. Si determini $f(A)$.

☐ $[-\sqrt{2}, 9/4]$
☐ $(-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{15}]$
☐ $[-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{15}]$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Per le coordinate $y_B$, $z_B$ del baricentro della curva $\varphi\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t^3, t, t^2)$, vale (si ricordi che $ds = \|\dot{\varphi}(t)\|dt$)

☐ $7y_B = 5z_B + 4$
☐ $y_B = 0$
☐ $7y_B = 5z_B + 2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A (x + y)dxdy$.

☐ 39/70
☐ 3/10
☐ 39/10
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Sia $R > 0$. Sia $A_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq R^2 - (x^2 + y^2)\}$. Si calcoli il volume $\mu_3(A_R)$ di $A_R$.

☐ $R^4\pi/2$
☐ $R^3\pi/2$
☐ $R^4\pi/8$
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Sia $A_R$ come nell'esercizio **(7)**. Si calcoli il

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2\mu_3(A_R)} \iiint_{A_R} (x^2 + y^2)dxdydz.$$

☐ 4
☐ 4/3
☐ 1/3
☐ Nessuno dei precedenti

# IV PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 10 Febbraio 2000** (2)

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni errata -1. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**.

**(1).** Sia data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{2xy^2}{1+x^2}dx + 2y\log(1+x^2)dy$. Detto $f(x,y)$ un potenziale di $\omega$, si consideri la curva equipotenziale determinata da $f(x,y) = f(1,1)$, pensata come equazione nella incognita $y$. Esplicitata la $y$ come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale, tale che $y(1) = 1$, si calcoli $\lim_{x \to \sqrt{e-1}} y(x)$.

☐ $\sqrt{e-1}$
☐ $e-1$
☐ $\sqrt{\log 2}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-1 \leq z, z \leq 2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = 2x+y+z$. Si determini $f(A)$.

☐ $[-9/4, 2+\sqrt{15}]$
☐ $(-\sqrt{2}, 2+\sqrt{15}]$
☐ $[-\sqrt{2}, 9/4]$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A (x+2y)dxdy$.

☐ 39/70
☐ 39/10
☐ 3/10
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Per la coordinata $x_B$ del baricentro della curva $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{2}{3}t^3, t, t^2)$, vale (si ricordi che $ds = \|\dot{\varphi}(t)\| dt$)

☐ $x_B = 0$
☐ $x_B = 7/30$
☐ $x_B = 11/25$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare tutti gli $\alpha$ per i quali la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{\arctan\left(\dfrac{1}{x^4 + y^2 + 4(x^2+y^2)^2}\right)}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

risulta sommabile nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > -1$
☐ $\alpha < 2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $R > 0$. Sia $A_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 3(x^2+y^2) \leq z \leq R^2 - (x^2+y^2)\}$. Si calcoli il volume $\mu_3(A_R)$ di $A_R$.

☐ $R^4\pi/2$
☐ $R^3\pi/2$
☐ $R^4\pi/8$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Sia $A_R$ come nell'esercizio **(6)**. Si calcoli il

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{15}{R\mu_3(A_R)} \iiint_{A_R} \sqrt{(x^2+y^2)}\,dxdydz.$$

☐ 1/3
☐ 4
☐ 4/3
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Sia data la curva $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t^3, t, t^2)$, e sia dato il campo vettoriale $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x, y^2, 1)$. Si calcoli il lavoro $\displaystyle\int_\psi \langle F, d\vec{s} \rangle$, dove $\psi$ è la curva $\varphi$ percorsa con verso opposto e $d\vec{s} = \dot{\psi}(t)dt$.

☐ $-7/4$
☐ 1
☐ 11/6
☐ Nessuno dei precedenti

# I PROVA SCRITTA DI RECUPERO ANALISI MATEMATICA A

## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)

**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 19 Aprile 2000**

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**. Ammissione con punteggio $\geq 7$. **Durata della prova: 3 ore. ORALE ore 13.**

**(1).** Dette $z_1, z_2$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z+2i}{2+3i}\right)^2 = 4i,$$

determinare $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(z_2 - z_1)^2\right)$.

☐ $-60$
☐ $-96$
☐ $1/2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{x^4} - 1}$$

☐ 4
☐ 0
☐ $2/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{(1+y)y}{(1+2y)}x^3, \quad y(1) = 1.$$

Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)^2 + y(x)}{e^{x^4/4}}$.

☐ $2e^{-1/4}$
☐ $5e^{-1/4}$
☐ $5e^{-1/5}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 - 1 \le z, z \le 1\}$ e sia $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y, z) = x + 2y + z - 1$. Si determini $f(A)$.

☐ $[-(2 + \sqrt{10}), \sqrt{10}]$
☐ $(-21/4, \sqrt{10}]$
☐ $[-13/4, \sqrt{10}]$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Per la coordinata $x_B$ del baricentro della curva $\varphi \colon [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\log t, \log t)$, vale (si ricordi che $ds = \|\dot\varphi(t)\| dt$)

☐ $x_B = 0$
☐ $x_B = \log 2$
☐ $x_B = (\arctan 2 + \pi/4)/2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{|\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}|^\alpha}{n^3}$.

☐ $\alpha > -1$
☐ $\alpha \ge -2/3$
☐ $\alpha > -2/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Sia $\alpha < 1$. Sia $I(\alpha) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha} dxdy$. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1-} (1 - \alpha) I(\alpha)$.

☐ $\pi$
☐ $\pi/2$
☐ $\pi/9$
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Si calcoli il $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{e^{3t}}$.

☐ $+\infty$
☐ $1/2$
☐ $1$
☐ Nessuno dei precedenti

E' utile ricordare il seguente metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t} f_d(t)$, dove $f_d(t)$ è un polinomio di grado $d$, si cerca una soluzione particolare $y_p(t)$ della forma $y_p(t) = t^m e^{\mu t} g_d(t)$, dove $g_d(t)$ è un polinomio di grado $d$ da determinarsi, ed $m$ è scelto essere la molteplicità di $\mu$ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \ne 0$.

# II PROVA SCRITTA DI RECUPERO
# ANALISI MATEMATICA A
## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)
**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 17 Luglio 2000**

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella. SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**. Ammissione con punteggio $\geq 7$. **Durata della prova: 3 ore. ORALE ore 12:30.**

**(1).** Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) - \log(e^x - x)}{x \sinh(x)}$$

☐ $-\infty$
☐ 2
☐ $-1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 - 1 \leq z, z \leq 1\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y, z) = x + 2y + z - 3$. Si determini $f(A)$.
☐ $[-21/4, \sqrt{10} - 2]$
☐ $(-(2 + \sqrt{10}), \sqrt{10}]$
☐ $[-13/4, \sqrt{10}]$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{|e^{1/n^2} - 1|^\alpha}{n^3 + 1}$.
☐ $\alpha \geq -1$
☐ $\alpha \geq -2/3$
☐ $\alpha > 2/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Per la coordinata $x_B$ del baricentro della curva $\varphi\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\arctan t, \arctan t)$, vale (si ricordi che $ds = \|\dot{\varphi}(t)\| dt$)

☐ $x_B = 0$
☐ $x_B = (\arctan 2 + \pi/4)/2$
☐ $x_B = \log 2/2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{(1+y)y}{(1+2y)} x^4, \quad y(1) = 1.$$

Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)^2 + y(x)}{e^{x^5/5}}$.

☐ $2e^{-1/4}$
☐ $2e^{-1/5}$
☐ $5e^{-1/5}$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $\alpha > 1$. Sia $I(\alpha) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \geq 4} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha} dxdy$. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{\alpha \to 3} (\alpha - 1) I(\alpha)$.

☐ 0
☐ $\pi/9$
☐ $\pi/2$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$$

Si calcoli il $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{3t}}$.

☐ $+\infty$
☐ $1/2$
☐ 1
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Dette $z_1, z_2$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z+2i}{2+3i}\right)^2 = 9i,$$

determinare $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{3}(z_2 - z_1)^2\right)$.

☐ $-60$
☐ $1/2$
☐ $-96$
☐ Nessuno dei precedenti

E' utile ricordare il seguente metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t} f_d(t)$, dove $f_d(t)$ è un polinomio di grado $d$, si cerca una soluzione particolare $y_p(t)$ della forma $y_p(t) = t^m e^{\mu t} g_d(t)$, dove $g_d(t)$ è un polinomio di grado $d$ da determinarsi, ed $m$ è scelto essere la molteplicità di $\mu$ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.

# III PROVA SCRITTA DI RECUPERO
# ANALISI MATEMATICA A
## Ing. [Informatica, Telecomunicazioni](L-Z)
**(Alberto PARMEGGIANI)**

**A.A. 1999/2000: 13 Settembre 2000**

**COGNOME e NOME** (Stampatello):

**MATRICOLA:**

**N.B.** Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e CORSO di appartenenza**. Ammissione con punteggio $\geq 7$. **Durata della prova: 3 ore. ORALE ore 12:30.**

**(1).** Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Big(\sin x - x\Big)\log(1+e^x-e^{2x})}{e^{x^2}-1-x^2}$$

☐ $+\infty$
☐ $1/3$
☐ $-1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(2).** Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^8+y^8+z^8=3\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = 8(x+y+z)$. Si determini $f(A)$.

☐ $[-1, 24]$
☐ $[-24, 24]$
☐ $[-8, 8]$
☐ Nessuno dei precedenti

**(3).** Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1+e^{2/n}-e^{1/n}\right)}{n^\alpha}$.

☐ Per nessun $\alpha$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(4).** Sia data la forma differenziale $\omega(x,y) = (2xy^2+1)dx + 2x^2ydy$. Detto $f(x,y)$ un potenziale di $\omega$, si consideri la curva equipotenziale determinata da $f(x,y) = f(1,2)$, pensata come equazione nella incognita $y$. Esplicitata la $y$ come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale, tale che $y(1) = 2$, si calcoli, se esiste, il $\lim\limits_{x\to 2} y(x)$.

☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-3/2$
☐ Il limite non esiste
☐ Nessuno dei precedenti

**(5).** Sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = (1+y)yx, \quad y(1) = 1.$$

Si calcoli il $\lim_{x \to \sqrt{7}} y(x)$.

☐ $e^3$
☐ $2e^3/(2-e^3)$
☐ $5e^3$
☐ Nessuno dei precedenti

**(6).** Sia $\alpha \geq 0$ e sia $A_\alpha = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \right\}$. Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ per i quali $\displaystyle\iiint_{A_\alpha} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz < +\infty$.

☐ $\alpha \geq 0$
☐ $\alpha > 1$
☐ $\alpha > 3/4$
☐ Nessuno dei precedenti

**(7).** Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Si calcoli il $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{te^{3t}}$.

☐ $+\infty$
☐ $1$
☐ $0$
☐ Nessuno dei precedenti

**(8).** Dette $z_1, z_2$ le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left( \frac{z + i\sqrt{2}}{7+8i} \right)^2 = -4i,$$

determinare $(z_1+z_2)^2$.

☐ $-64$
☐ $1/2$
☐ $-8$
☐ Nessuno dei precedenti

- E' utile ricordare il seguente metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t} f_d(t)$, dove $f_d(t)$ è un polinomio di grado $d$, si cerca una soluzione particolare $y_p(t)$ della forma $y_p(t) = t^m e^{\mu t} g_d(t)$, dove $g_d(t)$ è un polinomio di grado $d$ da determinarsi, ed $m$ è scelto essere la molteplicità di $\mu$ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.
- E' inoltre utile ricordare che per $t \to 0$ : $\sin t = t - t^3/3! + o(t^3)$, $\log(1+t) = t + o(t)$.