PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA A

Ing. Informatica (F-Z)

(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2000/2001: 2 Aprile 2001 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

☐ **II PARZIALE: esercizi da 5 a 10 (compresi), durata 2 ore.**

☐ **FINALE: esercizi da 1 a 8 (compresi), durata 3 ore. Ammissione con** ≥ 7

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**.

(1). Determinare $(\mathrm{Im}(z_0 + z_1 + z_2))^2$, essendo z_0, z_1, z_2 le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{2i+1}\right)^3 = -8i.$$

☐ 0
☐ 12
☐ $4\sqrt{3}+1$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\left(e^{x^2\ln x}-1\right)\left(\sinh(x\ln x)-\sin(x\ln x)\right)}{2x\left(e^{x^2}-\cos(x\ln x)\right)^2}$.

☐ $1/3$
☐ $+\infty$
☐ $2/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia y la soluzione del problema di Cauchy $y' = \dfrac{(1+y^2)}{y}x$, $y(1) = -1$. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 2} y(x)$.

☐ $\sqrt{2e^3-1}$
☐ $-\sqrt{2e^3-1}$
☐ $-\sqrt{2e^8-1}$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x+2)/\sqrt{x^2+1}$. Si determinino tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente due soluzioni (cioè la cardinalità dell'insieme $f^{-1}\{\lambda\} = 2$).

☐ $\lambda \in (-\infty, \sqrt{5})$
☐ $\lambda \in (1, \sqrt{10})$
☐ $\lambda \in (1, \sqrt{5})$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2 \le 1/2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = x^2+y+z$. Si determini $f(A)$.

☐ $[(4-2\sqrt{2})/(4\sqrt{2}), \sqrt{2}]$
☐ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
☐ $[-\sqrt{2}, (4+3\sqrt{2})/(4\sqrt{2})]$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 7x^5$ per $x \le 0$ e $f(x) = x^3 e^{-5x}$ per $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)\Big(f(x)\Big)^n$.

☐ $x \ge -1/5^{1/5}$
☐ $x > -1/7^{1/5}$
☐ Ogni $x \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 \le x^2+y^2,\ z \ge 2(x^2+y^2)\}$. Calcolare il volume $\mu_3(A)$.

☐ $\pi/48$
☐ π
☐ $8\pi/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2t}, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Determinare tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{te^{3t}} = 4$.

☐ Ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
☐ $\beta = 3\alpha + 3$
☐ $\beta = 3\alpha + 4$
☐ Nessuno dei precedenti

(9). Sia data la curva $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1, t, t^2)$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma y ds$ (si ricordi che $ds = \|\dot\gamma(t)\| dt$).

☐ $5\sqrt{5}$
☐ $5\sqrt{5} - 1$
☐ $(5\sqrt{5} - 1)/12$
☐ Nessuno dei precedenti

(10). Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali è differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + \sin(y^4)}{\sqrt{x^2+2y^2}}, \ (x,y) \ne (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

☐ Per ogni $\alpha > 0$
☐ $\alpha \ge 2$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

I PROVA SCRITTA DI RECUPERO
ANALISI MATEMATICA A

Ing. Informatica (F-Z)

(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2000/2001: 3 Luglio 2001 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e FIRMARE**. **ORALE immediatamente successivo.**

(1). Dette z_1, z_2 le soluzioni in $\mathbb{C}$ con parte reale < 0 dell'equazione

$$\left(\frac{z+1}{2i+1}\right)^3 = i,$$

determinare $4(z_1 + z_2)^2$.

☐ $-4 + i$
☐ $60 - 32i$
☐ $32 - 60i$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Si calcoli il

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(e^{x^2 \ln x} - 1\right)\left(\cosh(x \ln x) - \cos(x \ln x)\right)}{2x^2 \ln^2 x \left(\arctan(x^4 \ln^2 x) + \sin(x^2 \ln x)\right)}$$

☐ $1/2$
☐ $+\infty$
☐ $1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{(y^2 + 2\sqrt{2}\,y + 2)}{(2y + 2\sqrt{2})} x^2, \quad y(1) = 0.$$

Si calcoli il $\lim\limits_{x \to 4^{1/3}} y(x)$.

☐ 0
☐ $\sqrt{2}(\sqrt{e} - 1)$
☐ $\sqrt{3}(\sqrt{e} - 2)$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le 1/2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = z + x^2 + y^2$. Si determini $f(A)$. [*Suggerimento*: nel considerare la frontiera $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = 1/2\}$ si tenga conto della simmetria x^2+y^2 nella funzione.]

☐ $[-1, 1]$
☐ $[-1, (1+\sqrt{2})/2]$
☐ $[-(3-\sqrt{2})/2, (1+\sqrt{2})/2]$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia determinino tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equation

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lambda, \quad x \neq -2,$$

ha esattamente una soluzione (cioè la cardinalità di $f^{-1}\{\lambda\} = 1$).

☐ $\lambda > 0$
☐ $\lambda \ge 1$
☐ $\lambda < -1$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x^3$ per $x \le 0$ e $f(x) = 3x^2 e^{-3x}$ per $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(e^{1/n^2} - 1)\Big(f(x)\Big)^n$.

☐ $x > -1/3^{1/3}$
☐ $x \ge -2/3$
☐ $x \ge -1/3^{1/3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia $\alpha > 0$. Sia $A_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 \le x^2+y^2,\ z \ge \alpha(x^2+y^2)\}$. Si calcoli il

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{5\alpha}{\mu_3(A_\alpha)} \iiint_{A_\alpha} (x^2+y^2)^{1/2}\,dxdydz.$$

☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = 5e^t, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Si determinino tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{\sqrt{t e^{2t}}} = 0$.

☐ $\beta + 5 = 2\alpha$
☐ $\beta + 2 = 5\alpha$
☐ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

Metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t}$, una soluzione particolare è data da $y_p(t) = \alpha t^m e^{\mu t}$, dove α è una costante da determinarsi, ed m è scelto essere la molteplicità di μ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.

II PROVA SCRITTA DI RECUPERO ANALISI MATEMATICA A

Ing. Informatica (F-Z)

(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2000/2001: 14 Settembre 2001 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e FIRMARE**. **ORALE immediatamente successivo.**

(1). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y, z) = z + x + y^2$. Si determini $f(A)$.

☐ $[(3 - 2\sqrt{2})/4, \sqrt{2}]$
☐ $[-(3 + 2\sqrt{2})/4, (3 + 2\sqrt{2})/4]$
☐ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{(y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3)}{(2y + 2\sqrt{3})} x^2, \quad y(1) = 0.$$

Si calcoli il $\lim\limits_{x \to 4^{1/3}} y(x)$.

☐ 0
☐ $\sqrt{2}(\sqrt{e} - 2)$
☐ $\sqrt{3}(\sqrt{e} - 1)$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\alpha > 0$. Sia $A_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 \leq x^2 + y^2,\ z \geq \alpha(x^2 + y^2)\}$. Si calcoli il

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{7\alpha^3}{\mu_3(A_\alpha)} \iiint_{A_\alpha} (x^2 + y^2)^{3/2} dxdydz.$$

☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = 3e^t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$$

Si determinino tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ $\beta = 2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
☐ $\beta = 2, \alpha = 1$
☐ $\forall \beta \geq 2, \forall \alpha \geq 1$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Dette z_1, z_2 le soluzioni in $\mathbb{C}$ con parte reale < 0 dell'equazione

$$\left(\frac{z + 1 - i}{2i + 1}\right)^3 = i,$$

determinare $(z_1 + z_2)^2$.

☐ $7 - 24i$
☐ $24 - 7i$
☐ $-3 + 4i$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln\Big(1 + x^2 \ln x\Big)\Big(\sinh(x \ln x) - \sin(x \ln x)\Big)}{\tan(x^4 \ln^3 x)\Big(e^{x^2 \ln^2 x} - e^{x \ln x}\Big)}$$

☐ $1/2$
☐ $+\infty$
☐ $1/3$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 4x^5$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 3x^2 e^{-3x}$ per $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (e^{1/n^3} - 1)\Big(f(x)\Big)^n$.

☐ $x > -1/3^{1/3}$
☐ $x \geq -2/3$
☐ $x \geq -1/3^{1/3}$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia determinino tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equation

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 3} = \lambda, \quad x \neq 3,$$

ha esattamente una soluzione (cioè la cardinalità di $f^{-1}\{\lambda\} = 1$).

☐ $\lambda \in (-\infty, -1] \cup \{-1/\sqrt{10}\} \cup (1, +\infty)$
☐ $\lambda \in (-\infty, -1] \cup \{-1/\sqrt{10}\} \cup [1, +\infty)$
☐ $-1 \leq \lambda \leq 1$
☐ Nessuno dei precedenti

Metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t}$, una soluzione particolare è data da $y_p(t) = \alpha t^m e^{\mu t}$, dove α è una costante da determinarsi, ed m è scelto essere la molteplicità di μ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.

IV PROVA SCRITTA DI RECUPERO
ANALISI MATEMATICA A

Ing. Informatica (F-Z)
(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2000/2001: 8 Gennaio 2002 (1)

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata -1/2. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA e FIRMARE**. **ORALE immediatamente successivo.**

(1). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z$. Si determini $f(A)$.

☐ $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$
☐ $[-(1 + 1/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2}]$
☐ $[-1, 1]$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = x(1 - y^2), \quad y(0) = 0.$$

Allora:

☐ $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |y(x)| = 1$
☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1/2$
☐ La soluzione è monotona decrescente
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $\alpha > -2$ e sia $R > 0$. Sia poi $A_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq R^2 - (x^2 + y^2)\}$. Sia

$$L(\alpha) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^3 \mu_3(A_R)} \iiint_{A_R} (x^2 + y^2)^{\alpha/2} dxdydz.$$

Allora:

☐ $L(\alpha) = 0$ per tutti gli $\alpha > -2$
☐ $L(\alpha) < +\infty$ per tutti gli $\alpha > -2$
☐ $L(\alpha) = 8/35$ se e solo se $\alpha = 3$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 2y' + y = 2e^t, \quad y(0) = \alpha, \; y'(0) = \beta.$$

Si ponga $L(\alpha, \beta) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y(t)}{te^t}$. Allora:

☐ $L(\alpha, \beta) = +\infty$ per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
☐ $L(\alpha, \beta) = +\infty$ se e solo se $\alpha = \beta = 0$
☐ $L(\alpha, \beta) = 0$ per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Dette z_0, z_1, z_2, z_3 le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z + 2i)^4 - i(z + 2i) = 0$, determinare $\sum\limits_{k=0}^{3} (\operatorname{Im} z_k)^2$.

☐ $-24i$
☐ $35/2$
☐ $13/2$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln\Big(1 + x^2 \ln x\Big)\Big((\sin x)^2 - \sin(x^2)\Big)}{\Big(\cos x - e^{x^2}\Big)^3 \ln x}$$

☐ $10/21$
☐ $-8/11$
☐ $8/81$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{3 \ln(1 + y^2)}{2\sqrt{x}}, \frac{6y\sqrt{x}}{1 + y^2} \right), \; x > 0, \; y \in \mathbb{R}.$$

Detto f un potenziale per $\vec{F}$, si consideri la curva equipotenziale determinata da $f(x, y) = f(1, -2)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale I, tale che $y(1) = -2$, allora:

☐ $\sup\limits_{x \in I} |y(x)| < +\infty$
☐ y è monotona decrescente su I
☐ $\min\limits_{x \in I} y(x) = -2$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Si determinino tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $\dfrac{x^2}{\ln x} = \lambda$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, ha esattamente una soluzione (cioè la cardinalità di $f^{-1}\{\lambda\} = 2$).

☐ $\lambda \in (-\infty, 0]$
☐ $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [2e, +\infty)$
☐ $\lambda \in (2e, +\infty)$
☐ Nessuno dei precedenti

Metodo per simpatia: data l'equazione differenziale $p(\frac{d}{dt})y = y'' + ay' + by = e^{\mu t}$, una soluzione particolare è data da $y_p(t) = \alpha t^m e^{\mu t}$, dove α è una costante da determinarsi, ed m è scelto essere la molteplicità di μ se $p(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$, mentre $m = 0$ se $p(\mu) \neq 0$.