PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2
Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse
(Alberto PARMEGGIANI)

11 Gennaio 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore.

(1). Sia data la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^9$ se $x \leq 0$, $f(x) = x^2 e^{-2x}$ se $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(e^n)\Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, e sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2$. Si determini $f(A)$.

(3). Sia Σ la superficie $\varphi: (u, v) \longmapsto (u, u + v^2, v^2)$, $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ |u| \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Si calcoli l'area di Σ.

(4). Sia $\alpha > 0$ e sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{\arctan(|x|^\alpha) + y^4}{x^2 + y^2} \text{ se } \ (x, y) \neq (0, 0),\ f(0, 0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $(0, 0)$.

(5). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Si determinino tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} \in \mathbb{R}.$$

(6). Si calcoli il volume dell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - (x^2 + y^2), z \geq 0\}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2
Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse
(Alberto PARMEGGIANI)

3 Febbraio 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore.

(1). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1-e^x}{e^x}$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2+y^2, x^2+y^2 \le 1\}$, e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x+y+z$. Si determini $f(A)$.

(3). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{(e^{x^2+y^2}-1)^2}{(x^4+y^4)^\alpha} \text{ se } \ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f risulta differenziabile in $(0,0)$.

(4). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Si determinino tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} \in \mathbb{R}.$$

(5). Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$$

(6). Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{\log(1+y^2)}{\sqrt{x}}, \dfrac{y\sqrt{x}}{1+y^2}\right)$. Si stabilisca se il campo $\vec{F}$ è esatto o meno, e se ne calcoli il lavoro $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$, essendo Γ la poligonale orientata $\overrightarrow{ABC}$, dove $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ e $C = (4,4)$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2
Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse
(Alberto PARMEGGIANI)

14 Giugno 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore. Orali: 16 Giugno ore 9 aula Vitali.

(1). Sia data la funzione $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7$ se $x \leq 0$, $f(x) = x^3 e^{-2x}$ se $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - 1}{e^n + 1}\Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$, e sia $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^3$. Si determini $f(A)$.

(3). Sia Σ la superficie $\varphi:(u,v) \longmapsto (u, v, (u+v)^2)$, $(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 \leq 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma (x+y)d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ. [Suggerimento: dopo aver scritto l'elemento d'area $d\sigma$, si consideri il cambiamento di variabili $t = (u+v)/\sqrt{2}$, $s = (u-v)/\sqrt{2}$.]

(4). Sia $\alpha > 0$ e sia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ se } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ per i quali f risulta differenziabile in $(0,0)$.

(5). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 8y' + 16y = e^{3t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Si calcoli (se esiste) il $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{te^{4t}}$.

(6). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - (x^2+y^2), z \geq 0\}$ e sia $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y,z) = (x^2+y^2)$. Calcolare $\displaystyle\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2

Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse

(Alberto PARMEGGIANI)

12 Luglio 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore. Orali: 14 Luglio ore 9 aula Tonelli.

(1). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan x$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}} \Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^4 + y^4 + z^4 = 3\}$, e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = 4(x+y+z)$. Si determini $f(A)$. [Suggerimento: si noti che A non ha parte interna!]

(3). Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1, 0 < y < 1/(1-x^2)\}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x/(y+1)^2$. Si calcoli $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$.

(4). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Si calcoli (se esiste) il $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}}$.

(5). Si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$$

(6). Sia $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ e sia dato su H il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y+1}, -\frac{x}{(y+1)^2}\right)$. Si stabilisca se il campo $\vec{F}$ è esatto o meno, e se ne calcoli il lavoro $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, essendo Γ la poligonale orientata $\overrightarrow{ABC}$, dove $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ e $C = (4,4)$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2
Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse

(Alberto PARMEGGIANI)

15 Settembre 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore. Orali: immediatamente dopo lo scritto (oppure il 7 Ottobre, immediatamente dopo lo scritto).

(1). Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5$ se $x \leq 0$, $f(x) = x^5 e^{-3x}$ se $x > 0$. Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$. Si determini $f(A)$.

(3). Sia Σ la superficie $\varphi\colon (u, v) \longmapsto (u, v, u^2+v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma x\,d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

(4). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, x)$. Si verifichi che il campo $\vec{F}$ è esatto. Detto poi f un potenziale di $\vec{F}$, si consideri la curva equipotenziale determinata da $f(x, y) = f(1, 1)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale, tale che $y(1) = 1$, si calcoli il $\lim_{x\to 3} y(x)$.

(5). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 4y = e^t,\ \ y(0) = \alpha,\ \ y'(0) = \beta,\ \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determinare tutti gli α, β per i quali $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{te^{2t}} = 4$.

(6). Sia $\alpha > 0$ e sia $A_\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha},\ x^2 + y^2 \geq 1\right\}$. Determinare tutti gli α positivi per i quali $\displaystyle\iiint_{A_\alpha} z(x^2 + y^2)\,dxdydz < +\infty$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA B
MODULO DI ANALISI MATEMATICA 2
Diploma in Ing. dell'Ambiente e delle Risorse
(Alberto PARMEGGIANI)

7 Ottobre 2000 - a.a. 1999/2000

COGNOME e NOME (Stampatello):

MATRICOLA:

AVVISO: mettere nome e cognome su ogni foglio consegnato. Durata della prova: 3 ore. Orali: immediatamente dopo lo scritto.

(1). Sia data la funzione $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x \sin x$, $x \in [-\pi, 0]$. Si determinino tutti gli $x \in [-\pi, 0]$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n}\Big(f(x)\Big)^n$.

(2). Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}$, e sia $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x + y + z$. Si determini $f(A)$.

(3). Sia Σ la superficie $\varphi: (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 \le 1\}$. Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma (x^2 + y^2) d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di Σ.

(4). Sia dato su il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (x^3 + y^2, x + y)$. Si stabilisca se il campo $\vec{F}$ è esatto o meno, e se ne calcoli il lavoro $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, essendo Γ la poligonale orientata $\overrightarrow{ABC}$, dove $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (2, 1)$.

(5). Sia $\mathbb{R} \ni t \longmapsto y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 8y' + 15y = e^{4t},\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta,\ \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si determinino tutti gli α, β per i quali $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{te^{4t}} = +\infty$.

(6). Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le z \le \dfrac{1}{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \ge 1\right\}$. Si determinino tutti gli $\alpha > 0$ i quali

$$\iiint_A \frac{z}{(x^2 + y^2)^\alpha} dxdydz < +\infty$$