ANALISI MATEMATICA 1

(Bruno FRANCHI – Alberto PARMEGGIANI)

1. Prima parte.

Relazioni, funzioni (iniettive, suriettive, inversa, invertibili). Relazioni d'ordine e d'ordine stretto. Maggioranti e minoranti, massimi e minimi. Estremo superiore ed estremo inferiore. Completezza rispetto all'estremo superiore. I razionali non sono completi rispetto all'estremo superiore. Descrizione della costruzione "naturale" dei numeri. Gli assimo di Peano. Cenno sulla costruzione di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Il problema del passaggio ad $\mathbb{R}$. Presentazione assiomatica di $\mathbb{R}$. Il valore assoluto e le sue proprietà. Gli insiemi induttivi e la definizione di $\mathbb{N}$. La proprietà di Archimede. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo. Un sottoinsieme superiormente limitato di $\mathbb{Z}$ ha massimo. I razionali e gli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$. Esistenza ed unicità della radice n-esima positiva. Definizione di succesione in $\mathbb{R}$ e di limite di una successione di numeri reali. Unicità del limite. Il Teorema: *se una successione è convergente allora è limitata, ma il viceversa è falso*. Definizione di limite uguale a $\pm\infty$. Proprietà elementari dei limiti. Teorema della permanenza del segno. Teoremi di confronto per i limiti. Limite del rapporto di due polinomi. Limite dei reciproci. Limite della radice n-esima. Criterio del rapporto per i limiti di successioni di numeri reali. Successioni monotone. Esistenza del limite per successioni monotone. Definizione di a^x per $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Funzione esponenziale e sue proprietà. Cenni sulla funzione logaritmo. La successione $(1 + \frac{1}{n})^n$ ed il numero di Nepero. Dimostrazione della disuguaglianza $2 < e < 3$. Monotonia del logaritmo. Sottosuccessioni. Il Teorema: *se una successione ha limite allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite*. Dimostrazione che $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$. Teorema di Bolzano-Weiestrass. Dimostrazione di $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Dimostrazione del fatto che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Successioni di Cauchy di numeri reali. Il Teorema: *una successione di numeri reali converge se e solo se è di Cauchy*. Teoremi di Cesáro. Intervalli di $\mathbb{R}$. Punti di accumulazione in $\mathbb{R}$. Definizione di limite per una funzione in un punto di accumulazione del dominio. Definizione di limite da destra e da sinistra. Teoremi di riduzione. Unicità del limite per funzioni. Proprietà elementari dei limiti di funzioni. Teoremi di confronto. Teorema della permanenza del segno. Il simbolo di Landau $f = o(g)$. Prime formule di Taylor per: la radice quadrata, le funzioni elementari, le funzioni iperboliche. Spazi metrici. Lo spazio Euclideo n-dimensionale come spazio metrico. Successioni negli spazi metrici. Palle negli spazi metrici. Unicità del limite negli spazi metrici. Successioni in $\mathbb{R}^n$ e caratterizzazione della convergenza. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Punti interni e punti di frontiera. Caratterizzazione dei punti di frontiera in termini di successioni. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Il Teorema: *un insieme è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera e se e solo se contiene tutti i limiti delle successioni convergenti a valori nell'insieme stesso*. Chiusura di un insieme.

2. Seconda parte.

Definizione di intorno circolare in $\mathbb{R}$, di intorno di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti interni ed insiemi aperti. Definizione di continuità di una funzione. Criterio di continuità tramite le successioni. Funzioni continue su un insieme. L'algebra delle funzioni continue. Teorema della permanenza del segno per funzioni continue. Continuità di $1/f$. Composizione di funzioni continue. Il Teorema di Weierstrass: *una funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo assoluto*. Il Teorema di Bolzano sugli zeri di una funzione continua su $[a, b]$ (la dimostrazione tramite il metodo di bisezione dell'intervallo e quella tramite sup ed inf). I Teoremi: *una funzione continua muta intervalli in intervalli; una funzione continua su un intervallo che è anche iniettiva è allora monotona.* I Teoremi: *una funzione continua su un intervallo che non è mai nulla ha segno costante; una funzione monotona su un intervallo per la quale $f(I)$ è un intervallo e' continua; l'inversa di una funzione continua su un intervallo è continua.* Funzioni uniformemente continue. Condizione necessaria: *una funzione uniformemente continua muta successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.* Compattezza in $\mathbb{R}^n$. Il Teorema di Heine-Cantor sull'uniforme continuità. Funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ che sono uniformemente continue. Rapporto incrementale. Derivabilità. La derivabilità implica la continuità. La composizione di funzioni derivabili è derivabile e vale $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Regole di calcolo delle derivate: per la somma, il prodotto ed il quoziente. Calcolo di derivate di funzioni notevoli (x^n, $n \in \mathbb{N}$; $\mathrm{tg}(x)$; $\ln(x)$; $\mathrm{arctg}(x)$; $\arcsin(x)$; $\arccos(x)$). Definizione di punto di max / min locale (locale stretto). Spazi connessi e sconnessi, criterio equivalente (con i chiusi). Intervalli banali e non banali di $\mathbb{R}$. Il Teorema: *i connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.* Il Teorema di Fermat sull'annullamento della derivata in un punto estremale interno. I Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. I Teoremi: *una funzione continua e derivabile con derivata nulla su un intervallo è costante; se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è continua, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, allora $f(I)$ è un connesso di $\mathbb{R}^n$.* Monotonia e segno della derivata. Stretta monotonia e segno della derivata unitamente alla mancanza di punti interni nell'insieme degli zeri della derivata. Richiami su $\limsup$ e $\liminf$. Il Teorema di De L'Hospital. Derivate successive. Spazi di funzioni $C^n(A;\mathbb{R})$ e loro relazioni di inclusione in dipendenza da n. Proprietà di linearità dell'operatore di derivata n-esima. Formula di Leibniz per la derivata n-esima di un prodotto. Polinomi e funzioni polinomiali. Il lemma di rappresentazione di un polinomio in funzione dei polinomi $(x - x_0)^k$ e determinazione dei coefficienti tramite le derivate del polinomio stesso. I simboli O-grande ed o-piccolo. Il Lemma: *Se f è derivabile n volte in I, allora $f(x)/(x - x_0)^n = o(1)$ per $x \to x_0$ se e solo se $f(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$.* Il teorema dell'approssimazione di Taylor con resto secondo Peano. Il Lemma: *Se f è derivabile $n + 1$ volte su I, se $x \neq x_0$, $x \in I$, allora $f(x)/(x - x_0)^{n+1} = f^{(n+1)}(y)/(n + 1)!$ per un certo y tra x ed x_0 esclusi.* La formula di Taylorcon resto secondo Lagrange. Sviluppo di Taylor di e^x, $\ln(1 + x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, per $x \to 0$. Scrittura di e^a con la serie infinita usando la formula di Taylor con resto secondo Lagrange. Funzioni convesse: definizione, proprietà geometriche dell'epigrafico, condizioni equivalenti tramita la retta secante il grafico e tramite i rapporti incrementali. I Teoremi: *$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile è convessa se e solo se f' è crescente; se f è derivabile due volte allora f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$; f due volte derivabile è convessa se e solo se $f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ per ogni $x, x_0 \in I$.* Il metodo di Newton per $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1, convessa e tale che $f(a) > 0 > f(b)$. Condizioni necessarie e sufficienti per f derivabile n volte affinché un punto interno x_0 con $f(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ed $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ sia di max / min. Teoria dell'integrazione secondo Riemann: scomposizione di un intervallo, parametro di finezza di una scomposizione, somme inferiori e somme superiori, loro proprietà e disuguaglianze fondamentali. Integrale superiore ed integrale inferiore e loro proprietà. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili tramite la stima della differenza tra somme superiori e somme inferiori. Il Teorema: *le funzioni continue e le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann.* I Teoremi: *f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se e solo se lo è su $[a, c]$ e $[c, b]$; proprietà di linearità dell'integrale di Riemann, monotonia dell'integrale e conseguenza per $|f|$.* Il Teorema della media integrale. Definizione di $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$, comunque siano scelti $\alpha, \beta \in [a, b]$. Il Teorema: *una funzione continua su $[a, b]$ tranne che per un numero finito di punti è integrale secondo Riemann.* Funzione integrale e sue proprietà. Funzione primitiva. Due primitive differiscono per una costante. Calcolo dell'integrale definito tramite le primitive. Teorema di integrazione per sostituzione e di integrazione per parti. Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Definizione di problema di Cauchy e di relativa soluzione. Teorema di struttura delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine ed unicità nel caso del relativo problema di Cauchy. Teorema di esistenza ed unicità della soluzione massimale del problema di Cauchy del primo ordine a variabili separabili. Formula di Taylor col resto integrale. Riduzione a fratti semplici di funzioni razionali: il caso di radice reale e quello di radice complessa. Il metodo di Hermite. Insiemi x-semplici ed y-semplici del piano e loro area. Definizione di integrabilità in senso generalizzato su $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b). Criterio di Cauchy di integrabilità in senso generalizzato. Definizione di funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato. Il Teorema: *assolutamente integrabile in senso generalizzato implica integrabile in senso generalizzato.* Criterio del confronto e del confronto asintotico per l'assoluta integrabilità in senso generalizzato. Il Teorema di integrabilità generalizzata di funzioni oscillanti.

I numeri complessi: unità immaginaria, rappresentazione algebrica, operazioni di somma e prodotto, il campo $\mathbb{C}$, complesso coniugato e sue proprietà, il piano di Gauss, modulo e argomento di un numero complesso, rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi, prodotto e potenze di numeri complessi in forma trigonometrica, formula di Eulero e rappresentazione esponenziale, radici n-esime, enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra, fattorizzazione di un polinomio su $\mathbb{C}$, calcolo delle radici n-esime.