ANALISI MATEMATICA 1 (C.D.S. IN ASTRONOMIA, A.A. 2021-2022)

ALBERTO PARMEGGIANI

NOTA BENE: degli argomenti in grassetto si deve conoscere la dimostrazione.

1. Nozioni elementari

(1) Richiami di teoria degli insiemi.
(2) **Radice di 2 non è un numero razionale**.
(3) L'ordine sui numeri reali. Proprietà dell'ordine. Intervalli di $\mathbb{R}$. Maggioranti, minoranti, insiemi superiormente/inferiormente limitati, insiemi limitati. max e min, sup ed inf di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
(4) $|x|$ **e sue proprietà**. Completezza di $\mathbb{R}$. Caratterizzazione di sup ed inf.
(5) Il principio di induzione. Esistenza e costruzione tramite sup della radice n-esima, dell'esponenziale a^x, x reale, e del logaritmo in base a di un numero positivo. **Dimostrazione per induzione della formula del binomio di Newton**.
(6) Funzioni, iniettive, suriettive, biettive, funzione composta. Composizione di funzioni. Funzione inversa. **Unicità dell'inversa**. Grafico della funzione inversa. Successioni. Insiemi finiti, infiniti numerabili, infiniti. Funzioni monotone reali. Invertibilità delle funzioni monotone. Esempi: a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

2. Topologia di $\mathbb{R}$ e teoria dei limiti

(1) Intorni sferici in $\mathbb{R}$. Il completamento $\mathbb{R}^*$ di $\mathbb{R}$. Intorni sferici di $+\infty$ e $-\infty$.
(2) **Proprietà degli intorni sferici**. Punti di accumulazione.
(3) Proprietà degli intorni di un punto di accumulazione di un insieme **(infinitezza)**.
(4) **Il teorema di Bolzano-Weierstrass**.
(5) Punto interno, esterno e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione.
(6) **Un insieme chiuso e limitato ammette max e min**.
(7) Definizione di limite di una funzione numerica reale.
(8) **Teorema di unicità del limite**, **teorema di permanenza del segno**.
(9) Limite destro e limite sinistro. Il limite esiste se e solo se esistono il limite destro e sinistro ed essi coincidono.
(10) Limite di successioni. Il teorema: il limite esiste se e solo se esiste il limite per ogni successioni e i limiti coincidono.
(11) Teorema del limite della composizione. **Teorema dei 2 carabinieri**. **Limite di funzioni monotone**.
(12) Algebra dei limiti. I casi delle forme indeterminate. Il simbolo $o(1)$. I limiti notevoli $\sin x/x$, $\operatorname{tg} x/x$ per $x \to 0$ e limiti ottenuti tramite le funzioni inverse.
(13) I punti di accumulazione di un chiuso appartengono al chiuso stesso.
(14) Insiemi compatti per successioni. Un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato.

3. Funzioni continue

(1) Definizione di funzione continua in un punto e su un insieme. Punti di discontinuità di una funzione.
(2) Se f, g sono continue allora $|f|$, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono continue; $1/f$ è continua sul dominio di f privato degli zeri di f. Salto di una funzione in una discontinuità.
(3) **Le funzioni monotone su un intervallo hanno solo discontinuità di tipo salto o eliminabili nel caso dell'estremo che appartenga all'intervallo**.
(4) **Il teorema degli zeri**. **Il teorema dei valori intermedi**.
(5) Una funzione continua muta intervalli in intervalli. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo è strettamente monotona**. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo ha inversa sulla sua immagine che è continua**.
(6) **Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un compatto ha immagine compatta**; il corollario: **una funzione continua su un compatto ammette max e min assoluti**.
(7) Definizione di continuità uniforme. **Teorema di Heine Cantor** (dimostrazione facoltativa all'esame).
(8) Il simbolo $o(g)$ e le proprietà $o(g) = go(1)$.

4. Derivabilità, polinomio di Taylor e conseguenze

(1) **Una funzione derivabile è continua**. **Regole di derivazione: di una combinazione lineare, del prodotto, del quoziente**. **Derivazione della composizione**. **Comportamento locale di una funzione derivabile in un punto con ivi derivata non-nulla**. **Derivata della funzione inversa**. Derivate di x^n, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{arctg}\, x$.
(2) Punti di max/min relativo. Punti critici di una funzione. **Il teorema di Fermat sui punti estremali locali interni**. **I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy**.
(3) **Teorema di De L'Hôpital** (dimostrazione nel caso 0/0).
(4) **Una funzione continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) con derivata nulla, è costante su $[a,b]$**.
(5) Asintoti orizzontali, obliqui e verticali.
(6) **Ogni polinomio in x può essere espresso come polinomio in $x - x_0$ dello stesso grado**. **Se un polinomio p di grado n è $o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$ allora $p = 0$**.
(7) **Costruzione del polinomio di Taylor**. **Formula di Taylor con resto secondo Peano**.
(8) **Monotonia delle funzioni derivabili in termini della derivata**. **Segno della derivata seconda in un punto critico e proprietà di max/min del punto**. **Uso della formula di Taylor con resto secondo Peano per la determinazione, in termini della derivata $n+1$-esima, della natura di punti di zeri per le derivate fino all'ordine n**. **Formula di Taylor con resto secondo Lagrange**.
(9) **Applicazione: convergenza puntuale della serie di Taylor di e^x**.
(10) Il simbolo $f \sim g$ per $x \to x_0$, il simbolo di Landau $f = O(g)$.

5. I numeri complessi

(1) I numeri complessi: forma cartesiana, somma e prodotto, l'unità immaginaria i, coniugato e sua proprietà su somma e prodotto, modulo di un numero complesso e proprietà relativamente alla moltiplicazione, inverso di un numero complesso, parte reale ed immaginaria.

(2) Forma trigonometrica di un numero complesso, argomento, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ e sue proprietà.
(3) Il teorema sulla determinazione delle radici ennesime di un numero complesso. Il teorema fondamentale dell'algebra.

6. Teoreia dell'integrazione secondo Riemann

(1) Suddivisioni, finezza di una suddivione, parametro di approssimazione, somme inferiori e somme superiori e loro proprietà.
(2) Definizione di integrale secondo Riemann. Esempi: funzione costante, funzione di Dirichlet.
(3) **Le funzioni continue sono Riemann- integrabili** . **Integrabilità secondo Riemann di funzioni monotone**.
(4) Proprietà dell'integrale secondo Riemann (linearità, monotonia, spezzamento, valore assoluto).
(5) Formule per l'integrale senza tenere conto degli estremi.
(6) **Teorema della media integrale**. Funzione integrale rispetto ad un punto. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**.
(7) Definizione di integrabilità secondo Riemann su un intervallo qualunque. Definizione di funzione primitiva. **Due primitive differiscono al più per una costante**. **Calcolo dell'integrale di una funzione continua tramite una primitiva**.
(8) **Integrazione per parti e per sostituzione**. Il teorema di scomposizione di P/Q, polinomi reali con $\mathrm{gr}\,P < \mathrm{gr}\,Q$, tramite i fratti semplici. Teorema di scomposizione di Hermite per il calcolo della primitiva di funzioni razionali.

7. Integrale generalizzaro

(1) Definizione di integrale generalizzato. **I modelli di x^α vicino a 0 e vicino a $+\infty$.**
(2) **Criterio del confronto e del confronto asintotico per gli integrali generalizzati**.
(3) Definizione di funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato. **L'assoluta integrabilità in senso generalizzato implica l'integrabilità in senso generalizzato**.
(4) **La funzione $\sin(x)/x$ (con valore 1 in $x = 0$) è integrabile in senso generalizzato. La funzione $\cos(x^2)$ è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$. La funzione $\sin(x)/x$ è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ ma non assolutamente integrabile in senso generalizzato**.
(5) **Criterio integrale di convergenza per le serie a termini positivi. Conseguenze:** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ **è convergente se e solo se $\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, oppure $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.**
(6) La formula di Taylor con resto integrale.

8. Equazioni differenziali ordinarie

(1) Esistenza ed unicità del problema di Cauchy del primo ordine linerare; formula risolutiva. (Facoltativo all'esame).

9. Successioni numeriche

(1) Definizione di successione e sottusuccessione in $\mathbb{R}$ (con esempi);
(2) Definizione di successione convergente, divergente, oscillante (con esempi);
(3) **Teorema di unicità del limite**;

(4) **Teorema sul limite delle sottosuccessioni di una successione convergente**;
(5) Teorema sulle proprietà algebriche dei limiti;
(6) **Teorema della permanenza del segno**;
(7) Teorema: criterio del confronto;
(8) Definizione di successioni limitate (inferiormente e superiormente);
(9) Relazione tra successioni convergenti e limitate;
(10) Definizione di successione infinitesima e teorema sul limite del prodotto tra una successione infinitesima e una successione limitata;
(11) Teorema sulle regole algebriche nel calcolo dei limiti anche per successioni divergenti;
(12) Definizione di successione monotona;
(13) **Teorema sull'esistenza limite per successioni monotone**;
(14) Successione geometrica;
(15) Confronto tra successioni infinitesime e tra successioni divergenti;
(16) **Teorema di Bolzano-Weierstrass**;
(17) Definizione di successione di Cauchy;
(18) **Teorema: ogni successione di Cauchy (in $\mathbb{R}$) è convergente**;
(19) Criteri di convergenza: confronto asintotico, confronto, rapporto, radice;
(20) Accenno alle successioni definite per ricorrenza.

10. Serie numeriche

(1) Elementi di calcolo combinatorio;
(2) Definizione di serie numerica e di serie convergente, divergente, oscillante;
(3) Serie geometrica: calcolo della sua somma quando possibile;
(4) Teorema sul carattere di serie con termini uguali da un certo indice in poi;
(5) Calcolo della somma della serie telescopica;
(6) Definizione di serie resto di una serie, relazione tra serie convergente e serie resto;
(7) Teorema sulla somma di serie convergenti;
(8) Teorema sulla condizione di Cauchy per la convergenza di una serie
(9) **Condizione necessaria per la convergenza di una serie**;
(10) **Teorema: criterio del confronto per la convergenza**;
(11) **Teorema: criterio del confronto asintotico per la convergenza**;
(12) Esercizio: serie armonica generalizzata;
(13) Criterio della radice e del rapporto;
(14) Convergenza assoluta e relazione con la convergenza semplice;
(15) Criterio di Abel-Dirichlet;
(16) Serie a termini alterni: criterio di Leibniz;
(17) Definizione del prodotto di convoluzione tra serie;
(18) Cenno ad alcune proprietà delle serie assolutamente convergenti.

11. Successioni di funzioni

(1) Definizione di successione di funzioni, di convergenza puntuale e di convergenza uniforme (con esempi);
(2) **Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni limitate è una funzione limitata**;
(3) Teorema: proprietà algebriche della convergenza uniforme;

(4) Teorema: condizione di Cauchy (necessaria e sufficiente);
(5) **Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua**;
(6) Teorema: scambio del passaggio al limite;
(7) Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni Riemann-integrabile è una funzione Riemann-integrabile;
(8) Teorema sulla convergenza della successioni delle derivate e scambio limite-successione e derivata.

12. Serie di funzioni

(1) Definizione di serie di funzioni, di convergenza puntuale, assoluta e uniforme (e relazioni tra le varie convergenze);
(2) Teorema: condizione di Cauchy per la convergenza uniforme;
(3) Teorema sulla somma di due serie che convergono uniformemente;
(4) Definizione di convergenza totale e sua relazione con gli altri tipi di convergenza;
(5) **Teorema: con totale implica convergenza uniforme e assoluta**;
(6) **Teorema sul limite uniforme di una serie di funzioni Riemann-integrabili**;
(7) Teorema sul limite della somma di una serie uniformemente convergente; Teorema sulla serie delle derivate;
(8) Serie di potenze: definizione;
(9) **Teorema propedeutico alla definizione di raggio di convergenza** e **Corollario al teorema** (si vedano le lezioni del 2 e 9 dicembre 2021 nello spazio virtuale del corso);
(10) Definizione di raggio di convergenza;
(11) **Teorema; vari tipi di convergenza relativamente al raggio**;
(12) **Teorema di Cauchy-Hadamard**;
(13) **Teorema: la somma di una serie di potenze è una funzione continua**;
(14) Teorema: confronto tra i raggi di due serie di potenze (si veda la lezione del 9 dicembre 2021 nello spazio virtuale del corso);
(15) Teorema di Abel.