ANALISI MATEMATICA 1 (C.D.S. IN ASTRONOMIA, A.A. 2023-2024) PROGRAMMA PARZIALE

ALBERTO PARMEGGIANI, LOREDANA LANZANI

NOTA BENE: degli argomenti in grassetto si deve conoscere la dimostrazione.

Il corso e le referenze ai teoremi sono basate sul libro di testo, si veda la guidaweb.

PRIMA PARTE (A. Parmeggiani)

1. NOZIONI ELEMENTARI (CAPITOLI 1 E 2)

(1) Richiami di teoria degli insiemi.
(2) **Radice di 2 non è un numero razionale**.
(3) L'ordine sui numeri reali. Proprietà dell'ordine. Intervalli di $\mathbb{R}$. Maggioranti, minoranti, insiemi superiormente/inferiormente limitati, insiemi limitati. max e min, sup ed inf di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
(4) $|x|$ **e sue proprietà**. Completezza di $\mathbb{R}$. Caratterizzazione di sup ed inf.
(5) Il principio di induzione. Esistenza della radice n-esima, dell'esponenziale a^x, x reale, e del logaritmo in base a di un numero positivo. **Dimostrazione per induzione della formula del binomio di Newton** (Facoltativo).
(6) Funzioni, iniettive, suriettive, biettive, funzione composta. Controimmagine di un insieme tramite una funzione e sue proprietà rispetto alla unione ed intersezione. Composizione di funzioni. Funzione inversa. **Unicità dell'inversa**. Grafico della funzione inversa. Successioni. Insiemi finiti, insiemi infiniti. Funzioni monotone reali. Invertibilità delle funzioni strettamente monotone.

2. TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$ E TEORIA DEI LIMITI (CAPITOLI 2, 3 E 5)

(1) Distanza in $\mathbb{R}$.
(2) Intorni sferici in $\mathbb{R}$. Il completamento $\mathbb{R}^*$ di $\mathbb{R}$. Intorni sferici di $+\infty$ e $-\infty$.
(3) **Proprietà degli intorni sferici**. Punti di accumulazione.
(4) Proprietà degli intorni di un punto di accumulazione di un insieme: infinitezza.
(5) Il teorema di Bolzano-Weierstrass (un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato ed infinito possiede almento un punto di accumulazione).
(6) Punto interno, esterno e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione (finita).
(7) **Un insieme (non vuoto) chiuso e limitato ammette max e min**.
(8) Definizione di limite di una funzione numerica reale.
(9) **Teorema di unicità del limite**. **Teorema di permanenza del segno**.
(10) Limite destro e limite sinistro. Il limite esiste se e solo se esistono il limite destro e sinistro ed essi coincidono.
(11) **Algebra dei limiti reali: moltiplicazione per una costante, somma, prodotto, reciproco, quoziente**.

(12) Aritmetica parziale di $\mathbb{R}^*$ (Teorema 3.20 del testo).
(13) **Teorema dei 2 carabinieri**. **Limite di funzioni monotone**. Il limite della composizione di funzioni.
(14) Il limite di $\cos x$ per $x \to 0$ ed i limiti notevoli $\sin x/x$, $\operatorname{tg} x/x$, $(1-\cos x)/x^2$, $\arctan x/x$ per $x \to 0$.
(15) I simboli $f = o(1)$, $f = o(g)$ e $f \sim g$ per $x \to x_0$.
(16) Il limite esiste se e solo se esiste il limite per ogni successione a valori in $X \setminus \{x_0\}$ ed i limiti coincidono.
(17) Insiemi compatti (per successioni). **Un insieme è compatto (per successioni) se e solo se è chiuso e limitato**.
(18)

3. Funzioni continue (Capitolo 6)

(1) Definizione di funzione continua in un punto e su un insieme. Punti di discontinuità di una funzione.
(2) Se f, g sono continue allora $|f|$, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono continue; $1/f$ è continua sul dominio di f privato degli zeri di f. Salto di una funzione in una discontinuità.
(3) **Le funzioni monotone su un intervallo hanno solo discontinuità di tipo salto o eliminabili nel caso di estremo dell'intervallo che appartenga all'intervallo**.
(4) **Il teorema degli zeri**. **Il teorema dei valori intermedi**.
(5) Una funzione continua muta intervalli in intervalli. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo è strettamente monotona**. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo ha inversa sulla sua immagine che è continua**.
(6) **Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un compatto ha immagine compatta**; il corollario: **una funzione continua su un compatto ammette max e min assoluti**.
(7) Definizione di continuità uniforme. **Teorema di Heine Cantor** (Facoltativo).

4. Derivabilità, polinomio di Taylor e conseguenze (Capitolo 7)

(1) Definizione di derivata e di retta tangente il grafico.
(2) **Sia I un intervallo. Una funzionte $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ se e solo se esiste $\omega\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 con valore $\omega(x_0) = 0$ tale che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.**
(3) **Una funzione derivabile è continua**, ma non viceversa: $x \longmapsto |x|$.
(4) **Derivata della funzione inversa**.
(5) Derivate di x^k, $k \neq 0$ intero, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\arcsin(y)$, $\ln y$.
(6) **Regole di derivazione: di una combinazione lineare, del prodotto, del quoziente, della composizione**.
(7) Derivata di $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, a^x, x^x. Le funzioni $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$, loro relazione e rispettive derivate.
(8) Punti di max/min locale. Punti critici di una funzione. **Il teorema di Fermat sui punti estremali locali interni**.
(9) **Il teorema di Rolle**. **Il teorema di Lagrange**. **Il teorema di Cauchy**.
(10) **Teorema di De L'Hôpital** (dimostrazione nel caso 0/0).
(11) **Monotonia delle funzioni derivabili in termini della derivata**.

(12) Polinomio di Taylor di grado n centrato in un punto e relative proprietà. **Formula di Taylor con resto secondo Peano**. **Segno della derivata seconda in un punto critico e proprietà di max/min del punto**. **Uso della formula di Taylor con resto secondo Peano per la determinazione, in termini della derivata $n+1$-esima, della natura di punti di zeri per le derivate fino all'ordine n**. **Formula di Taylor con resto secondo Lagrange**. Applicazione: convergenza puntuale della serie di Taylor di e^x.

5. Teoria dell'integrazione secondo Riemann (Capitolo 8)

(1) Suddivisioni, finezza di una suddivione, parametro di approssimazione, somme inferiori e somme superiori e loro proprietà.
(2) Definizione di integrale secondo Riemann. Esempi: funzione costante, funzione di Dirichlet. **Il teorema di Riemann sulla condizione necessaria e sufficiente di integrabilità**.
(3) **Le funzioni continue sono Riemann- integrabili** . **Integrabilità secondo Riemann di funzioni monotone**.
(4) Proprietà dell'integrale secondo Riemann (linearità, monotonia, spezzamento, valore assoluto, parte positiva e parte negativa).
(5) Formule per l'integrale senza tenere conto degli estremi.
(6) **Teorema della media integrale**.
(7) Definizione di integrabilità secondo Riemann su un intervallo qualunque. Funzione integrale rispetto ad un punto e sua **proprietà di continuità**.
(8) **Teorema fondamentale del calcolo integrale**.
(9) Definizione di funzione primitiva. **Due primitive differiscono al più per una costante**. **Calcolo dell'integrale di una funzione continua tramite una primitiva**.
(10) **Integrazione per parti e per sostituzione**.
(11) Il teorema di scomposizione di P/Q, polinomi reali con $\mathrm{gr}\, P < \mathrm{gr}\, Q$, tramite i fratti semplici. Calcolo della primitiva di funzioni razionali.

6. Integrale generalizzato (Capitolo 8)

(1) Definizione di integrale generalizzato e di funzione integrabile in senso generalizzato nei casi $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,b]\setminus\{c\}$ e $(a,b)\setminus\{c\}$.
(2) **I modelli di $1/x^\alpha$ vicino a 0 e vicino a $+\infty$.**
(3) Criterio del confronto e del confronto asintotico per gli integrali generalizzati.
(4) Definizione di funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato. **L'assoluta integrabilità in senso generalizzato implica l'integrabilità in senso generalizzato**.
(5) **La funzione $\sin(x)/x$ (con valore 1 in $x=0$) è integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente integrabile in senso generalizzato**. La funzione $\cos(x^2)$ è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$.
(6) **Criterio integrale di convergenza per le serie a termini positivi. Conseguenze: $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ è convergente se e solo se $\alpha>1$ e $\beta\in\mathbb{R}$, oppure $\alpha=1$ e $\beta>1$.**
(7) La formula di Taylor con resto integrale.

SECONDA PARTE (L. Lanzani)

7. NUMERI COMPLESSI (CAPITOLO 1)

(1) **Proprietà dei numeri complessi (Teorema 1.15)**. **Proprietà del modulo e dell'argomento (Teorema 1.16)**. **Formula di De Moivre**. **Derivazione della rappresentazione esponenziale e delle fomule (1.3) (pag. 23)**.
(2) **Radici n-esime (Teorema 1.18)**.
(3) Teorema fondamentale dell'Algebra (Teorema 1.19).
(4) **Se un polinomio P ha coefficienti reali allora l'operatore di coniugazione complessa commuta con P**.

8. SUCCESSIONI E SERIE (CAPITOLO 4)

(1) Limiti di successioni. Proprietà dei limiti (Proposizione 4.2), **dimostrazione del punto 4**.
(2) **Limite di r^n, $n \to +\infty$, $r \in \mathbb{R}$**.
(3) **Limite di $\sqrt[n]{r}$, $n \to +\infty$, $r > 0$**.
(4) **Dimostrazione di:** $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$, $a > 0$.
(5) Gerarchie di infiniti.
(6) Una successione ha limite $\lambda \in \mathbb{R}^*$ se e solo se ogni sottosuccessione ha limite $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (Teorema 4.6).
(7) **Raffinamento del Teorema 4.6 con le sole sottosuccessioni degli indici pari e degli indici dispari**.
(8) Teorema di Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.7).
(9) **Criterio di Cauchy (Teorema 4.9)**.
(10) **Studio della successione** $a_{n+1} = a_n^2$, $n \geq 0$.
(11) **La progressione geometrica** $\sum_{n=0}^{N} q^n$ **di ragione** $q \neq 1$.
(12) Definizione di serie, serie convergente e serie divergente.
(13) **Condizione necessaria di convergenza per una serie (Teorema 4.13)**. **Serie di Mengoli**. **Comportamento della serie geometrica (Teorema 4.14)**.
(14) **Una serie a termini positivi o converge o diverge a $+\infty$ (Teorema 4.16)**. **La serie armonica**.
(15) Il teorema del confronto (Teorema 4.17). Il teorema del confronto asintotico (Teorema 4.18). Il criterio del rapporto (Teorema 4.20).
(16) **Dimostrazione di:** $\sum_{k\geq 0} 1/k! < +\infty$, $\sum_{k\geq 1} k^n/k! < +\infty$.
(17) **Criterio della radice (Teorema 4.21)**. Convergenza assoluta (Teorema 4.23). Criterio di Leibniz (Teorema 4.25).