ANALISI MATEMATICA 1 (C.D.S. IN ASTRONOMIA, A.A. 2025-2026)

ALBERTO PARMEGGIANI, LOREDANA LANZANI

NOTA BENE: degli argomenti in grassetto si deve conoscere la dimostrazione.

Il corso e le referenze ai teoremi sono basate sul libro di testo, si veda la guidaweb.

PRIMA PARTE (A. Parmeggiani)

1. Nozioni elementari (Capitoli 1 e 2)

(1) Richiami di teoria degli insiemi.
(2) **Radice di 2 non è un numero razionale**.
(3) L'ordine sui numeri reali. Proprietà dell'ordine. Maggioranti, minoranti, insiemi superiormente/inferiormente limitati, insiemi limitati. max e min, sup ed inf di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
(4) $|x|$ **e sue proprietà**. Completezza di $\mathbb{R}$. Caratterizzazione di sup ed inf.
(5) Esistenza della radice n-esima e del logaritmo in base $a(\neq 1)$ di un numero positivo.
(6) Funzioni, iniettive, suriettive, biettive, funzione composta. Controimmagine e immagine di un insieme tramite una funzione. Funzione inversa. Funzioni monotone reali. **Unicità dell'inversa**. Grafico della funzione inversa. Invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Insiemi finiti, insiemi infiniti.
(7) Il principio di induzione. **Dimostrazione per induzione della disuguaglianza di Bernoulli**. **Dimostrazione per induzione della formula del binomio di Newton** (Facoltativo).

2. Topologia di $\mathbb{R}$ e teoria dei limiti (Capitoli 2, 3 e 5)

(1) Spazi metrici, definizione di distanza. Distanza in $\mathbb{R}$.
(2) Intorni sferici in $\mathbb{R}$. Il completamento $\mathbb{R}^*$ di $\mathbb{R}$. Intorni sferici di $+\infty$ e $-\infty$.
(3) **Proprietà degli intorni sferici**. Punti di accumulazione.
(4) **Proprietà degli intorni di un punto di accumulazione di un insieme: infinitezza**.
(5) **Il teorema di Bolzano-Weierstrass (un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato ed infinito possiede almento un punto di accumulazione)**.
(6) Punto interno, esterno e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione (finita).
(7) **Un insieme (non vuoto) chiuso e limitato ammette max e min**.
(8) Definizione di limite di una funzione numerica reale.
(9) **Teorema di unicità del limite**. **Teorema di permanenza del segno**.
(10) Punti di accumulazione a destra ed a sinistra di un insieme. Limite destro e limite sinistro. Il limite esiste se e solo se esistono il limite destro e sinistro ed essi coincidono.
(11) **Algebra dei limiti reali: somma, prodotto, reciproco, quoziente**.
(12) Aritmetica parziale di $\mathbb{R}^*$ (Teorema 3.20 del testo).

(13) **Teorema dei 2 carabinieri**. **Limite di funzioni monotone**. Il limite della composizione di funzioni.
(14) I limiti notevoli $\sin x/x$, $\mathrm{tg}\, x/x$ per $x \to 0$, $(1-\cos x)/x^2$, per $x \to 0$.
(15) I simboli $f = o(1)$, $f = o(g)$ e $f \sim g$ per $x \to x_0$.
(16) Il limite esiste se e solo se esiste il limite per ogni successione a valori in $X \setminus \{x_0\}$ ed i limiti coincidono.
(17) Insiemi compatti (per successioni). **Un insieme è compatto (per successioni) se e solo se è chiuso e limitato**.
(18)

3. Funzioni continue (Capitolo 6)

(1) Definizione di funzione continua in un punto e su un insieme. Punti di discontinuità di una funzione.
(2) Se f, g sono continue allora $|f|$, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$, f/g (esclusi gli zeri di g sono continue.
(3) **Le funzioni monotone su un intervallo hanno solo discontinuità di tipo salto o eliminabili nel caso di estremo dell'intervallo che appartenga all'intervallo**.
(4) **Il teorema degli zeri**. **Il teorema dei valori intermedi**. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo è strettamente monotona**. **Una funzione continua ed iniettiva su un intervallo ha inversa sulla sua immagine che è continua**.
(5) **Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un compatto ha immagine compatta**; il corollario: **una funzione continua su un compatto ammette max e min assoluti**.
(6) Definizione di continuità uniforme. **Teorema di Heine Cantor**.

4. Derivabilità, polinomio di Taylor e conseguenze (Capitolo 7)

(1) Definizione di derivata e di retta tangente il grafico.
(2) **Sia I un intervallo. Una funzionte $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ se e solo se esiste $\omega\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 con valore $\omega(x_0) = 0$ tale che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.**
(3) **Una funzione derivabile è continua**, ma non viceversa: $x \longmapsto |x|$.
(4) **Derivata della funzione inversa**.
(5) Derivate di x^k, $k \neq 0$ intero, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\arcsin(y)$, $\ln y$.
(6) **Regole di derivazione: di una combinazione lineare, del prodotto, del quoziente, della composizione**.
(7) Derivata di $\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, a^x, x^x. Le funzioni $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$, loro relazione e rispettive derivate.
(8) Punti di max/min locale. Punti critici di una funzione. **Il teorema di Fermat sui punti estremali locali interni**.
(9) **Il teorema di Rolle**. **Il teorema di Lagrange**. **Il teorema di Cauchy**.
(10) **Teorema di De L'Hôpital** (dimostrazione nel caso 0/0).
(11) **Monotonia delle funzioni derivabili in termini della derivata**.
(12) Polinomio di Taylor di grado n centrato in un punto e relative proprietà. **Formula di Taylor con resto secondo Peano**. **Segno della derivata n-esima, n pari, in un punto critico e proprietà di max/min del punto**. **Formula di Taylor con resto secondo Lagrange**. Applicazione: convergenza puntuale della serie di Taylor di e^x.

5. TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN (CAPITOLO 8)

(1) Suddivisioni, finezza di una suddivione, parametro di finezza, somme inferiori e somme superiori e loro proprietà.
(2) Definizione di integrale secondo Riemann. Esempi: funzione costante, funzione di Dirichlet. **Il teorema di Riemann sulla condizione necessaria e sufficiente di integrabilità**.
(3) **Le funzioni continue sono Riemann- integrabili** . **Integrabilità secondo Riemann di funzioni monotone**.
(4) Proprietà dell'integrale secondo Riemann (linearità, monotonia, spezzamento, valore assoluto, parte positiva e parte negativa).
(5) **Teorema della media integrale**.
(6) Definizione di integrabilità secondo Riemann su un intervallo qualunque. Funzione integrale rispetto ad un punto e sua **proprietà di continuità**.
(7) **Teorema fondamentale del calcolo integrale**.
(8) Definizione di funzione primitiva. **Due primitive differiscono al più per una costante**. **Calcolo dell'integrale di una funzione continua tramite una primitiva**.
(9) **Integrazione per parti e per sostituzione**.
(10) Il teorema di scomposizione di P/Q, polinomi reali con $\operatorname{gr} P < \operatorname{gr} Q$, tramite i fratti semplici. Calcolo della primitiva di funzioni razionali.
(11) La formula di Taylor con resto integrale.

6. INTEGRALE GENERALIZZATO (CAPITOLO 8)

(1) Definizione di integrale generalizzato e di funzione integrabile in senso generalizzato nei casi $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,b]\setminus\{c\}$ e $(a,b)\setminus\{c\}$.
(2) **Il criterio del confronto per gli integrali generalizzati.**
(3) **Criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati.**
(4) **I modelli di** $1/x^\alpha$ **vicino a** 0 **e vicino a** $+\infty$.
(5) Definizione di funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato. **L'assoluta integrabilità in senso generalizzato implica l'integrabilità in senso generalizzato**.
(6) **La funzione** $\sin(x)/x$ **(con valore** 1 **in** $x=0$**) è integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente integrabile in senso generalizzato**. La funzione $\cos(x^2)$ è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$.
(7) **Criterio integrale di convergenza per le serie a termini positivi. Conseguenze:** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ **è convergente se e solo se** $\alpha>1$ **e** $\beta\in\mathbb{R}$**, oppure** $\alpha=1$ **e** $\beta>1$**.**

7. SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI (CAPITOLO 9

(1) Definizione di successione di funzioni, di convergenza puntuale e di convergenza uniforme (con esempi).
(2) La convergenza uniforme implica quella puntuale, ma non il viceversa.
(3) Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua.
(4) Teorema sulla convergenza uniforme della successione di funzioni e scambio del segno di integrale col segno di limite della successione.

(5) Teorema sulla convergenza uniforme della successioni delle derivate e scambio del segno di limite della successione col segno di derivata.
(6) Definizione di serie di funzioni, di convergenza puntuale e convergenza uniforme.
(7) Definizione di convergenza totale e sua relazione con gli altri tipi di convergenza.
(8) Teorema: la convergenza totale implica la convergenza uniforme.

SECONDA PARTE (L. Lanzani)

8. Numeri Complessi (Capitolo 1)

(1) **Proprietà dei numeri complessi (Teorema 1.15)**. **Proprietà del modulo e dell'argomento (Teorema 1.16)**. **Formula di De Moivre**. **Derivazione della rappresentazione esponenziale e delle fomule (1.3) (pag. 23)**.
(2) **Radici** n**-esime (Teorema 1.18)**.
(3) Teorema fondamentale dell'Algebra (Teorema 1.19).
(4) **Se un polinomio** P **ha coefficienti reali allora l'operatore di coniugazione complessa commuta con** P.

9. Successioni e Serie (Capitolo 4)

(1) Limiti di successioni. Proprietà dei limiti (Proposizione 4.2), **dimostrazione del punto 4**.
(2) **Limite di** r^n**,** $n \to +\infty$**,** $r \in \mathbb{R}$.
(3) **Limite di** $\sqrt[n]{r}$**,** $n \to +\infty$**,** $r > 0$.
(4) **Dimostrazione di:** $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$**,** $a > 0$.
(5) Gerarchie di infiniti.
(6) Una successione ha limite $\lambda \in \mathbb{R}^*$ se e solo se ogni sottosuccessione ha limite $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (Teorema 4.6).
(7) **Raffinamento del Teorema 4.6 con le sole sottosuccessioni degli indici pari e degli indici dispari**.
(8) Teorema di Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.7).
(9) **Criterio di Cauchy (Teorema 4.9)**.
(10) **Studio della successione** $a_{n+1} = a_n^2$, $n \geq 0$.
(11) **La successione di Fibonacci** $\{a_n\}$ **e suo comportamento**
(12) **La successione della sezione aurea** $\{A_n\}$ **e suo comportemento**
(13) **La progressione geometrica** $\sum_{n=0}^{N} q^n$ **di ragione** $q \neq 1$.
(14) Definizione di serie, serie convergente, serie divergente, serie irregolare.
(15) **Condizione necessaria di convergenza per una serie (Teorema 4.13)**.
(16) Coda ed errore di una serie convergente (p. 123). **Serie di Mengoli**. **Comportamento della serie geometrica (Teorema 4.14)**.
(17) **Una serie a termini positivi o converge o diverge a** $+\infty$ **(Teorema 4.16)**. **La serie armonica**.

(18) Il teorema del confronto (Teorema 4.17). Il teorema del confronto asintotico (Teorema 4.18). Il criterio del rapporto (Teorema 4.20).
(19) **Dimostrazione di:** $\sum_{k\geq 0} 1/k! < +\infty$**,** $\sum_{k\geq 1} k^n/k! < +\infty$.
(20) **Criterio della radice (Teorema 4.21)**. Convergenza assoluta (Teorema 4.23). Criterio di Leibniz (Teorema 4.25).