ANALISI MATEMATICA 2 (C.D.S. IN ASTRONOMIA, A.A. 2022-2023)

ALBERTO PARMEGGIANI

NOTA BENE: degli argomenti in grassetto si deve conoscere la dimostrazione.

Il corso e le referenze ai teoremi sono basate sul libro di testo, si veda la guidaweb.

1. Topologia di $\mathbb{R}^n$

(1) Definizione di norma di $\mathbb{R}^n$ e relativa distanza di due punti.
(2) Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e relativa norma. **La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**. Norma indotta da un prodotto scalare. Gli esempi $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$.
(3) **La norma indotta da un prodotto scalare soddisfa la disuguaglianza traingolare**. Angolo convesso tra due vettori.
(4) Palle aperte nella norma. Punti di accumulazione, punti isolati, punti interni, punti esterni, punti di frontiera. Parte interna di un insieme, frontiera di un insieme, chiusura di un insieme. Insiemi limitati. Intorni dell'infinito in $\mathbb{R}^n$.
(5) Definizione di insieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass sui punti di accumulazione di un insieme limitato (T. 10.3). Caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

2. Limiti, continuità e differenziabiità di funzioni di più variabili

(1) Limite di funzioni di più variabili.
(2) Definizione di funzione continua in un punto e su un insieme. Una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono le singole componenti.
(3) Teorema di Weierstrass (T. 10.10). Continuità uniforme e Teorema di Heine-Cantor (T. 10.13).
(4) La norma ed il prodotto scalare sono funzioni continue. Funzioni Lipschitziane.
(5) Curve continue, insiemi connessi (per archi), insiemi convessi.
(6) **Il Teorema degli zeri per funzioni scalari continue su un insieme connesso**. **L'immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua è un intervallo**.
(7) Definizione di derivata direzionale. Definizione di funzione differenziabile a valori scalari. **Se una funzione è differenziabile allora essa è continua e la derivata direzionale si esprime tramite il gradiente** (T. 11.4).
(8) Differenziabilità di somme, prodotti e quozienti di funzioni scalari.
(9) Funzioni di classe C^1. **Il Teorema dei differenziali totali** (T. 11.5).
(10) Il Teorema del valor medio (anche in forma integrale) di una funzione C^1 lungo un segmento (T. 11.8).

3. Punti estremali liberi

(1) Punti di max/min relativi. **Una funzione C^1 ha un punti di max/min interno se in quel punto il gradiente è nullo**. La condizione è solo necessaria. Se una funzione C^1 definita su un connesso ha gradiente nullo ovunque allora è costante.

(2) Derivate successive. Matrice Hessiana. **Il Teorema di Schwarz: se $f \in C^2$ allora la matrice Hessiana è simmetrica** (T. 11.11, facoltativo).
(3) Polinomio di Taylor del secondo ordine, formula di Taylor al secondo ordine con resto secondo Peano (T. 11.12).
(4) **Condizioni necessarie e condizioni sufficienti in termini della Hessiana affinché un punto critico interno sia di max/min relativo** (T. 11.25 e C. 11.26).
(5) Polinomio di Taylor di grado m, formula di Taylor di ordine m con resti secondo Peano e secondo Lagrange (T. 11.14).
(6) Definizione di funzione differenziabile a valori vettoriali. Una funzione a valori vettoriali è differenziabile se e solo se lo sono se singole componenti. La matrice Jacobiana. **Differenziabilità della composizione** (regola della catena; T. 11.29).

4. Curve, lunghezza di una curva, integrale curvilineo di funzioni e di forme differenziali, teoria dei potenziali

(1) Curve chiuse, semplici, piane, piane di Jordan. Orientazione positiva di una curva di Jordan. Curve regolari, retta tangente ad una curva regolare, curve regolari a tratti, curve equivalenti. Curve con lo stesso verso o con verso opposto.
(2) Integrale di Riemann di una funzione di una variabile a valori vettoriali. **La norma dell'integrale è minore o uguale all'integrale della norma** (T. 12.8). Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. **Una curva di classe C^1 ha lunghezza uguale all'integrale della norma della sua velocità** (T. 12.10). La lunghezza è invariante per curve equivalenti.
(3) Integrale curvilineo di una funzione scalare lungo una curva. **L'integrale curvilineo è invariante per curve equivalenti** (T. 12.11). Proprietà dell'integrale curvilineo di una funzione. Baricentro di una curva.
(4) Forme differenziali (campi vettoriali). Integrale di una forma differenziale/campo vettoriale lungo una curva. Proprietà dell'integrale di una forma differenziale su curve equivalenti.
(5) Forme differenziali esatte/campi vettoriali conservativi. Forme chiuse/campi irrotazionali.
(6) **Se una forma differenziale è esatta allora l'integrale su ogni curva dipende solamente dagli estremi della curva** (T. 12.16). **Non è vero che una forma chiusa sia esatta**.
(7) **Condizioni necessarie e sufficienti in termini di curve affinché una forma differenziale sia esatta** (T. 12.17).
(8) Curve omotope con gli stessi estremi. Insiemi semplicemente connessi. Un insieme è semplicemente connesso se e solo se ogni curva chiusa è deformabile in modo continuo ad un punto. Gli insiemi convessi e gli insiemi stellati sono semplicemente connessi. **L'integrale di una forma chiusa è costante su classi di curve omotope con gli stessi estremi** (T. 12.22, facoltativo). Ogni curva chiusa su un semplicemente connesso è esatta.

5. Max/min vincolati

(1) Il Teorema dell'invertibilità locale in $\mathbb{R}^n$ (T. 13.1).
(2) **Il Teorema di Dini per $n = 2$** (T. 13.3). Il Teorema di Dini nella forma generale (T. 13.2).

(3) Varietà immerse di $\mathbb{R}^n$, spazio e piano tangente, **caratterizzazione dello spazio tangente** (facoltativo), spazio normale. Definizione di punto di max/min vincolato. **Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange** (sezione 13.6).

6. Integrale multiplo (secondo Riemann), misurabilità secondo Peano-Jordan

(1) Funzioni integrabili su rettangoli e proprietà dell'integrale su rettangoli. Insiemi (limitati) misurabili secondo Peano-Jordan. Condizioni necessari e sufficienti di misurabilità in termini della frontiera. Integrale di funzioni limitate su insiemi limitati misurabili, proprietà dell'integrale.
(2) **Il grafico di una funzione continua ha misura nulla** (T. 14.11). Dominii x-semplici ed y-semplici. I dominii semplici sono misurabili.
(3) Il Teorema di riduzione per i dominii semplici (T. 14.17). Addività dell'integrale su dominii semplici.
(4) Il Teorema del cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^2$ (T. 14.19). Coordinate polari nel piano.
(5) Insiemi misurabili non limitati di $\mathbb{R}^2$. Famiglie di sottoinsiemi ammissibili per un aperto ed una funzione non negativa sull'aperto.
(6) Definizione di integrale in senso improprio ed integrabilità in senso improprio per funzioni non negative. **Il Teorema sull'integrale in senso improprio calcolato come limite**(T. 14.23). Teorema del confronto per l'integrale improprio (T. 14.24). Definizione di integrale improprio ed integrabilità in senso improprio per funzioni a segno qualunque. Una funzione f è integrabile in senso improprio se e solo se lo è $|f|$. **Calcolo di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.** Condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità di $\|x\|^{-\alpha}$ vicino a 0 ed all'∞ in $\mathbb{R}^2$.
(7) Integrale multiplo in $\mathbb{R}^3$. Teoremi di riduzione, di integrazione su dominii normali, di integrazione per fili e per sezioni (T. 14.27, T. 14.28). Coordinate sferiche, polari e cilindriche.

7. Superfici, integrale di superficie

(1) Definizione di superficie elementare, di punto interno di una superficie, di interno e di bordo. Definizione di punto regolare di una superficie, di spazio e piano tangente in un punto della superficie, di vettore normale. Forma d'area di una superficie regolare. Integrale di una funzione su una superficie e sue proprietà.
(2) Definizione di superficie orientabile, di orientazione di una superficie con bordo, di orientazione indotta sul bordo.

8. Formula di Green, i Teoremi della divergenza e di Stokes

(1) Dominii regolari a tratti in $\mathbb{R}^2$. **Formule di green per dominii regolari a tratti** (T. 16.3, dimostrazione nel caso x-semplice T. 16.1).
(2) I Teoremi della divergenza e di Stokes per dominii regolari a tratti del piano (T. 16.5, T. 16.6).
(3) Dominii regolari a tratti di $\mathbb{R}^3$. I Teoremi della divergenza e di Stokes per dominii regolari a tratti di $\mathbb{R}^3$ (T. 16.8, T. 16.9).

9. Equazioni ordinarie

(1) **I teoremi di caratterizzazione della soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine, caso omogeneo e non omogeneo** (T. 17.1, T. 17.2, T. 17.3(i).
(2) Equazioni del primo ordine a variabili separabili.
(3) Esistenza ed unicità del problema di Cauchy (caso scalare e caso sistemi). Esistenza globale.
(4) Equazioni lineari del secondo ordine. La matrice Wronskiana.
(5) Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, caso omogeneo e non omogeneo.
(6) Equazioni lineari di ordine m.
(7) Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Sistemi di equazioni lineari omogenee del primo ordine a coefficienti costanti.

10. Spazi di Hilbert

(1) Definizione di spazio di Hilbert.
(2) La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, identità del parallelogrammo.
(3) **Lo spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ (sui reali o i complessi)**.
(4) La distanza indotta dal prodotto interno è completa (cioè lo spazio di Hilbert con la distanza indotta dal prodotto interno è uno spazio metrico completo).