ANALISI MATEMATICA 2 (C.D.S. IN ASTRONOMIA, A.A. 2024-2025)

ALBERTO PARMEGGIANI - LOREDANA LANZANI

NOTA BENE: degli argomenti in grassetto si deve conoscere la dimostrazione.

Il corso e le referenze ai teoremi sono basate sul libro di testo, si veda la guidaweb.

PRIMA PARTE (A. Parmeggiani)

1. TEORIA DELLE SERIE DI POTENZE SU $\mathbb{R}$ (PARAGRAFO 9.3)

(1) Definizione di serie di potenze.
(2) **Il Lemma fondamentale (Lemma 9.4)**.
(3) Definizione di raggio di convergenza.
(4) **Caratterizzazione del raggio di convergenza (T. 9.6)**.
(5) **Il Teorema di Cauchy-Hadamard sulla determinazione del raggio di Convergenza (T. 9.7)**.
(6) Continuità, regolarità, integrabilità (e derivazione ed integrazione termine a termine) di una serie di potenze (T. 9.8, T. 9.9, T. 9.10; solo Continuità: facoltativo).

2. TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$ (PARAGRAFO 10.2)

(1) Definizione di norma di $\mathbb{R}^n$ e relativa distanza di due punti.
(2) Prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ e relativa norma euclidea. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angolo convesso tra due vettori. **Gli esempi** $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$. Tutte le norme di $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.
(3) Palle aperte nella norma e sistema di intorni di un punto di $\mathbb{R}^n$. Topologia sull'insieme $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Punti di accumulazione, punti isolati, punti interni, punti di frontiera.
(4) Parte interna di un insieme, frontiera di un insieme, chiusura di un insieme. Insiemi limitati.
(5) Paragrafo 10.3.1: Limiti di successioni di vettori di $\mathbb{R}^n$. Definizione di insieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass sui punti di accumulazione di un insieme limitato (T. 10.3). Caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

3. LIMITI, CONTINUITÀ E DIFFERENZIABIITÀ DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (PARAGRAFI 10.3–4 11.1–4)

(1) Limite di funzioni di più variabili. Il Teorema 10.16 sull'esistenza del limite per sottoinsiemi.
(2) Definizione di funzione continua in un punto e su un insieme. Una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono le singole componenti. Proprietà delle funzioni continue (rispetto a prodotto per uno scalare, alla somma vettoriale, alla composizione).
(3) Teorema di Weierstrass (T. 10.10).

(4) **La norma ed il prodotto scalare sono funzioni continue**.
(5) Curve continue, sostegno di una curva, curve di classe C^k. Insiemi connessi (per archi), insiemi convessi (Def. 11.15). **Le palle nella norma sono convesse**.
(6) **Il Teorema degli zeri per funzioni scalari continue su un insieme connesso**. **L'immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua a valori scalari è un intervallo**. **L'immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua a valori vettoriali è un connesso**.
(7) Definizione di derivata direzionale e di derivata parziale di una funzione a valori scalari. Definizione di funzione differenziabile a valori scalari. **Se una funzione** $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ **(**$X \subset \mathbb{R}^n$ **aperto) è differenziabile in** $x_0 \in X$ **allora essa è continua in** x_0 **e la derivata direzionale si esprime tramite il gradiente** $\nabla f(x_0)$ (T. 11.4).
(8) Il piano tangente al grafico di una funzione differenziabile scalare.
(9) Funzioni di classe C^1. Il Teorema dei differenziali totali (T. 11.5).
(10) Se f, g sono funzioni scalari differenziabili allora si ha: $\nabla(fg)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$, $\nabla(f/g)(x) = (g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x))/g(x)^2$. Se F è una funzione definita sull'immagine di f allora $\nabla(F \circ f)(x) = F'(f(x))\nabla f(x)$.
(11) Si ha $d/dt(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle$ dove $\gamma\colon I \longrightarrow X$ è una curva C^1, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile su $X \subset \mathbb{R}^n$ aperto.
(12) **Il Teorema del valor medio di una funzione** C^1 **intorno ad un segmento** (T. 11.8).
(13) Il Teorema del valor medio di una funzione lungo una curva di classe C^1.
(14) **Una funzione** $f \in C^1(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ **connesso e aperto, con** $\nabla f(x) = 0$ **per ogni** $x \in X$ **è una funzione costante**.

4. Punti estremali liberi

(1) Punti di max/min relativi, punti critici, punti di sella. **Se una funzione** C^1 **ha un punto di max/min interno allora in quel punto il gradiente è nullo**. La condizione è solo necessaria.
(2) Derivate successive. Matrice Hessiana. Il Teorema di Schwarz: se $f \in C^2$ allora la matrice Hessiana è simmetrica (T. 11.11).
(3) Polinomio di Taylor del secondo ordine, polinomio di Taylor di ordine m, **formula di Taylor al secondo ordine con resto secondo Peano** (T. 11.12).
(4) **Condizioni sufficienti in termini della Hessiana affinché un punto critico interno sia di max/min relativo** (T. 11.25 e C. 11.26).
(5) Definizione di funzione differenziabile a valori vettoriali. Una funzione a valori vettoriali è differenziabile se e solo se lo sono se singole componenti. La matrice Jacobiana. **Se una funzione a valori vettoriali è differenziabile allora è continua, l'approssimazione lineare è univocamente data dalla matrice Jacobiana, le derivate direzionali sono scritte tramite la matrice Jacobiana**. Il Teorema dei differenziali totali per funzioni a valori vettoriali. Differenziabilità della composizione (regola della catena; T. 11.29).

5. Max/min vincolati (Capitolo 13 ed Utilia)

(1) Il Teorema dell'invertibilità locale in $\mathbb{R}^n$ (T. 13.1).
(2) Il Teorema di Dini nella forma generale (T. 13.2). **Il Teorema di Dini per** $n = 2$ (T. 13.3).

(3) Varietà immerse di $\mathbb{R}^n$, spazio e piano tangente, **caratterizzazione dello spazio tangente** (facoltativo), spazio normale, **caratterizzazione dello spazio normale** (facoltativo). Definizione di punto di max/min vincolato. **Il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange** (sezione 13.6).

6. Integrale multiplo (secondo Riemann), misurabilità secondo Peano-Jordan (Capitolo 14 ed Utilia)

(1) Funzioni integrabili su rettangoli e proprietà dell'integrale su rettangoli. Insiemi (limitati) misurabili secondo Peano-Jordan. Condizioni necessari e sufficienti di misurabilità in termini della frontiera. Integrale di funzioni limitate su insiemi limitati misurabili.
(2) **Il grafico di una funzione continua ha misura nulla** (T. 14.11). Dominii x-semplici ed y-semplici. I dominii semplici sono misurabili.
(3) Il Teorema di riduzione per i dominii semplici (T. 14.17). Proprietà dell'integrale (spazio vettoriale, monotonia, media, additività su domini),
(4) Il Teorema del cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^2$ (T. 14.19). Coordinate polari nel piano.
(5) Integrale multiplo in $\mathbb{R}^n$. Teoremi di riduzione, di integrazione su dominii normali, di integrazione per fili e per sezioni (T. 14.27, T. 14.28). Coordinate sferiche, polari e cilindriche in $\mathbb{R}^3$.
(6) Insiemi misurabili non limitati di $\mathbb{R}^n$.
(7) Definizione di integrale in senso improprio ed integrabilità in senso improprio per funzioni non negative. Il Teorema sull'integrale in senso improprio calcolato come limite (T. 14.23). Teorema del confronto per l'integrale improprio (T. 14.24). Definizione di integrale improprio ed integrabilità in senso improprio per funzioni a segno qualunque. Una funzione f è integrabile in senso improprio se e solo se lo è $|f|$. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$. **Calcolo di $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.**
(8) Condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità di $\|x\|^{-\alpha}$ vicino a 0 ed all'∞ in $\mathbb{R}^n$.

7. Curve, lunghezza di una curva, integrale curvilineo di funzioni e di forme differenziali, teoria dei potenziali

(1) Curve chiuse, semplici. Curve regolari, retta tangente ad una curva regolare, curve regolari a tratti, curve equivalenti. Orientazione di una curva: curve con lo stesso verso o con verso opposto. **Costruzione della somma di curve ($\gamma_1 + \gamma_2$) e della curva opposta ($-\gamma$).**
(2) Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. Una curva di classe C^1 ha lunghezza uguale all'integrale della norma della sua velocità (T. 12.10).
(3) Integrale curvilineo di una funzione scalare lungo una curva. **L'integrale curvilineo è invariante per curve equivalenti** (T. 12.11). Proprietà dell'integrale curvilineo di una funzione. Baricentro di una curva.
(4) Forme differenziali (campi vettoriali). Integrale di una forma differenziale/campo vettoriale lungo una curva. **Proprietà dell'integrale di una forma differenziale su curve equivalenti**.
(5) Forme differenziali esatte/campi vettoriali conservativi.

(6) **Se una forma differenziale è esatta allora l'integrale su ogni curva dipende solamente dagli estremi della curva** (T. 12.16).
(7) **Condizioni necessarie e sufficienti in termini di curve affinché una forma differenziale sia esatta** (T. 12.17).
(8) Curve omotope con gli stessi estremi. Insiemi semplicemente connessi. Un insieme è semplicemente connesso se e solo se ogni curva chiusa è deformabile in modo continuo ad un punto. Gli insiemi convessi e gli insiemi stellati sono semplicemente connessi. **Ogni forma chiusa su un semplicemente connesso è esatta** (T. 12.22).

8. Superfici, integrale di superficie

(1) Definizione di superficie parametrizzata, definizione di superficie con bordo. Definizione di spazio e piano tangente in un punto della superficie, di vettore normale. Forma d'area di una superficie regolare. Integrale di una funzione su una superficie.
(2) Definizione di superficie orientabile, di orientazione di una superficie, di orientazione indotta sul bordo di una superficie (orientabile) con bordo.

9. Formula di Green, i Teoremi della divergenza e di Stokes

(1) Dominii regolari a tratti in $\mathbb{R}^2$. **Formule di green per dominii regolari a tratti** (T. 16.3, dimostrazione nel caso x-semplice T. 16.1).
(2) I Teoremi della divergenza e di Stokes per dominii regolari a tratti del piano (T. 16.5, T. 16.6).
(3) Dominii regolari a tratti di $\mathbb{R}^3$. I Teoremi della divergenza e di Stokes per dominii regolari a tratti di $\mathbb{R}^3$ (T. 16.8, T. 16.9).

SECONDA PARTE (L. Lanzani)

10. Equazioni differenziali ordinarie (Sezione 17.1)

(1) Definizione di Equazione Differenziale Ordinario (EDO)
(2) Classificazione delle EDO (Ordine; Lineare; Omogenea; Autonoma; in forma normale)
(3) **Soluzione generale di una EDO lineare omogenea e del problema di Cauchy ad essa associato** (T. 17.1)
(4) Esempio 17.2
(5) Definizione di EDO lineare non omogenea.
(6) **Soluzione generale di una EDO lineare non omogenea e del problema di Cauchy ad essa associato** (T. 17.2)
(7) Determinazione di una soluzione particolare di una EDO non omogenea: metodo della variazione della costante (T. 17.3; Esempio 17.3; Esempio 17.4)
(8) Determinazione di una soluzione particolare di una EDO non omogenea: esempi di approcci "ad hoc": Esempio 17.5; Esempio 17.6.

11. EDO non lineari del primo ordine (Sezione 17.2)

(1) **Esempio 17.9**
(2) **Esempio 17.10**

(3) Una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità locali della soluzione del problema di Cauchy per una EDO del prim'ordine non necessariamente lineare (T. 17.4)
(4) **Esempio 17.12**
(5) La crescita lineare in y garantisce la massimalità ottimale dell'intervallo di risolubilità del problema di Cauchy (T. 17.5)
(6) Sistemi di n EDO del prim'ordine e **procedura che ne stabilisce l'equivalenza** con (singola) EDO di ordine n,

12. EDO lineari del secondo ordine (Sezione 17.3)

(1) Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Dirichlet associato ad una EDO lineare di ordine 2 (**T. 17.7**)
(2) Funzioni linearmente indipendenti; funzioni linearmente dipendenti (D. 17.8)
(3) Criterio del Wronskiano per caratterizzare l'indipendenza lineare di due funzioni (L. 17.9)
(4) **Esempio 17.14**
(5) Soluzione generale della EDO lineare non omogenea di ordine 2 (T. 17.10)

13. EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (Sezioni 17.3.1 e 17.3.2)

(1) Soluzione generale dell'EDO omogenea lineare di ordine 2 a coefficienti costanti (**T. 17.11**)
(2) **Esempio 17.15**
(3) **Metodo di variazione delle costanti**
(4) **Esempio 17.16**
(5) **Metodi ad hoc: Esempio 17.17**
(6) **Metodi ad hoc: Esempio 17.18**
(7) **Metodi ad hoc: Esempio 17.19**

14. Metodi risolutivi per EDO a coefficienti non costanti (Sezioni 17.5.1 - 17.5.4)

(1) **Metodo di riduzione dell'ordine: Esempio 17.23**
(2) Metodo di D'Alembert
(3) **EDO di Legendre**
(4) **Cambiamento di variabili per la EDO di Eulero**
(5) EDO Autonome di Ordine 2: **Esempio 17.27, con y' invece di** $(y')^2$
(6) Metodo di Frobenius: **Esempio 17.28**

15. Spazi di Hilbert (cenni)

(1) Definizione di prodotto scalare o prodotto interno
(2) Definizione di norma
(3) Definizione di distanza o metrica
(4) Definizione di metrica completa
(5) Definizione di Spazio di Hilbert
(6) Proprieta' elementari di uno spazio di Hilbert: diseguaglianza di Cauchy-Schwartz; identita' del parallelogramma.

(7) Esempi di spazio di Hilbert: lo spazio euclideo
(8) Esempi di spazio di Hilbert: successioni numeriche a quadrato sommabile: successioni reali e successioni complesse
(9) Esempi di spazio di Hilbert: funzioni a quadrato sommabile.