PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI 2 ASTRONOMIA, A.A. 2018-2019

ALBERTO PARMEGGIANI

Nota bene: degli argomenti in grassetto è richiesta la dimostrazione.

1. Topologia di $\mathbb{R}^n$

- Definizione di norma e prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e proprietà.
- Definizione di intorno circolare di un punto di raggio r. Parte interna, parte esterna e frontiera di un insieme.
- Insiemi aperti ($\mathbb{R}^n$ e l'insieme vuoto sono aperti). L'unione infinita di aperti è aperta, **l'intersezione finita di aperti è aperta**. Insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ e l'insieme vuoto sono chiusi). Condizione necessaria e sufficiente in termini della frontiera affinché un insieme sia aperto. Condizione necessaria e sufficiente in termini della frontiera affinché un insieme sia chiuso. Punti di accumulazione. Derivato di un insieme. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un insieme sia chiuso in termini del derivato.
- Insiemi sconnessi e connessi, insiemi compatti. Limite di successioni in $\mathbb{R}^n$.

2. Continuità e differenziabilità di funzioni di più variabili

- Limiti e continuità di funzioni di più variabili a valori reali e a valori in $\mathbb{R}^m$.
- Teorema di Bolzano-Weierstrass; le funzioni continue su un compatto ammettono max e min assoluti; il Teorema di Heine-Cantor; le funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ mutano un connesso in un intervallo, il caso di funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^m$.
- Norme equivalenti. Le norme $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$, $\|x\|_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.
- La composizione di funzioni continue è continua. **Il prodotto scalare è continuo**.
- Derivate parziali e derivate direzionali. Definizione del vettore gradiente. Il teorema del valor medio di Lagrange.
- Definizione di differenziabilità. **Le funzioni differenziabili sono continue**.
- **Espressione della derivata direzionale tramite il gradiente**.
- Significato geometrico di differenziabilità (grafico e piano tangente al grafico).
- Definizione di funzione di classe C^1.
- **Il teorema del differenziale totale: se f è C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora f è differenziabile in ogni punto di Ω**.
- Matrice Jacobiana di una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Derivate successive, matrice Hessiana. **Teorema di Schwarz sulla simmetria della matrice Hessiana**.
- Teorema sul differenziale della applicazione composta (regola della catena).

3. Punti estremali liberi, formula di Taylor

- **La derivata direzionale nella direzione del gradiente è quella di massima variazione della funzione**.
- **Condizione necessaria per avere un punto di max/min in un punto interno: $\nabla f = 0$ in tale punto**.
- **La formula di Taylor al secondo ordine**
- **Condizioni necessarie affinché un punto interno sia di max/min locale**.

- **Condizioni sufficienti affinché un punto sia di max/min locale**.

4. Integrale multiplo secondo Riemann, misura di Peano-Jordan, integrale multiplo generalizzato

- Rettangoli chiusi di $\mathbb{R}^2$; scomposizioni di un rettangolo chiuso Q; somme superiori e somme inferiori di una funzione reale limitata su Q; definizione di integrale di f su Q.
- Il teorema di Riemann sull'integrabilità tramite la differenza di somme superiori e somme inferiori. Una funzione continua su Q è sempre $\mathscr{R}$-integrabile.
- Supporto di una funzione, definizione di integrabilità di una funzione a supporto compatto; definizione di integrabilità di una funzione a supporto compatto su un sottoinsieme del supporto.
- Definizione di plurirettangolo e sua misura. Definizione di misurabilità di un insieme limitato secondo Peano-Jordan e di misura di un insieme misurabile.
- Condizione di misurabilita‘ espressa in termini di plurettangoli che contengono l'insieme/sono contenuti nell'insieme.
- Un insieme è PJ-misurabile se e solo se la misura della sua frontiera è zero.
- Un insieme è misurabile e di misura nulla se è ricopribile da plurirettangoli di misura arbitrariamente piccola.
- Il grafico di una funzione Riemann-integrabile su un intervallo ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$.
- Unione, intersezione e differenzie di insiemi misurabili sono misurabili.
- Una funzione limitata su Q con insieme delle discontinuità di misura nulla è $\mathscr{R}$-integrabile.
- Insiemi x ed y normali (semplici). Gli insiemi normali sono PJ-misurabili.
- Una funzione limitata su Q con insieme delle discontinuità di misura nulla è $\mathscr{R}$-integrabile.
- Teorema di riduzione di Fubini.
- Teorema del cambiamento di variabile nell'integrale di Riemann multiplo. Esercizi sugli integrali multipli. Coordinate polari, cilindriche e sferiche e rispettivi determinanti jacobiani.
- Integrali multipli generalizzati (o impropri): definizioni e proprietà principali.
- **Integrazione della funzione $1/\|x\|^\alpha$ vicino all'origine, integrazione di $e^{-(x^2+y^2)}$ su $\mathbb{R}^2$**.
- Volume delle figure di rotazione.
- Continuità e derivabilità rispetto ad un parametro di integrali multipli.

5. Successioni e serie di funzioni, serie di potenze, funzioni analitiche

- Convergenza puntuale e convergenza uniforme di successioni (e serie) di funzioni. La norma $\| \ \|_\infty$.
- **La convergenza uniforme implica quella puntuale**.
- **Il limite uniforme di funzioni continue è continuo**. **Il limite uniforme di una successione di funzioni $\mathscr{R}$-integrabili su $[a,b]$ è $\mathscr{R}$-integrabile su $[a,b]$ e l'integrale del limite è il limite degli integrali per successioni di funzioni**. **Teorema sullo scambio del segno di limite uniforme con l'operatore derivata per successioni di funzioni**.
- Convergenza totale delle serie di funzioni. **La convergenza totale implica la convergenza puntuale ed implica la convergenza uniforme**.
- Serie di potenze. Il lemma fondamentale: **Se $y \neq 0$ è un punto di convergenza per la serie di potenze, allora la serie converge totalmente su $[-\rho,\rho]$ per ogni $0<\rho<|y|$**. Raggio di convergenza e sue proprietà. **La serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie data**. **Il teorema di Cauchy-Hadamard sul raggio di convergenza delle serie di potenze**. Una serie di potenze definisce una funzione C^∞ sul suo dominio di convergenza. Espressione dei coefficiente della serie di potenze in termini delle derivate in x_0 della funzione serie di potenze. Definizione di funzione analitica in un intervallo aperto. Esistono funzioni C^∞ che non sono analitiche. **Condizioni sufficienti affinché una funzione C^∞ sia analitica su un intervallo aperto I della retta reale**.

6. Problema di Cauchy del primo ordine lineare e a variabili separabili

- **Esistenza ed unicità del problema di Cauchy lineare del primo ordine**.
- **Esistenza ed unicità del problema di Cauchy del primo ordine a variabili separabili**.

7. Problema di Cauchy generale

- Definizione di equazione (sistema) differenziale e di problema di Cauchy, definizione di soluzione dell'equazione e del problema.
- **Ogni equazione differenziale scalare di ordine m è equivalente ad un sistema di equazioni**.
- Definizione di funzione localmente lipschitziana. Il teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.
- Definizione di estensione di una soluzione. Lemma di incollamento.
- Soluzioni massimali. Teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali di un Problema di Cauchy. Condizioni sufficienti affinché una soluzione massimale sia definita per tutti i tempi dell'intervallo I.
- Equazioni differenziali scalari di ordine m a coefficienti continui: $\mathrm{Ker}\,P$ **è uno spazio vettoriale di dimensione** m. Definizione di m-upla fondamentale, matrice wronskiana, determinante wronskiano. **Il teorema di Liouville sul determinante del wronskiano**. **Il metodo di Lagrange della variazione della costante arbitraria per l'equazione** $Pu = f$ **di ordine** m. Sistemi fondamentali per equazioni a coefficienti costanti.
- m-uple fondamentali per equazioni a coefficienti costanti. Equazioni ordinarie a coefficienti costanti: determinazione di una m-upla fondamentale in relazione alle radici del polinomio caratteristico.

8. Curve, lunghezza, integrale curvilineo; superfici regolari, integrale di superficie

- Definizione di curva di $\mathbb{R}^n$. Traiettoria o sostegno di una curva. Curve chiuse, semplici, regolari, regolari a tratti. Vettore velocità. Somma di due curve e opposto di una curva.
- Definizione di curve equivalenti; **se due curve sono equivalenti allora una è regolare se e solo se lo è anche l'altra**; versore tangente; definizione di curve equivalenti con lo stesso verso.
- Definizione di lunghezza di una curva. **Una corda con estremi sulla curva ha lunghezza minore di quella della curva**; il sup delle lunghezze delle spezzate sulla curva eguaglia la lunghezza della curva. **Invarianza della lunghezza per riparametrizzazioni e dunque non dipende dal verso di percorrenza della curva**. Lunghezza di una somma di curve.
- Definizione di integrale curvilineo di una funzione a valori in $\mathbb{R}$. **L'integrale curvilineo di una funzione è invariante per riparametrizzazione e dunque non dipende dal verso di percorrenza della curva**. Baricentro di una curva.
- Definizione di superficie regolare parametrizzata. L'esempio dei grafici di funzioni di due variabili. Superfici di rotazione. Spazio tangente e piano tangente ad una superficie regolare parametrizzata. Elemento d'area di una superficie regolare.

9. Punti estremali vincolati

- **I punti estremali (interni) su curve regolari del piano sono tali che ∇f è ortogonale alla curva**; **i punti estremali (interni) su superfici regolari di $\mathbb{R}^3$ sono tali che ∇f è normale alla superficie**; il sistema dei moltiplicatori di Lagrange. **Il teorema delle funzioni implicite di Dini** (dimostrazione in 2 variabili). **Il gradiente di una funzione alla quale si può applicare il teorema di Dini è sempre ortogonale al suo insieme degli zeri**.

- Il teorema delle funzioni implicite in versioni più generali (una equazione in $n+1$ variabili, due equazioni in $\mathbb{R}^3$).
- Definizione di vincolo locale di $\mathbb{R}^n$ di codimensione r (varietà immersa di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-r$), spazio tangente e spazio normale ad un vincolo.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

10. Lavoro di un campo di forze/forme differenziali, forme differenziali chiuse, forme differenziali esatte

- Definizione di lavoro di un campo di forze lungo una curva regolare regolare a tratti (su somme di curve). **Il lavoro di un campo di forze dipende dal verso di percorrenza della curva**.
- Definizione di 1-forma di classe C^k su un aperto. Integrale curvilineo di una 1-forma differenziale e sue proprietà. Forme differenziali esatte, potenziali.
- **Condizione necessaria affinché una 1-forma ammetta un potenziale: l'integrale curvilineo su ogni curva regolare chiusa deve essere zero**. Esempio di forma differenziale non esatta.
- Definizione di insieme convesso e di insieme connesso per archi. Gli aperti connessi sono connessi per archi semplici regolari a tratti.
- **Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma a coefficienti continui sia esatta**. **Corollario: L'1-forma ω di classe C^0 è esatta se e solo se l'integrale sulle curve chiuse semplici e regolari a tratti è zero**. Definizione di forma chiusa. **Forma esatta implica forma chiusa ma forma chiusa non implica forma esatta**. Calcolo di potenziali e di integrali curvilinei di forme differenziali.
- Aperti stellati. **Il teorema di Poincaré: su un aperto stellato ogni forma chiusa è esatta**.

11. Il Teorema di Gauss-Green, della divergenza, di Stokes

- **Il Teorema di Gauss-Green per domini con frontiera regolare a tratti del piano**.
- Aperti semplicemente connessi del piano. Per le forme definite su domini semplicemente connessi del piano vale che esse sono chiuse se e solo sono esatte.
- **Il Teorema della divergenza per domini del piano con frontiera regolare a tratti**.
- **Il Teorema di Stokes per campi planari** e per campi definiti su una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ con bordo regolare a tratti.
- Aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^3$. Per le forme definite su domini semplicemente connessi di $\mathbb{R}^3$ vale che esse sono chiuse se e solo sono esatte.