PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI 2 (C.D.S. IN MATEMATICA) , A.A. 2018-2019

BRUNO FRANCHI E ALBERTO PARMEGGIANI

Nota bene: degli argomenti in grassetto è richiesta la dimostrazione.

1. Topologia di $\mathbb{R}^n$

- Distanze equivalenti.
- Completezza di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla distanza euclidea.
- Insiemi aperti e chiusi. **Loro proprietà**. Interno e frontiera di un insieme.
- Insiemi compatti. **Caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$**.
- Insiemi connessi, connessi per archi. **Gli aperti connessi sono connessi per poligonali**. Insiemi convessi.

2. Funzioni di più variabili

- Definizione di limite e limite per restrizioni. Funzioni continue, **Teorema di Weierstrass**.
- **Teorema di Bolzano**.
- Definizione di differenziabilità. **Differenziabilità implica continuità**. Matrice Jacobiana. Regola della catena. **Il teorema del differenziale totale: C^1 implica differenziabile**. Teorema di Schwarz.
- Massimi e minimi locali. **Teorema di Fermat (condizione necessaria di punto estremale locale)**.
- Matrice hessiana. **Formula di Taylor**.
- **Massimi e minimi e matrice hessiana: condizioni necessarie e condizioni sufficienti**.
- **Teorema di Dini (dimostrazione nel caso $n = 2$)**.
- Teorema dell'invertibilità locale.
- Definizione di varietà in $\mathbb{R}^n$, spazio tangente e spazio normale. Varietà localmente come grafici. **Caratterizzazione dello spazio tangente**.
- Massimi e minimi vincolati. **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange**.

3. Curve, lavoro di un campo di forze/forme differenziali, forme differenziali chiuse, forme differenziali esatte

- Curve regolari, regolari a tratti, curve equivalenti, curve orientate. Somma di curve ed opposto di una curva. Lunghezza di una curva. Integrale curvilineo di una funzione e **sue proprietà**.
- Forme differenziali e loro integrale lungo una curva. **Proprietà**.
- Forme differenziali e campi vettoriali. Lavoro di un campo lungo una curva.
- **Gli aperti connessi sono connessi per archi regolari a tratti**.
- Definizione di forma differenziale esatta. **Condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza di una forma differenziale su aperti connessi**. Definizione di forma differenziale chiusa. Definizione di aperto stellato. **Il teorema di Poincaré di esattezza delle forme differenziali chiuse su aperti stellati**. Aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. **Ogni forma differenziale chiusa su aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è esatta**.

4. Equazioni differenziali

- Definizione di soluzione di un'equazione differenziale. **Teorema di esistenza ed unicità locale**. Restrizioni ed estensioni di soluzioni. Il lemma di incollamento. Definizione di soluzione massimale. **Teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali del problema di Cauchy e comportamento delle soluzioni massimali agli estremi dell'intervallo di esistenza**. **Il lemma di Gronwall**. **Condizioni sufficienti per soluzioni definite in tutto l'intervallo dei tempi**. Sistemi gradiente e sistemi hamiltoniani. **Equivalenza di un'equazione di ordine** m **con un sistema differenziale** $m \times m$.
- Sistemi differenziali lineari:
  - **Definizione e proprietà dell'esponenziale di una matrice**.
  - **Caratterizzazione della soluzione del problema di Cauchy** $x' = Ax, x(t_0) = x_0$**, con** $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **e** A **matrice reale** $n \times n$. **Scrittura della soluzione in termini degli autospazi generalizzati di** A. **Soluzione del problema di Cauchy non omogeneo**.
- Equazioni differenziali scalari di ordine m:
  - Operatori differenziali di una variabile. Proprietà di linearità.
  - **Caratterizzazione del nucleo di un operatore differenziale di ordine** m. m-upla fondamentale di soluzioni. Matrice wronskiana. **Il teorema di Liouville sul determinante della matrice wronskiana**.
  - **Il metodo della variazione della costante arbitraria di Lagrange per la determinazione di una soluzione particolare**.
  - **Operatori differenziali a coefficienti costanti, polinomio caratteristico, determinazione di una** m**-upla fondamentale**.

5. Misura, funzioni misurabili e integrale di Lebesgue

- Definizione di algebra e di σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Funzioni d'insieme non negative, additive e σ-additive. **Proprietà**. **Il teorema sul limite di famiglie crescenti di insiemi**. Intervalli di $\mathbb{R}^n$. Misura di intervalli. Insiemi elementari. Misure non negative e misure regolari. Misura esterna. **La misura esterna estende la misura ed è** σ**-subadditiva**. Differenza simmetrica di insiemi e proprietà. Definizione di insieme misurabile di tipo finito e di insieme misurabile (secondo la misura regolare iniziale definita sugli insiemi elementari). **Gli insiemi misurabili formano una** σ**-algebra sulla quale la misura è** σ**-additiva**. Conseguenze: $\mathbb{R}^n$ è misurabile, gli aperti e chiusi sono misurabili, gli insiemi di misura nulla formano una sotto σ-algebra, approssimazione dei misurabili dall'esterno con aperti e dall'interno con chiusi. Esistono insiemi non misurabili. La condizioni di misurabilità di Carathéodory.
- Funzioni misurabili. **Condizioni equivalenti**. **Misurabilità di** $\sup_{k\geq 1} f_k$**,** $\inf_{k\geq 1} f_k$**,** $\lim_{k\to+\infty} f_k$ **(**f_k **misurabili), di** $F(f,g)$ **(**f,g **misurabili e** F **continua)**. Funzioni semplici. **Teorema di approssimazione di una funzione misurabile tramite funzioni semplici**.
- Definizione di integrale di Lebesgue di una funzione semplice misurabile e non negativa. Funzioni integrabili (in senso esteso) e funzioni sommabili. Il contributo degli insiemi di misura nulla. **Proprietà di** σ**-additività di funzioni d'insieme con densità non negativa oppure sommabile di segno qualunque**. **Disuguaglianza di Chebyshev**. **Le funzioni sommabili sono finite quasi dappertutto**. **Sommabilità di** $|f|$. **Teorema di convergenza monotona di Beppo Levi**. **La somma di funzioni sommabili è sommabile con proprietà di linerarità dell'integrale**. **Il lemma di Fatou**. **Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue**. Confronto con l'integrale secondo Riemann: il Teorema di Lebesgue-Vitali. Teorema della convergenza dominata e proprietà di integrali di funzioni dipendenti da parametri (continuità e differenziabilità).
- Il teorema di Fubini ed il teorema di Tonelli. Teorema del cambiamento di variabile nell'integrale di Lebesgue. Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$. **Calcolo dell'integrale della gaussiana**.

- **Sommabilità della funzione $1/\|x\|^{\alpha}$ vicino all'origine e all'infinito**.

6. SUPERFICI REGOLARI, TEOREMA DI GAUSS-GREEN, DELLA DIVERGENZA, DI STOKES

- Insiemi con frontiera regolare del piano, orientazione positiva della frontiera. **Il teorema di Gauss-Green nel piano per domini con frontiera regolare a tratti (dimostrazione per aperti y-normali)**. **Il teorema della divergenza per dominii regolari planari**. **Il teorema di Stokes per campi planari**.
- Definizione di superficie regolare parametrizzata di $\mathbb{R}^3$. Spazio tangente, piano tangente, spazio normale, retta normale ad una superficie regolare parametrizzata. Elemento d'area di una superficie regolare. Superfici equivalenti (per riparametrizzazione). Mappa di Gauss di una superficie. Superfici orientabili.
- Orientazione indotta dalla normale sul bordo di sottoinsiemi regolari di una superficie. Il teorema di Stokes per campi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ su superficie regolari di $\mathbb{R}^3$.