MATEMATICA GENERALE CLAMM AA 14-15

PROGRAMMA PARTE ALGEBRA LINEARE

(1) **Sistemi lineari e matrici:** sistemi triangolari; a scala e loro risolubilità; matrice dei coefficienti e vettore dei termini noti; vettore soluzione; matrice completa; matrici triangolari ed a scala; risolubilità dei sistemi triangolari; sistemi compatibili e sistemi equivalenti; matrici a scala; rango di una matrice a scala; il teorema di Rouché-Capelli per i sistemi a scala; lemma di equivalenza per i sistemi lineari; metodo di riduzione di Gauss-Jordan; rango di una matrice; il teorema di Rouché-Capelli generale; matrici quadrate singolari e non-singolari; i sistemi omogenei sono sempre compatibili.

(2) **Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sottospazi vettoriali:** le operazioni di somma vettoriale e di prodotto per uno scalare e loro proprietà; sottospazi vettoriali e condizione necessaria affinché un insieme sia un sottospazio vettoriale; combinazioni lineari di vettori; vettori linearmente indipendenti e relazione con i sistemi lineari omogenei; criterio di lineare indipendenza di due vettori; $k > n$ vettori di $\mathbb{R}^n$ non possono essere linearmente indipendenti; lineare indipendenza e rappresentazione univoca di combinazioni lineari; spazio generato da una famiglia di vettori e sua proprietà di essere un sottospazio vettoriale; basi e dimensione di uno spazio vettoriale; lo spazio $\mathrm{Im}(A)$ generato dalle colonne della matrice A; il sistema $[A|b]$ è compatibile se e solo se b appartiene ad $\mathrm{Im}(A)$; piani e rette vettoriali e loro rappresentazione cartesiana tramite il teorema di Rouché-Capelli; vettore trasposto.

(3) **Prodotto di matrici e struttura delle soluzioni di un sistema lineare:** prodotto righe-per-colonne e sue proprieà; il prodotto non è commutativo; matrici sclari, diagonali e matrice identità; matrice trasposta e trasposta di un prodotto; matrici invertibili; unicità dell'inversa; invertibilità di un prodotto; il nucleo di una matrice, $\mathrm{Ker}(A)$, è un sottospazio vettoriale; inversa dell'inversa; una matrice è invertibile se e solo se essa ammette un'unica inversa destra; una matrice è invertibile se e solo se essa ha rango massimo; il metodo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa; la relazione $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ e metodo di estrazione di una base da un sistema di generatori; la relazione $\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$; struttura dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare; interpretazione del teorema di Rouché-Capelli tramite le dimensioni di $\mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Ker}(A)$.

(4) **Determinanti:** proprietà definitorie del determinante; calcolo del determinante di una matrice 2×2; formula di sviluppo di Laplace dei determinanti; $\det(A) = \det(A^T)$; il teorema di Binét $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; la matrice A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$; la formula dell'inversa di una 2×2 tramite il determinante; la matrice $\mathrm{Agg}(A)$; la formula $A^{-1} = \mathrm{Agg}(A)/\det(A)$; formula di Cramer.

(5) **Diagonalizzazione:** autovalori ed autovettori; polinomio caratteristico; autospazi; molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore; la somma di tutti gli autovalori (ripetuti secondo molteplicità algebrica) è la traccia della matrice; il prodotto di tutti gli autovalori (ripetuti secondo molteplicità algebrica) è il determinante della matrice; il teorema spettrale per le matrici simmetriche.

PROGRAMMA PARTE ANALISI MATEMATICA

(1) Richiami sugli insiemi e sulle operazioni tra insiemi (unione, intersezione, uguaglianza, differenza). L'insieme $\mathbb{R}$ e gli intervalli di $\mathbb{R}$. Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}$. La necessità di considerare $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}$ non è razionale. Massimo e minimo di un insieme e sua unicità. Il buon ordinamento di $\mathbb{N}$ ed il Principio d'Induzione Matematica. Esempi: a disuguaglianza di Bernoulli, la somma dei primi n interi, la somma parziale della serie geometrica, la formula del binomio $(a+b)^n$. Maggioranti e minoranti di un sottoinsieme, sup ed inf. loro caratterizzazione. Incompletezza di $\mathbb{Q}$. Assioma di completezza di $\mathbb{R}$ e sue conseguenze. Il valore assoluto $|x|$ e la distanza $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$, sue proprietà e conseguenze.

(2) Funzioni come relazione, dominio, codominio, immagine e controimmagine. Campo di esistenza di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Composizione di funzioni. Funzione inversa. Una funzione è invertibile se e solo se essa è biettiva. Unicità della funzione inversa. Funzioni pari, dispari e periodiche. Funzioni monotòne (crescenti/decrecenti).

(3) La topologia della retta reale: l'intorno di un punto, gli intorni di $\pm\infty$. Punti aderenti, di accumulazione ed isolati. Punti isolati.

(4) Limiti di funzioni numeriche in un punto, limite destro/sinistro. Relazione tra l'esistenza del limite in un punto e l'esistenza dei limiti destro e sinistro. Asintoti verticali di una funzione.

(5) Limiti di funzioni numeriche a $\pm\infty$. Asintoti orizzontali di una funzione. Teoremi sui limiti di una funzione numerica: unicità del limite, permanenza del segno, segno del limite, confronto (dei due carabinieri). Limiti di funzioni monotòne. Forme indeterminate ($+\infty - \infty$, 0∞, ∞/∞, $0/0$, $0^{+\infty}$, 0^0, $(+\infty)^0$, 1^∞). Il limite notevole $\sin(x)/x \to 1$ per $x \to 0$ e sottoprodotti (per $\cos(x)$ e $\mathrm{tg}(x)$); i limiti

notevoli $(e^x - 1)/x \to 1$ e $\ln(1 + x)/x \to 1$ per $x \to 0$ (solo enunciato). L'algebra dei limiti. Definizione di $o(|x - x_0|^\alpha)$ per $x \to x_0$, $o(x^k) = x^k o(1)$.

(6) Funzioni continue: definizione. Continuità della somma e del prodotto, continuità del reciproco e della funzione composta. Teorema di Bolzano e Teorema dei valori intermedi (con dimostrazioni). Definizione di funzione limitata superiormente/inferiormente, di funzione limitata, di max/min di f su un insieme, di punto di massimo/minimo. Definizione di massimo/minimo locale. Esistenza di minimo e massimo di una funzione: il Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione). Continuità della funzione inversa. Punti di discontinuità di una funzione (di tipo salto, essenziale ed eliminabile).

(7) Funzioni derivabili: retta tangente, rapporto incrementale, derivata (nel senso di Cauchy). Interpretazione grafica. Derivabilità implica continuità. Funzioni derivabili nel senso di Carathéodory, equivalenza con l'usuale derivabilità. Regole di calcolo delle derivate: somma (con dimostrazione), prodotto (con dimostrazione), quoziente (con dimostrazione), composizione, inversa. Calcolo di derivate di funzioni notevoli.

(8) Punti stazionari (critici). Teorema di Fermat: condizione necessaria per i punti interni di massimo o minimo. I teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy (tutti con dimostrazione). Monotònia e derivate. Applicazione del teorema del valor medio: f derivabile su un intervallo con $f' = 0$ implica $f =$costante.

(9) Il Teorema di De L'Hospital (con dimostrazione). Derivate successive. Le funzioni di classe C^k. Applicazioni del Teorema di De L'Hospital alle forme indeterminate, calcolo di varie forme indeterminate importanti. Asintoti obliqui ed equivalenza dell'asintoto obliquo col fatto che la distanza dei punti del grafico dall'asintoto tende a 0 per $x \to \infty$. Polinomio di Taylor $T_k(x; x_0)$ di grado k in x_0. La formula $T_k^{(m)}(f, x; x_0) = T_{k-m}(f^{(m)}, x; x_0)$. Formula di Taylor con resto secondo Lagrange e secondo Peano: l'esempio del polinomio di Taylor di primo grado, il caso generale (con dimostrazione). Una funzione f di classe C^2 con $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (risp. < 0) ha in x_0 un punto di minimo (risp. massimo) locale (uso del polinomio di Taylor con resto secondo Lagrange). Se f è di classe C^m con m pari e x_0 è tale che $f'(x_0) = ... = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(m)}(x_0) > 0$ (risp. < 0) allora x_0 è un punti di minimo (risp. massimo) locale.

(10) Funzioni convesse e derivate: criteri equivalenti per funzioni derivabili, e poi derivabili fino al secondo ordine. Punti di flesso. Gli esempi dell'esponenziale e del logaritmo come funzioni convesse/concave. Se f è convessa allora $f(\sum \lambda_j x_j) \leq \sum \lambda_j f(x_j)$, dove $\sum \lambda_j = 1$. La media geometrica è dominata da quella aritmetica.

(11) Se f, g sono derivabili sull'intervallo I e tali che $f' = g'$ per ogni x, allora f e g differeiscono per una costante. La formula $\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arctg}(1/x) = \pm\pi/2$, $\pm x > 0$, e le sue applicazioni al comportamento di $\mathrm{arctg}(x)$ per $x \to \pm\infty$. Uso della formula di Taylor per la ricerca di massimi e minimi, crescenza e decrescenza (quando $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, in dipendenza dalla parità di n e dal segno di $f^{(n)}(x_0)$ quando n è pari; quando n è dispari allora si usa il fatto che $f'(x_0) = 0$ e $(f')^{(n-1)}(x_0) \neq 0$ per ottenere che se > 0 allora $f' \geq 0$ e dunque f è crescente, se < 0 allora $f' \leq 0$ e dunque f è decrescente vicino ad x_0).

(12) Integrazione: scomposizione di un intervallo, parametro di finezza di una scomposizione, scomposizione più fine di un'altra, somme superiori ed inferiori (di Darboux). Proprietà delle somme inferiori e superiori rispetto alle scomposizioni di $[a, b]$. Integrale inferiore ed integrale superiore. Definizione di integrale secondo Riemann. Funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema di integrabilità di Riemann. Somme di Riemann. Funzioni integrabili e proprietà dell'integrale. La notazione generale di $\int_a^b f(x)dx$ (in dipendenza dalla relazione tra a e b). Le funzioni continue su $[a, b]$, le funzioni limitate e monotone su $[a, b]$, le funzioni generalmente continue sono tutte integrabili. Il teorema della media integrale per funzioni continue. Definizione di primitiva. Due primitive differiscono per una costante. La funzione integrale di punto iniziale x_0. Il Primo Teorema Fondamentale del calcolo integrale per funzioni continue. Il Secondo Teorema Fondamentale del calcolo integrale e il calcolo dell'integrale da a a b di una funzione continua. Integrale definito ed integrale indefinito. Integrazione per sostituzione e per parti. Formula di Taylor con resto integrale. Integrazione delle funzioni razionali tramite il metodo dei parziali fratti (formula di Hermite). Area di alcune regione del piano del tipo $\{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}; f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(13) Il problema di Cauchy: esempi di problema di Cauchy del primo ordine. Enunciato del teorema di esistenza ed unicit del problema di Cauchy del primo ordine. Soluzione del problema di Cauchy del primo ordine lineare. Soluzione del problema di Cauchy del primo ordine a variabili separabili.

(14) Integrali generalizzati su $[a, +\infty)$, su $[a, b)$: criterio del confronto, confronto asintotico, confronto con $x^{-\alpha}$. Integrale generalizzato su $(-\infty, +\infty)$.

(15) Serie: definizione, definizione di serie convergente, divergente, oscillante. Condizione necessaria di convergenza. Criterio di Cauchy di convergenza. La serie armonica non converge. Serie a termini positivi: il limite esiste sempre, finito o infinito. Criterio del confronto, della radice (col limite), del rapporto (col limite). La serie di Mengoli

(serie telescopica). Criterio del confronto asintotico. Criterio integrale. Convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (serie armonica generalizzata di ordine α) e della serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha |\ln n|^\beta}$.

(16) Soluzione delle equazioni alle differenze di primo ordine a coefficienti costanti.