MATEMATICA GENERALE

(Alberto PARMEGGIANI)

1. ALGEBRA LINEARE

1.1. **Vettori nel piano $\mathbb{R}^2$, nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, e nello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$.** Si consideri l'insieme dei **vettori** del piano

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ;\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un punto (x_1, x_2) del piano cartesiano è identificato con un elemento $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, si hanno (per definizione) le operazioni di "prodotto per uno scalare" e di "somma tra vettori"

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore nullo è $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ed è identificato con il punto $(0,0)$).
Due vettori $v, w \neq 0$ si dicono *paralleli* se sono uno un multiplo dell'altro, cioè se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ tale che $v = \alpha w$.

Tutte le precedenti operazioni si estendono naturalmente allo spazio dei vettori tridimensionali

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ;\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

ed anche allo spazio dei vettori n-dimensionali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ;\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

In questo caso dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

- Si ha che $\mathbb{R}^n$, munito delle operazioni di "prodotto per uno scalare" e di "somma tra vettori", risulta essere uno *spazio vettoriale.*

Sia k un numero naturale, per *combinazione lineare* di k vettori $v_1, v_2, \cdots v_k$ di $\mathbb{R}^n$ si intende una qualsiasi espressione della forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$, dove $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ sono k numeri reali.

Dati k vettori del piano $v_1, v_2, \cdots v_k$, essi si dicono *linearmente indipendenti* se dal fatto che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ segue che $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, cioè quando vale

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Qualora non siano linearmente indipendenti i vettori si dicono *linearmente dipendenti.* Si ha che

- due vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno un multiplo dell'altro;
- **tre** vettori di $\mathbb{R}^2$ sono **sempre** linearmente dipendenti;
- **quattro** vettori di $\mathbb{R}^3$ sono **sempre** linearmente dipendenti,
- e, più in generale, $n+1$ vettori di $\mathbb{R}^n$ sono **sempre** linearmente dipendenti.
- L'importanza di avere una famiglia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ risiede nel fatto che se un vettore è combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_k$, allora i coefficienti della combinazione lineare sono **unici**.

È importante osservare che i vettori possono essere pensati tanto come *vettori colonna* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ quanto come *vettori riga* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. In generale si utilizzano indifferentemente una o l'altra scrittura.

1.2. **Matrici ed operazioni su matrici.** Dati due numeri naturali m ed n (si pensi ad esempio ad $m, n \in \{1, 2, 3\}$) una matrice $m \times n$ è una tabella con m righe ed n colonne. Ad esempio,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

è una generica matrice 3×2.

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata.*

Date due matrici $m \times n$, A e B, la somma $A + B$ è (per definizione) la matrice $m \times n$ ottenuta sommando A con B "componente per componente". Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

allora

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ è per definizione la matrice avente per componenti quelle di A moltiplicate per lo scalare α. Ad esempio, se A è la matrice scritta sopra,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{bmatrix}.$$

Date una matrice $m \times n$, A, ed una matrice $n \times k$, B, il prodotto AB è la matrice $m \times k$ che ha nel posto determinato dall'incrocio tra la i-esima riga e la j-esima colonna il prodotto scalare tra la i-esima riga della matrice A e la j-esima colonna della matrice B (si opera cioè un prodotto "righe-per-colonne"). In particolare se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

allora

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{bmatrix}.$$

Quindi tramite il prodotto di una matrice $m \times n$ per un matrice (vettore colonna) $n \times 1$, il prodotto di una matrice $m \times n$, A, per una matrice $n \times k$, $B = [b_1|b_2|\dots|b_k]$ dove $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ sono le colonne di B, si ottiene operando k volte il prodotto righe-per-colonne della matrice A per ciascuna colonna b_j $(j = 1, \dots, k)$ di B :

$$AB = [Ab_1|Ab_2|\dots|Ab_k]$$

che risulta perciò essere una matrice $m \times k$.

- Si ha la seguente proprietà di *linearità*: data la matrice $m \times n$, A, per ogni scalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vettori colonna (matrici $n \times 1$) $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha
$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$
- La matrice *identità* I è la matrice con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

Osservazione. *Ricordiamo ancora che una matrice $n \times 1$, x, si identifica con un vettore $x \in \mathbb{R}^n$.*

1.3. **Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari.** Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si rappresenta con una matrice $m \times n$ (la matrice dei coefficienti), A, un vettore b di $\mathbb{R}^m$ (il vettore dei "termini noti"), ed un vettore x di $\mathbb{R}^n$ (il vettore delle incognite). Cioè il sistema $[A|b]$ si può rappresentare nella forma

$$Ax = b\,.$$

Per risolvere il sistema si può ricorrere a sostituzioni successive oppure alla *riduzione di Gauss-Jordan* che può essere descritta come segue.

- Si costruisce la matrice $[A|b]$;
- si opera sulla matrice $[A|b]$ agendo con *operazioni elementari* **sulle righe** della matrice fino a ridurre la matrice alla forma $[S|c]$, dove S è una forma *ridotta a scala* di A;
- si risolve il sistema partendo dall'ultima equazione in $[S|c]$ fino ad arrivare alla prima (con sostituzioni successive).

È importante osservare che procedendo con la riduzione di Gauss-Jordan ci si trova davanti ad una serie di **possibili alternative**:

- il sistema non ammette soluzione,
- il sistema ammette un'unica soluzione,
- il sistema ammette ∞^k soluzioni per un certo $k = n - r$, dove r è il numero di **pivot** della matrice a scala S. Il numero r si chiama *rango della matrice* A, e si indica con $\mathrm{rg}(A)$. Si noti che $r \leq \min\{m, n\}$.
- Il caso di non esistenza della soluzione si ha quando, dopo aver effettuato la riduzione di Gauss-Jordan, si trova un'equazione impossibile nel sistema $[S|c]$ (ad esempio, $0 = c_m$ con $c_m \neq 0$).

Si ha l'importante teorema di Rouché-Capelli.

Teorema. (Rouché-Capelli) *Data A, matrice $m \times n$, e dato il vettore $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è risolubile (cioè "ammette soluzione", o anche "è compatibile") per $x \in \mathbb{R}^n$ se e solo se*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}([A|b]).$$

In tal caso, posto $r = \mathrm{rg}(A)$, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni.

1.4. **Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.** Consideriamo il sistema di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Quando $b = 0$ il sistema si dice *omogeneo*. Consideriamo l'insieme delle soluzioni

$$S_b = \{x \in \mathbb{R}^n;\, Ax = b\}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- se x ed y sono due soluzioni del sistema omogeneo (cioè $x, y \in S_0$) allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha x + \beta y$ è soluzione del sistema omogeneo (cioè $\alpha x + \beta y \in S_0$);
- se $\xi_0 \in S_b$ allora per ogni soluzione $x \in S_0$ si ha che $\xi_0 + x \in S_b$. In simboli, si ha che

  $$S_b = \{\xi_0 + x\,;\, x \in S_0\}$$

  (ξ_0 si dice essere una soluzione *particolare* del sistema non omogeneo). Si usa la notazione $S_b = \xi_0 + S_0$.

1.5. **Sottospazi vettoriali.** Un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$ è un *sottospazio vettoriale* se

$$\alpha v + \beta v' \in V \qquad \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, v' \in V.$$

Quindi, ad esempio, è un **sottospazio vettoriale** *l'insieme S_0 delle soluzioni di un sistema lineare* **omogeneo**.

Dati k vettori, $v_1, \cdots, v_k$, lo *spazio generato* da tali vettori è l'insieme

$$V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k\,;\, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}\,.$$

Tale insieme si denota con il simbolo $\mathrm{Span}\,\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ ed i vettori $v_1, \cdots, v_k$ sono detti i *generatori* del sottospazio V. Si ha che *V è un* **sottospazio vettoriale** *di $\mathbb{R}^n$.*

- Si dice che la famiglia **ordinata** di vettori $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ forma una *base* di un sottospazio vettoriale V se i $v_1, \ldots, v_k$ sono **linearmente indipendenti** e

  $$\mathrm{Span}\,\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = V\,.$$

  La *dimensione* del sottospazio vettoriale V è il numero di elementi che formano una base.
- Dati i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^n$ allora:
  - l'insieme $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$;
- Se A è una matrice $m \times n$ allora
  - l'*immagine* di A è l'insieme

    $$\mathrm{Im}\,A = \{Ax\,;\, x \in \mathbb{R}^n\};$$

  - il *nucleo* di A è l'insieme

    $$\mathrm{Ker}\,A = \{x \in \mathbb{R}^n;\, Ax = 0\}.$$

  - È importante osservare che

    $\mathrm{Ker}\,A \neq \{0\} \iff$ *i vettori colonna di A sono* **linearmente dipendenti***;*

  - $\mathrm{Im}\,A$ e $\mathrm{Ker}\,A$ sono **sottospazi vettoriali** di $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$, **rispettivamente**;
  - per l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ vale $S_0 = \mathrm{Ker}\,A$.

- Osserviamo che data la matrice $m \times n$, $A = [\vec{a}_1|\vec{a}_2|\ldots|\vec{a}_n]$, dove i vettori $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ sono le colonne di A, e dati i vettori $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è equivalente a scrivere
$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = b,$$
e quindi *il sistema è risolubile se e solo se* $b \in \operatorname{Im} A$. Se ne deduce anche che
$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\}.$$
È anche importante osservare che dal Teorema di Rouché-Capelli segue che l'appartenenza del vettore b allo spazio delle colonne di A (che dà la risolubilità del sistema) si legge nel sistema equivalente $[S|c]$, dove S è una riduzione a scala di A, ed esattamente nelle condizioni $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$, dove $r = \operatorname{rg}(A)$.
- Si ha che $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$.
- La matrice A si dice *singolare* se $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, il che è equivalente a $\operatorname{rg}(A) < n$.

Data la matrice A, $m \times n$, si definisce *trasposta di A* la matrice A^T *le cui righe sono le colonne di A.* Essa è quindi una matrice $n \times m$. Per esempio
$$\text{se} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$
La matrice trasposta di A è anche denotata con il simbolo ${}^tA$.

- Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times k$, allora vale $(AB)^T = B^T A^T$, che quindi risulta essere una matrice $k \times m$.
- Vale la (importantissima) relazione: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$. Si ha quindi che
$$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\} = \dim \operatorname{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Un esempio molto importante di base di $\mathbb{R}^3$ è l'insieme formato dai vettori
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Infatti, e_1, e_2 ed e_3 sono linearmente indipendenti ed $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

In generale dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale si può estrarre da essi una base procedendo come segue:

- si costruisce una matrice avente per **colonne** tali vettori (per fissare le idee consideriamo il caso di quattro vettori in $\mathbb{R}^3$);
- si utilizzano le operazioni elementari **sulle righe** della matrice fino ad ottenere una forma scala S,
- le colonne della matrice di partenza **corrispondenti** alle colonne di S che contengono i pivot di S formano una base.
- **Equivalentemente**, si costruisce una matrice avente per **righe** i vettori dati e si utilizzano le operazioni elementari (sempre sulle righe) per ridurre la matrice ad una forma a scala. I vettori riga che contengono i pivot della matrice a scala, riletti come vettori colonna, formano una base.

Possiamo inoltre fare le seguenti considerazioni:

- i vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se, definendo $A = [v_1|\ldots|v_k]$ (matrice $n \times k$), il sistema $Ax = 0$ ha come **unica** soluzione la soluzione nulla 0 (e quindi se e solo se la matrice A è non-singolare, e cioè, ancora, se e solo se $\mathrm{rg}(A) = k$);
- in generale, per ottenere l'equazione cartesiana di $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ basta usare il Teorema di Rouché-Capelli sul sistema $[A|x]$ e leggere le equazioni dalle condizioni di compatibilità del sistema, inoltre le colonne di A corrispondenti ai pivot di una forma a scala di A sono una **base** per $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

1.6. **Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà.** Il determinante di un numero (matrice 1×1) è il numero stesso.
Data una matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

il determinate di A è per definizione il numero

$$\det A = ad - bc\,.$$

Data una matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

il determinante di A è definito nel modo seguente

$$\det A = a_{11}\det M_{11}(A) - a_{12}\det M_{12}(A) + a_{13}\det M_{13}(A)$$

dove

$$M_{11}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{12}(A) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{13}(A) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Definendo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}(A), \quad 1 \le i, j \le n,$$

il **complemento algebrico dell'elemento** a_{ij}, si ha che la formula sopra si scrive anche

$$\det A = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13}.$$

In generale, nel caso $n \times n$, si ha che il determinante di una matrice A può essere calcolato nel modo seguente (sviluppo di Laplace). Dati $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sia $M_{ij}(A)$ la matrice ottenuta dalla matrice A sopprimendo la i–esima riga e la j–esima colonna, e sia $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}(A)$, $1 \le i, j \le n$, il complemento algebrico di a_{ij}. Fissiamo un numero $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Allora vale il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k–esima riga:

$$\det A = (-1)^{k+1}a_{k1}\det M_{k1}(A) + (-1)^{k+2}a_{k2}\det M_{k2}(A) + \ldots + (-1)^{k+n}a_{kn}\det M_{kn}(A) =$$

$$= a_{k1}\mathcal{A}_{k1} + a_{k2}\mathcal{A}_{k2} + \ldots + a_{kn}\mathcal{A}_{kn}.$$

Vale una formula analoga rispetto alle colonne. Infatti, fissato $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k-esima colonna:

$$\det A = (-1)^{k+1}a_{1k}\det M_{1k}(A) + (-1)^{k+2}a_{2k}\det M_{2k}(A) + \ldots + (-1)^{k+n}a_{nk}\det M_{nk}(A) =$$

$$= a_{1k}\mathcal{A}_{1k} + a_{2k}\mathcal{A}_{2k} + \ldots + a_{nk}\mathcal{A}_{nk}.$$

Il determinante soddisfa le seguenti proprietà:

- $\det I = 1$;
- $\det A = \det(A^T)$;

- data la matrice A sia B la matrice ottenuta scambiando nella matrice A due colonne (o due righe), allora $\det B = -\det A$; perciò, in particolare, se due colonne (o due righe) di A sono uguali, allora $\det A = 0$;
- siano $v_1, v_3, \dots, v_n$ e w vettori colonna ed α e β due numeri reali allora
$$\det[\alpha v_1 + \beta w|v_2|\dots|v_n] = \alpha \det[v_1|v_2|\dots|v_n] + \beta \det[w|v_2|\dots|v_n],$$
e vale anche sempre che
$$\det[v_1|\dots|\alpha v_i + \beta v_j|\dots|v_j|\dots|v_n] = \alpha \det[v_1|\dots|v_i|\dots|v_j|\dots|v_n].$$
La formula precedente si applica anche ad ogni altra coppia di colonne (e continua a valere ragionando sulle righe invece che sulle colonne);
- vale la formula di Binét: $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$.

1.7. **Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa.** Una matrice **quadrata** A si dice *invertibile* se esiste una matrice B tale che $AB = BA = I$. Si ha che *la matrice inversa se esiste è unica.* Si ha inoltre che *una matrice è invertibile se e solo se essa ammette una unica inversa destra*, e che *una matrice è invertibile se e solo se* $\mathrm{rg}(A) = n$. La matrice inversa (o brevemente *l'inversa*) della matrice A si denota con il simbolo A^{-1}. Vale il seguente teorema.

Teorema. *La matrice A è invertibile se e solo se det $A \neq 0$. In particolare si ha che se A è invertibile, allora* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Per calcolare l'inversa di una matrice A si procede come segue:
- si costruisce la matrice $[A|I]$
- si procede con operazioni elementari sulle righe della matrice $[A|I]$ fino a che non ci si riduce ad una matrice della forma $[I|C]$ per una qualche matrice C (quello che conta è avere nel primo "blocco" la matrice identità!)
- si conclude che $A^{-1} = C$.

L'uso del determinante permette anche di dare le seguenti formule per l'inversa di A.
- Nel caso 2×2, data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $\det A \neq 0$, allora si ha la formula
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
- Nel caso $n \times n$, se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ è la matrice la cui entrata al posto ij è $\mathcal{A}_{ij}$, $1 \le i,j \le n$, si definisce la **matrice aggiunta** di A tramite la formula
$$\mathrm{Agg}(A) = \mathcal{A}^T,$$
e si ha che
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Agg}(A).$$
- In particolare, considerando il sistema $Ax = b$, A matrice $n \times n$ *invertibile*, allora la soluzione è univocamente data da $\xi = A^{-1}b$. Di più, si ha la *formula di Cramer* per la soluzione $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$,
$$\xi_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad 1 \le i \le n,$$
dove B_i è la matrice che si ottiene *sostituendo alla colonna i-esima di A il vettore termine noto b*, $i = 1, 2, \dots, n$.

1.8. **Forme quadratiche e diagonalizzazione.** Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Il *polinomio caratteristico* di A è

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico **ha grado** n, e le sue radici si chiamano *autovalori* (della matrice A). Se λ_0 è un autovalore l'insieme Ker $(A - \lambda_0 I)$ è *l'autospazio* associato all'autovalore λ_0. Gli elementi di Ker $(A - \lambda_0 I)$ sono gli *autovettori* di A (associati all'autovalore λ_0).

- Si dice che la *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ_0 è m se
$$(\lambda - \lambda_0)^m \text{ divide } p_A(\lambda), \quad \text{ma } (\lambda - \lambda_0)^{m+1} \text{ non divide } p_A(\lambda).$$
- Si dice che la *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ_0 è r se
$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = r.$$
- Si ha sempre che
$$\text{molteplicità geometrica}(\lambda_0) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda_0).$$

Si definisce *traccia* della matrice A, quadrata $n \times n$, la somma degli elementi sulla diagonale principale di A, cioè il numero

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Data la matrice A quadrata $n \times n$, valgono le seguenti relazioni tra gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A, $\operatorname{Tr}(A)$ e $\det(A)$:

- $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$;
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$;
- quando A è 2×2 si ha
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Una matrice quadrata A si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se $A = A^T$. Vale il seguente risultato.

Teorema. *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora, gli autovalori di A, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, ripetuti secondo la rispettiva molteplicità algebrica, sono reali ed autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro* ***linearmente indipendenti****. Di più, si può trovare una* **base** *di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A.*

È importante notare il fatto seguente.
Sia A una matrice quadrata $n \times n$ **qualsiasi** (cioè non necessariamente simmetrica) la quale *abbia tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $\mathbb{R}$ ed i cui relativi autovettori formino una* **base** *di* $\mathbb{R}^n$. Sia allora Λ la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di A, e siano $v_1, \ldots, v_n$ i corrispondenti autovettori (relativi a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, rispettivamente). Definiamo $S = [v_1|v_2|\ldots|v_n]$. Allora S è invertibile perché $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$. Dall'equazione agli autovalori $Av_j = \lambda_j v_j$, $j = 1, \ldots, n$, segue che (righe-per-colonne)

$$AS = [Av_1|Av_2|\ldots|Av_n] = [\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\ldots|\lambda_n v_n] = S\Lambda,$$

e quindi si ha la relazione

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Una tale matrice si dice allora **diagonalizzabile**. Quindi, il teorema precedente assicura che *tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili.*

Data $A = [a_{jk}]_{j,k=1,\ldots,n}$, matrice simmetrica $n \times n$, una *forma quadratica* Q è una funzione che associa ad ogni vettore x con n componenti il numero $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$. Si può allora costruire una matrice *ortogonale* S (cioè tale che $SS^T = S^T\, S = I$) tale che $A = S\Lambda S^T$, con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e con $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ gli autovalori (eventualmente ripetuti) della matrice A. Allora, se si pone $y = S^T x$, nelle "nuove" coordinate y si ha

$$Q(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k = \langle Ax, x\rangle = Q(Sy) = \langle \Lambda y, y\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

2. ANALISI

2.1. **Generalità.** • Rudimenti di Teoria degli Insiemi: sottoinsiemi, operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza), insieme delle parti, prodotto cartesiano di insiemi. L'insieme dei numeri interi non negativi $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
• Funzioni: dominio, grafico, immagine e controimmagine di un insieme tramite una funzione, e sue proprietà: data $f\colon X \longrightarrow Y$, $A, A_1, A_2 \subset X$, $B, B_1, B_2 \subset Y$,

- $f(A) = \{y \in Y;\ \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\} = \{f(x);\ x \in A\}$,
- $f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}$,
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Funzioni iniettive, suriettive, biettive, funzione composta, funzioni invertibili, *una funzione è invertibile se e solo se essa è biettiva*, la funzione inversa è unica, funzioni monotone (crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti).
• Funzioni trigonometriche $x \longmapsto \sin x$ e $x \longmapsto \cos x$ e loro inverse; la funzione esponenziale $x \longmapsto e^x$ e la sua inversa (logaritmo naturale in base e) $x \longmapsto \ln x$, $x > 0$.
• Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ ed il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (retta passante per un punto dato e direzione un vettore dato, retta per due punti, equazione generale della circonferenza di centro e raggio dati, coniche).

2.2. **L'insieme numerico $\mathbb{R}$.** • La funzione $|x| = \max\{-x, x\}$, $x \in \mathbb{R}$, e sue proprietà, la disuguaglianza triangolare $|x + y| \leq |x| + |y|$, la distanza euclidea $\operatorname{dist}(x, y) = |x - y|$ in $\mathbb{R}$ e sue proprietà.
• Insiemi limitati, max, min di un insieme, sup ed inf di un insieme limitato e loro caratterizzazione:

- $\sup A = \lambda \in \mathbb{R}$: $a \leq \lambda\ \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A$ tale che $\lambda - \varepsilon < a_\varepsilon$;
- $\inf A = \mu \in \mathbb{R}$: $a \geq \mu\ \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon < \mu + \varepsilon$;

l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$: *ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette* sup *(risp.* inf*).*
• Il Principio di Induzione: *Sia $P(n)$ una proprietà definita su $\mathbb{N}$, allora se $P(1)$ è vera e $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ ne consegue che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.* La disuguaglianza di Bernoulli: *Se $x > -1$, allora $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.* La formula di sommazione della progressione geometrica di ragione $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. La formula di Newton del binomio: $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.
• Esistenza di un'unica radice n-esima: *Dati $y > 0$ ed $n \geq 1$ naturale, allora esiste un unico $x > 0$ tale che $x^n = y$* (quindi $x = y^{1/n}$). Esistenza di un unico logaritmo in base $a > 0$: *Dati $a > 0$ e $y > 0$ (con $a, y \neq 1$) esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$* (quindi $x = \log_a y$).

2.3. **Funzioni di una variabile, limiti e continuità.** Funzioni limitate max, min, sup ed inf di una funzione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme si dice che $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è di *accumulazione* per A se $(A \setminus \{x_0\}) \cap I_\delta(x_0) \neq \emptyset$ per ogni intorno circolare $I_\delta(x_0)$ di x_0. Definizione di limite $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ dove $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 è di accumulazione per A. Limite per $x \to x_0 \pm$. *Il limite, quando esiste, è unico.* Il Teorema (dei due carabinieri): *se*

$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$ *esiste, finito od infinito uguale a* λ, *e* $g(x) \le f(x) \le h(x)$, *allora anche il* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *esiste ed è uguale a* λ. Forme indeterminate: $0\cdot\infty$, ∞/∞, $0/0$, $\infty-\infty$.

• **Proprietà dei limiti**: *Se esistono* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *(finiti o infiniti), allora*

- *Per ogni numero reale c vale* $\lim_{x\to x_0} cf(x) = \begin{cases} c\lim_{x\to x_0} f(x), & c\neq 0, \\ 0, & c=0; \end{cases}$
- $\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- $\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)g(x)\Big) = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- $\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)/g(x)\Big) = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)/\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- *Se* $f(x) < g(x)$ *ed i limiti di* f *e* g *esistono per* $x\to x_0$ *allora* $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$*;*
- *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$ *allora esiste un* $r>0$ *tale che* $f(x)<g(x)$ *per tutti gli* $x\in I$ *tali che* $|x-x_0|<r$ *se* $x_0\in\mathbb{R}$, $x>r$ *se* $x_0=+\infty$, $x<-r$ *se* $x_0=-\infty$*;*
- *(Cambiamento di variabile nei limiti) Se* $g(t)\neq x_0$ *e* $\lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$ *allora si ha che*

  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to t_0} f\Big(g(t)\Big)$.

• **Limiti di funzioni monotòne**: *Se* $f\colon [a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *è crescente allora esiste, finito o infinito, il* $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in[a,b)} f(x)$. *Analogamente, nel caso di* f *decrescente,* $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf_{x\in[a,b)} f(x)$.

Simboli di Landau:

- Si dice che $f=o(g)$ *per* $x\to x_0$ quando $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$.
- Quindi: $f=o(1)$ se $f\to 0$ e sempre $o(g) = g\,o(1)$, per $x\to x_0$.

I limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Asintoti: Data $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ allora

- se $x_0\in\mathbb{R}$, (con $x_0\notin A$ e x_0 di accumulazione per A) e vale $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ allora si dice che la retta di equazione $x=x_0$ è un *asintoto verticale* per la funzione;
- se vale $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}} f(x) = \lambda\in\mathbb{R}$ allora si dice che la retta di equazione $y=\lambda$ è un *asintoto orizzontale* a $+\infty$ per la funzione (e analogamente si definisce l'asintoto orizzontale a $-\infty$);
- se vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$) ed esistono numeri reali $m\neq 0$ e q tali che

  $$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad q = \lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-mx\Big),$$

  allora si dice che la retta di equazione $y=mx+q$ è un *asintoto obliquo* per la funzione a $+\infty$ (e analogamente si definisce l'asintoto obliquo a $-\infty$).

Definizione di funzione *continua* in un punto e su un intervallo. Proprietà delle funzioni continue:

- Somme e prodotto di funzioni continue danno luogo a funzioni continue;

- *Se f, g sono continue in x_0 con $g(x_0) \neq 0$ allora $f(x)/g(x)$ è continua in x_0;*
- *Se $f\colon A \longrightarrow J$ e $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue allora $(g \circ f)\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua;*
- *Il Teorema di Bolzano: se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(a)f(b) < 0$ allora esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$. In particolare l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è un intervallo (teorema dei valori intermedi);*
- *Il Teorema di Weierstrass: se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua allora $f([a,b]) = [\min f, \max f]$, in particolare l'immagine di un intervallo chiuso e limitato tramite una funzione continua è un intervallo chiuso e limitato;*
- *Se I e J sono intervalli di $\mathbb{R}$ e $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente monotona sull'intervallo I allora f è iniettiva e la funzione inversa $f^{-1}\colon J = f(I) \longrightarrow I$ è continua.*

Continuità delle funzioni $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\ln x$.

2.4. **Derivazione.** Definizione di derivata, significato geometrico della derivata, retta tangente il grafico di una funzione in un punto. *Una funzione derivabile è sempre anche continua.* La derivata di una costante è zero. Regole di derivazione:

$$(f+g)' = f' + g', \ (fg)' = f'g + fg', \ (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\Big(g(x_0)\Big)g'(x_0), \quad \frac{df^{-1}}{dx}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Derivate delle principali funzioni: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ se $\alpha \in \mathbb{Z}$ e per $x > 0$ se $\alpha \in \mathbb{R}$); $D(e^x) = e^x$, $D(\sin x) = \cos x$; $D(\cos x) = -\sin x$; $D(\arctan x) = 1/(1+x^2)$; $D(\arcsin x) = 1/\sqrt{1-x^2}$; $D(\arccos x) = -1/\sqrt{1-x^2}$; $D(\ln x) = 1/x$.

- Data una funzione $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 di accumulazione per A. Allora:
  - la funzione ha una discontinuità di tipo *salto* in x_0 se $x_0 \in A$ e se esistono finiti il limite destro e sinistro per $x \to x_0$, ma essi sono diversi tra loro;
  - la funzione ha una discontinuità di tipo *essenziale* in x_0 se $x_0 \in A$ e se almeno uno dei due limiti è infinito;
  - la funzione ha una discontinuità di tipo *eliminabile* in x_0 se $x_0 \notin A$ ma esiste finito il limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lambda$. In tal caso si può estendere con continuità la funzione f nel punto x_0 ponendo $f(x_0) = \lambda$.
- **Massimi e minimo locali**
  - Il teorema (di Fermat): *Se $x_0 \in (a,b)$, $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e x_0 è un estremale relativo (cioè punto di* max *o* min *locale) allora $f'(x_0) = 0$;*
  - Il teorema di Rolle;
  - Il teorema di Lagrange (del valor medio);
  - Il teorema di Cauchy: *se $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue, derivabili in (a,b), con $g'(x) \neq 0$ su (a,b), allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$;*
  - Regola di De l'Hospital per il calcolo delle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞: Se esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ allora esiste and il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ e vale l'uguaglianza dei limiti.
- **Applicazione della regola di De l'Hospital ad alcuni limiti importanti**:
  - Per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$ vale $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$;
  - Per tutti gli $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ vale $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$;

- Per tutti gli $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ vale $\lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$, ed in particolare $x\ln x \longrightarrow 0-$ per $x \to 0+$.

Alcune conseguenze del Teorema del Valor Medio:

- *Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f'(x) = 0$ per tutti gli $x \in (a,b)$ allora f è constante*;
- *f è crescente se e solo se $f' \geq 0$ (risp. f è decrescente se e solo se $f' \leq 0$)*;
- *Se $f' > 0$ allora f è strettamente crescente (analogamente, se $f' < 0$ allora f è strettamente decrescente).*

• **La formula di Taylor con punto iniziale** x_0: Se $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e f è derivabile con continuità k volte allora vale

- Formula di Taylor di ordine n, punto iniziale x_0 e con resto secondo Peano
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n);$$
- Formula di Taylor di ordine $n-1$, punto iniziale x_0 e con resto secondo Lagrange
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n;$$
per un certo ξ appartenente all'intervallo di estremi x e x_0;
- *Dalla formula di Taylor di f si può ottenere quella di f'.*

• La formula di Taylor di e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\text{arctg}(x)$ con punto iniziale 0:
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \text{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

• **Uso della formula di Taylor per determinare la natura dei punti critici**: *sia $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile fino all'ordine n in $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora*

- *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, il punto x_0 è di minimo locale;*
- *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, il punto x_0 è di massimo locale.*
- se k è dispari, il punto x_0 non è né di massimo né di minimo locale e la funzione cresce, se $f^{(n)}(x_0) > 0$, oppure decresce, se $f^{(n)}(x_0) < 0$, in un opportuno intorno di x_0.

• **Convessità**: una funzione $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x_1, x_2 \in I$ ed x compreso tra x_1 ed x_2 vale
$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$
condizioni necessarie e sufficienti: *Se $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nell'intervallo I, allora f è convessa se e solo una delle seguenti equivalenti condizioni (i), (ii), (iii) è soddisfatta: (i) per ogni $x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, per ogni $x \in I$; (ii) f' è crescente; (iii) nel caso in cui f sia derivabile 2 volte: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.*

2.5. **Integrale di Riemann.** • Alcune funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo $[a,b]$: funzioni continue, monotone, generalmente continue. Si dice che una funzione $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è *generalmente continua* se f è continua su $[a,b]$ escludendo al più un insieme finito di punti, nei quali f ha singolarità di tipo salto.

• Funzione integrale: data $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, si dice che una funzione **continua** $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è *una primitiva* di f se $F'(x) = f(x)$ per tutti gli $x \in [a,b]$.

• *Se $F_1, F_2 \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono primitive di una data funzione f continua, allora esse differiscono per una costante.*
• Data una funzione $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, si definiscono la *parte positiva* e la *parte negativa*, rispettivamente, come

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Allora $f_+, f_- \geq 0$ e vale sempre $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$. Se f è continua, anche f_+ ed f_- lo sono.
• Funzione integrale: data $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile e dato $x_0 \in [a,b]$, si chiama *funzione integrale di punto iniziale* x_0 la funzione definita da

$$[a,b] \ni x \longmapsto \Phi_{x_0}(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt, \text{ per } \ x \geq x_0 \\ \displaystyle -\int_{x}^{x_0} f(t)dt, \text{ per } \ x \leq x_0 \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Si noti che $\Phi_{x_0}(x_0) = 0$.
• Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: *Se $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora, fissato comunque $x_0 \in [a,b]$, la funzione integrale Φ_{x_0} è sempre* **continua** *e risulta essere derivabile in ogni x nel quale f è continua con $\Phi'_{x_0}(x) = f(x)$ per tali x. Quindi una qualsiasi funzione integrale è anche una primitiva di f.*
• Proprietà dell'integrale: date $f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabili, dati $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha \leq \beta$ allora:

- $\displaystyle\int_\alpha^\beta \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx,;$
- $\displaystyle\int_\alpha^\beta \Big(cf(x)\Big)dx = c\int_\alpha^\beta f(x)dx$, per qualunque costante $c \in \mathbb{R}$;
- Se γ è un qualunque punto di $[a,b]$ allora vale sempre
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx;$$
- Se $f(x) \leq g(x)$ su $[a,b]$ allora $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$;
- Se $\alpha < \beta$, vale sempre $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$, e quindi se $x_1, x_2 \in [a,b]$ sono **qualunque**, allora $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx\right|$.

• **Calcolo effettivo dell'integrale**: *Data $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a),$$

dove F è una qualunque primitiva di f.

• **Metodi di integrazione**:

- Per sostituzione: *Se $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, se $\varphi \colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ è continua insieme alla sua derivata e se $\alpha, \beta \in [c,d]$ sono soluzioni rispettivamente di $\varphi(t) = a$ e $\varphi(t) = b$, allora*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt, \quad (\textit{quindi } x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt);$$

- Per parti: *Se* $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sono continue con derivata continua allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

• **Alcune primitive notevoli**:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C, \quad \int \ln x\, dx = x\ln x - x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \quad \int \Big(f(x)\Big)^\alpha f'(x)dx = \frac{\Big(f(x)\Big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \arctan f(x) + C, \quad \int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C.$$

Gli integrali $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \cos x\, dx$, $\int x^n \sin x\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$, si calcolano per parti.

• **Metodo dei "fratti semplici" (di Hermite)**:

- Data la funzione razionale $P(x)/Q(x)$, con P e Q polinomi, se il grado di P è superiore al grado di Q si opera la divisione e ci si riduce al caso in cui il grado di P è minore del grado di Q;
- Esempio di $Q(x) = (x-a)^n(x-b)^m$, grado$(P) \leq n+m-1$. Si scrive

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}(x-b)^{m-1}}\right),$$

  dove $A, B \in \mathbb{R}$ e R, un polinomio di grado $(n-1)+(m-1)-1$ (quindi determinato da $(n-1)+(m-1)$ coefficienti) sono da determinarsi;
- Esempio di $Q(x) = (x-a)^n(x^2+\alpha x+\beta)^m$, dove $x^2+\alpha x+\beta$ non si annulla mai, e grado$(P) \leq n+2m-1$. Si scrive

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{2Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}\right),$$

  dove $A, B, C \in \mathbb{R}$ e R, un polinomio di grado $(n-1)+2(m-1)-1$ (quindi determinato da $(n-1)+2(m-1)$ coefficienti) sono da determinarsi. Se $n = m = 1$ allora $R(x)$ è il polinomio identicamente uguale a 0.

• L'area di un dominio della forma $\{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}; g(x) \leq y \leq f(x)\}$, dove $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili e $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, è data dall'integrale

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

2.6. **Integrale generalizzato.** (Motivazione importante: calcolo di aree di domini non limitati.)

- Se $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a, b \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $[a,b)$ se **esiste finito** il limite $\displaystyle\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$;
- Se $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $[a,+\infty)$ se **esiste finito** il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$;
- Se $f\colon (a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $(a,+\infty)$ se, fissato un qualunque $b \in (a,+\infty)$, **esistono finiti** i limiti
$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt, \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_b^x f(t)dt.$$
Tale definizione **non dipende** dalla scelta di b;
- Se $f\colon (-\infty,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $(-\infty,+\infty)$ se, fissato un qualunque $a \in (-\infty,+\infty)$, **esistono finiti** i limiti
$$\lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(t)dt, \qquad \lim_{R'\to+\infty} \int_a^{R'} f(t)dt.$$
Tale definizione **non dipende** dalla scelta di a;
- Una funzione f si dice *assolutamente integrabile in senso generalizzato* se la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato.
- Quando l'integrale generalizzato esiste ed è uguale a $+\infty$ o $-\infty$ allora si dice che la funzione ha *integrale generalizzato divergente.*

• **Osservazione:** *Se $f \geq 0$ allora l'integrale generalizzato di f esiste sempre, con valore finito o infinito* (in quanto la funzione integrale di f è monotona crescente, e le funzioni crescenti hanno sempre limite).

• **Criteri di convergenza** per $f \geq 0$:

- Se $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ allora f ha integrale generalizzato su $[a,+\infty)$ divergente;
- Date le funzioni $f, g \geq 0$, se $f \leq g$ allora l'integrabilità generalizzata di g forza l'integrabilità di f, mentre se l'integrale di f è $+\infty$ allora lo è anche quello di g;
- (Criterio del confronto asintotico) Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ con $\lambda \in (0,+\infty)$ per $x \to +\infty$ allora f è integrabile in senso generalizzato a $+\infty$ se e solo se g è integrabile in senso generalizzato vicino a $+\infty$; analogo risultato vale per l'integrabilità in senso generalizzato in a o in $-\infty$;
- Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha}dx < +\infty$ se e solo se $\alpha < 1$; la stessa cosa vale per $\displaystyle\int_b^c \frac{1}{|x-b|^\alpha}dx < +\infty$, con $b < c$;
- Se $a > 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$.

• **Osservazione.** Analogamente si ottengono tutti gli altri casi relativi a $(a,b]$, $(-\infty,b]$, (a,b), $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$.

2.7. **Equazioni differenziali lineari del I ordine.** Con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, le funzioni $a, b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno continue, il tempo iniziale $x_0 \in I$, e
$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

la soluzione, **unica**, $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$y(x) = e^{A(x;x_0)}\Big[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t;x_0)}b(t)dt\Big],$$

con $A(x;x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)dt$.

2.8. **Equazioni a variabili separabili non lineari del I ordine.** Con f, g funzioni continue, e

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

- se $g(y_0) = 0$, allora si prende $y(x) = y_0$;
- se $g(y_0) \neq 0$, allora il problema dato è equivalente al problema

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}ds = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

2.9. **Serie.** Data la successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$, la serie associata $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è la successione delle somme parziali

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n, \quad N \geq 0.$$

La serie si dice *regolare* se esiste il limite (*somma della serie*) $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *convergente*, se $\lambda = +\infty$, risp. $-\infty$, si dice che la serie è *divergente positivamente*, risp. *divergente negativamente.* Una condizione necessaria per la convergenza è che sia $a_n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$. Quando gli $a_n > 0$ allora la serie è sempre regolare con somma finita o $+\infty$. Infatti $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N$.

- La convergenza o divergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è equivalente alla convergenza o divergenza della $\displaystyle\sum_{n=N_0}^{+\infty} a_n$ dove N_0 è un qualsiasi intero positivo;
- la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positivamente;
- la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (ponendo $0^0 = 1$) converge se e solo se $|x| < 1$ con somma $\dfrac{1}{1-x}$.

- **Principali teoremi per le serie a termini positivi**:
  - (radice ennesima) se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora: se $\ell < 1$ la serie converge, se $\ell > 1$ la serie diverge positivamente, se $\ell = 1$ non si può concludere nulla;
  - (rapporto) se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora: se $\ell < 1$ la serie converge, se $\ell > 1$ la serie diverge positivamente, se $\ell = 1$ non si può concludere nulla;

- (confronto) se $a_n, b_n > 0$ ed esistono costanti $C_1, C_2 > 0$ ed $N_0 \in \mathbb{N}$ tali che $C_1 b_n \leq a_n \leq C_1 b_n$ per ogni $n \geq N_0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$;
- (confronto asintotico) se $a_n, b_n > 0$ ed esiste il $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, +\infty)$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$;
- (criterio integrale) se $f\colon [1, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ è monotona decrescente allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ ha lo stesso comportamento dell'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

• **Conseguenze**:

- la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$;
- la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge se e solo se $\alpha > 1$ e β è qualsiasi, oppure $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

2.10. **Equazioni alle differenze del primo ordine.** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una costante, e sia dato $y_0 \in \mathbb{R}$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y_{k+1} = \alpha y_k + f_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ y\big|_{k=0} = y_0. \end{cases}$$

Si vede che la soluzione del problema è data da

$$y_k = \alpha^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} f_j \alpha^{k-1-j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nel caso particolare che $f_k = \beta \in \mathbb{R}$ per tutti i k, si ottiene la forma

$$y_k = \alpha^k \Big(y_0 - \frac{\beta}{1-\alpha} \Big) + \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad \text{se} \quad \alpha \neq 1,$$
$$y_k = y_0 + k\beta, \quad \text{se} \quad \alpha = 1.$$