7. Equivalenza tra la costruzione della misura secondo Rudin (Principles of Mathematical Analysis) e secondo Carathéodory

Teorema 7.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora:*

(i) $A \in \mathscr{M}(\mu) \Longrightarrow$ (C) vale per A : $\quad \forall E \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$;
(ii) Viceversa, se $\mu^*(A) < +\infty$ allora: (C) vale per $A \Longrightarrow A \in \mathscr{M}_F(\mu)$.

La proprietà (C) è chiamata condizione di Carathéodory.

Dimostrazione. Proviamo (i). Sia $A \in \mathscr{M}(\mu)$. Poiché $\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ per subadditività, basta provare che

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Se $\mu^*(E) = +\infty$ non c'è nulla da provare. Supponiamo perciò che $\mu^*(E) < +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ c'è un ricoprimento aperto $\{E_k^\varepsilon\}_{k \ge 1} \subset \mathscr{E}$ di E tale che

$$\sum_{k \ge 1} \mu^*(E_k^\varepsilon) \le \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Sia $E_\varepsilon = \bigcup_{k \ge 1} E_k^\varepsilon$. Allora, essendo E_ε aperto, si ha che $E_\varepsilon \in \mathscr{M}(\mu)$ e, per subadditività,

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E_\varepsilon) \le \sum_{k \ge 1} \mu^*(E_k^\varepsilon) \le \mu^*(E) + \varepsilon,$$

in quanto

$$E \subset \bigcup_{k \ge 1} E_k^\varepsilon = E_\varepsilon.$$

Poiché $E_\varepsilon, A, A^c \in \mathscr{M}(\mu)$ si ha per l'additività di μ^* su $\mathscr{M}(\mu)$

$$\mu^*(E_\varepsilon) = \mu^*(E_\varepsilon \cap A) + \mu^*(E_\varepsilon \cap A^c)$$

e quindi, per la monotonia di μ^*,

$$\mu^*(E_\varepsilon \cap A) \ge \mu^*(E \cap A), \quad \mu^*(E_\varepsilon \cap A^c) \ge \mu^*(E \cap A^c).$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \le \mu^*(E) + \varepsilon,$$

che prova (i).

Proviamo ora (ii). Supponiamo quindi che (C) valga per A e che $\mu^*(A) < +\infty$. Di nuovo, sia $\{A_k^\varepsilon\}_{k \ge 1} \subset \mathscr{E}$ un ricoprimento aperto di A tale che, se $A_\varepsilon = \bigcup_{k \ge 1} A_k^\varepsilon$, che è aperto,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A_\varepsilon) \le \sum_{k \ge 1} \mu^*(A_k^\varepsilon) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Allora

$$\varepsilon \ge \mu^*(A_\varepsilon) - \mu^*(A) =$$

[per (C)]

$$= \mu^*(A_\varepsilon \cap A) + \mu^*(A_\varepsilon \cap A^c) - \mu^*(A) =$$

[essendo $A \subset A_\varepsilon$]

$$= \mu^*(A) + \mu^*(A_\varepsilon \cap A^c) - \mu^*(A) = \mu^*(A_\varepsilon \setminus A).$$

Poiché $A \setminus A_\varepsilon = \emptyset$ otteniamo

$$\mu^*(A_\varepsilon \setminus A) + \underbrace{\mu^*(A \setminus A_\varepsilon)}_{=0} = \mu^*(A_\varepsilon \Delta A) = d(A_\varepsilon, A),$$

e quindi $d(A_\varepsilon, A) \le \varepsilon$. Ora, poiché $\sum_{k \ge 1} \mu^*(A_k^\varepsilon) < +\infty$, abbiamo

$$\forall \delta > 0 \; \exists N(\delta) \in \mathbb{N} \, : \sum_{k \ge N(\delta)+1} \mu^*(A_k^\varepsilon) < \delta.$$

Poniamo

$$B_{N(\delta)} := \bigcup_{k=1}^{N(\delta)} A_k^{\varepsilon} \in \mathscr{E}.$$

Allora $B_{N(\delta)}$ è aperto e $B_{N(\delta)} \subset A_{\varepsilon}$. Scegliamo ora $\delta = \varepsilon$, per cui abbiamo che

$$d(B_{N(\varepsilon)}, A_{\varepsilon}) = \mu^*(B_{N(\varepsilon)} \Delta A_{\varepsilon}) = \mu^*(A_{\varepsilon} \setminus B_{N(\varepsilon)}) = \mu^*\Big(\bigcup_{k \geq N(\varepsilon)+1} A_k^{\varepsilon}\Big) \leq \sum_{k \geq N(\varepsilon)+1} \mu^*(A_k^{\varepsilon}) < \varepsilon,$$

da cui

$$d(B_{N(\varepsilon)}, A) \leq d(B_{N(\varepsilon)}, A_{\varepsilon}) + d(A_{\varepsilon}, A) < 2\varepsilon,$$

che prova che $A \in \mathscr{M}_F(\mu)$. □

Il seguente teorema, corollario di quello precedente, mostra infine che la costruzione seguita da Rudin dà esattamente la stessa teoria ottenuta tramite il completamento di Carathéodory fornito dalla condizione (C).

Teorema 7.2. *$A \in \mathscr{M}(\mu) \Longleftrightarrow$ (C) vale per A.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Longrightarrow$ è il punto (i) del teorema precedente. Dobbiamo quindi mostrare che se (C) vale per A allora $A \in \mathscr{M}(\mu)$. Dunque dobbiamo mostrare che esiste una famiglia $\{A_k\}_{k\geq 1} \subset \mathscr{M}_F(\mu)$ tale che $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$. Sia $\{B_k\}_{k\geq 1}$ una successione di cubi aperti di $\mathbb{R}^n$, con $B_k \subset B_{k+1}$, che invade $\mathbb{R}^n$, cioè $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\geq 1}^{\infty} B_k$. Sia $A_k = A \cap B_k$. Abbiamo che $B_k \in \mathscr{E}$ per ogni k e $\mu(B_k) = \mu^*(B_k) < +\infty$, e poiché $A_k \subset B_k$ abbiamo anche che $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(B_k) < +\infty$ per ogni k. Se facciamo vedere che (C) vale per gli A_k allora $A_k \in \mathscr{M}_F(\mu)$ e il teorema è dimostrato. Osserviamo che (C) vale per i B_k in quanto $B_k \in \mathscr{E} \subset \mathscr{M}_F(\mu)$.

Dato un qualsiasi $E \subset \mathbb{R}^n$ scriviamo

$$\mu^*(E \cap A_k^c) = \mu^*(E \cap (A \cap B_k)^c) = \mu^*(E \cap (A^c \cup B_k^c)) =$$

[usando la (C) per A]

$$= \mu^*(E \cap (A^c \cup B_k^c) \cap A) + \mu^*(E \cap (A^c \cup B_k^c) \cap A^c) =$$
$$= \mu^*(E \cap A \cap B_k^c) + \mu^*(E \cap A^c)$$

(il secondo membro a destra segue dal fatto che $E \cap A^c \cap B_k^c \subset E \cap A^c$ per cui $\mu^*((E \cap A^c) \cup (E \cap A^c \cap B_k)) = \mu^*(E \cap A^c)$). Allora

$$\mu^*(E \cap A_k^c) + \mu^*(E \cap A_k) = \mu^*(E \cap (A \cap B_k)^c) + \mu^*(E \cap (A \cap B_k)) =$$
$$= \mu^*(E \cap A \cap B_k^c) + \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A \cap B_k) =$$

[usando la (C) per $B_k \in \mathscr{M}_F(\mu)$ che fornisce $\mu^*(E \cap A \cap B_k) + \mu^*(E \cap A \cap B_k^c) = \mu^*(E \cap A)$]

$$= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$$

in quanto la (C) vale per A per ipotesi. Ciò conclude la dimostrazione. □

9. I Teoremi di Fubini e di Tonelli

Ricordiamo che $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Sia μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\mathscr{M}(\mu)$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Enunciamo il teorema di Tonelli, sia nella versione globale su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ che in quella locale su $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Useremo le coordinate (x,y) con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 9.1 (Tonelli, versione globale)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile. Allora*

(1) $y \longmapsto f(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^m$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
(2) $x \longmapsto f(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^n$ per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^m$;
(3) $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy$ è misurabile su $\mathbb{R}^n$ (si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità di $y \mapsto f(x,y)$);
(4) $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx$ è misurabile su $\mathbb{R}^m$ (si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità di $x \mapsto f(x,y)$);
(5) si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{\mathbb{R}^m}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx\Big)dy.$$

Teorema 9.2 (Tonelli, versione locale)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ misurabile e $f\colon E \longrightarrow [0,+\infty]$ misurabile. Poniamo*

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ (x,y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in \mathbb{R}^n;\ (x,y) \in E\},$$
$$P_E^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \mu_m^*(E_x) > 0\}, \quad P_E^m = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \mu_n^*(E^y) > 0\}.$$

Allora

(1) E_x è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e P_E^m è misurabile, E^y è misurabile per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^m$ e P_E^n è misurabile;
(2) $E_x \ni y \longmapsto f(x,y)$ è misurabile per quasi ogni $x \in P_E^n$;
(2') $E^y \ni x \longmapsto f(x,y)$ è misurabile per quasi ogni $y \in P_E^m$;
(3) $P_E^n \ni x \longmapsto \int_{E_x} f(x,y)dy$ è misurabile (come prima si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità);
(3') $P_E^m \ni y \longmapsto \int_{E^y} f(x,y)dx$ è misurabile (come prima si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità);
(4) si ha

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_{P_E^n}\Big(\int_{E_x} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{P_E^m}\Big(\int_{E^y} f(x,y)dx\Big)dy.$$

Il teorema di Fubini, che diamo nella sola versione locale, afferma che le conclusioni del teorema di Tonelli continuano a valere quando f può assumere valori di qualsiasi segno ma nell'ipotesi che f sia sommabile.

Teorema 9.3 (Fubini)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ misurabile e $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora, con le notazioni del Teorema 9.2,*

(1) E_x è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e P_E^m è misurabile, E^y è misurabile per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^m$ e P_E^n è misurabile;
(2) $E_x \ni y \longmapsto f(x,y)$ è sommabile per quasi ogni $x \in P_E^n$;
(2') $E^y \ni x \longmapsto f(x,y)$ è sommabile per quasi ogni $y \in P_E^m$;
(3) $P_E^n \ni x \longmapsto \int_{E_x} f(x,y)dy$ è sommabile (come prima si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità);

(3') $P_E^m \ni y \longmapsto \int_{E^y} f(x,y)dx$ *è sommabile (come prima si definisce uguale a zero l'integrale nei punti di non misurabilità);*

(4) si ha

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_{P_E^n}\Big(\int_{E_x} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{P_E^m}\Big(\int_{E^y} f(x,y)dx\Big)dy.$$

È importante notare che se una funzione non soddisfa l'ipotesi di sommabilità del Teorema di Fubini allora gli integrali ripetuti non possono essere in generale scambiati. Si ha infatti il seguente esempio.

Sia data $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x\geq 0,\ x\leq y<x+1 \\ -1, & x\geq 0,\ x+1\leq y<x+2 \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Abbiamo, per il Teorema di Tonelli,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|dxdy = \int_{[0,+\infty)}\Big(\int_{[x,x+2)} dy\Big)dx = \int_{[0,+\infty)} 2dx = +\infty,$$

quindi f **non** è sommabile. Ora calcoliamo $x\longmapsto \int f(x,y)dy$ ed il corrispondente integrale ripetuto:

$$0\leq x\longmapsto \int f(x,y)dy = \int_{[x,x+1)} dy - \int_{[x+1,x+2)} dy = 0 \Longrightarrow \int\Big(\int f(x,y)dy\Big)dx = 0.$$

Calcoliamo poi $y\longmapsto \int f(x,y)dx$ ed il corrispondente integrale ripetuto:

$$y\in[0,1]\Longrightarrow \int f(x,y)dx = \int_0^y f(x,y)dx = y,$$

$$\begin{aligned} y\in[1,2]\Longrightarrow \int f(x,y)dx &= \int_{y-1}^y f(x,y)dx + \int_0^{y-1} f(x,y)dx \\ &= \int_{y-1}^y dx + \int_0^{y-1}(-1)dx = 1+1-y = 2-y,\end{aligned}$$

$$y\in[2,+\infty)\Longrightarrow \int f(x,y)dx = \int_0^{y-2} fdx + \int_{y-2}^{y-1} fdx + \int_{y-1}^y fdx = 0-(y-1-y+2)+(y-y+1) = 0,$$

da cui

$$\int\Big(\int fdx\Big)dy = \int_0^1 ydy + \int_1^2 (2-y)dy = 1,$$

che mostra che gli integrali ripetuti dipendono dall'ordine di integrazione.

10. Il teorema del cambiamento di variabile nell'integrale secondo Lebesgue

Abbiamo il seguente teorema.

Teorema 10.1 (Teorema del cambiamento di variabile)**.** *Siano* $\Omega,\Omega'\subset\mathbb{R}^n$ *aperti. Sia* $F\colon \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Omega'$ *un diffeomorfismo di classe* C^k, $k\geq 1$. *Sia* $f\colon \Omega'\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$. *Allora:*

(a) f *è misurabile su* Ω' *se e solo se* $(f\circ F)|\det J_F|$ *è misurabile su* Ω*;*

(b) $f\in\mathscr{L}(\Omega')$ *se e solo se* $(f\circ F)|\det J_F|\in\mathscr{L}(\Omega)$, *e si ha la formula*

$$\int_{\Omega'} f(x)dx = \int_\Omega (f\circ F)(y)|\det J_F(y)|dy;$$

di più, se $E'\subset\Omega'$ *e* $f\colon E'\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ *allora*

(c) *E' è misurabile se e solo se $F^{-1}(E')$ è misurabile, f è misurabile su E' se e solo se $(f \circ F)|\det J_F|$ è misurabile su $F^{-1}(E')$, $f \in \mathscr{L}(E') \Longleftrightarrow (f \circ F)|\det J_F| \in \mathscr{L}(F^{-1}(E'))$, e si ha la formula*
$$\int_{E'} f(x)dx = \int_{F^{-1}(E')} (f \circ F)(y)|\det J_F(y)|dy.$$

10.1. **La formula per le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$.** Consideriamo $\rho > 0$, $\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in (0, \pi)$, $\theta_{n-1} \in (0, 2\pi)$. Le coordinate sferiche di $\mathbb{R}^n$ sono allora date da
$$\begin{cases} x_n = \rho \cos\theta_1 \\ x_{n-1} = \rho \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_{n-2} = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ \vdots \\ x_3 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \dots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ x_2 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \\ x_1 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}. \end{cases}$$
In questo caso per il modulo del determinante della matrice jacobiana si ha
$$|\det J| = \rho^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3} \dots \sin\theta_{n-2}.$$

11. Applicazioni importanti del Teorema della Convergenza Dominata

Sia Y uno spazio metrico e sia $E \subset \mathbb{R}^n_x$ un insieme misurabile. Sia poi $f \colon E \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che $E \ni x \longmapsto f(x,y)$ sia sommabile per ogni $y \in Y$. Poniamo $F(y) := \int_E f(x,y)dx$.

Teorema 11.1. *Supponiamo che:*

(i) *$Y \ni y \longmapsto f(x,y)$ sia continua per ogni $x \in E$;*
(ii) *per ogni $y_0 \in Y$ esiste $\delta > 0$ ed esiste $g \in \mathscr{L}(E)$ tali che*
$$|f(x,y)| \le g(x), \quad q.d.\ in\ x \in E, \quad \forall y \in B_\delta(y_0).$$

Allora $F \colon Y \ni y \longmapsto F(y) \in \mathbb{C}$ è continua.

Teorema 11.2. *Supponiamo che Y sia un aperto di $\mathbb{R}^m$ e che valgano le seguenti ipotesi:*

(i) *$Y \ni y \longmapsto f(x,y) \in C^1(Y;\mathbb{C})$, per ogni $x \in E$;*
(ii) *per ogni $y_0 \in Y$ esiste $B_\delta(y_0) \subset Y$ ed esiste $g \in \mathscr{L}(E)$ tali che*
$$|f(x,y)| + \sum_{j=1}^m |\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)| \le g(x), \quad q.d.\ in\ x \in E, \quad \forall y \in B_\delta(y_0).$$

Allora $F \in C^1(Y;\mathbb{C})$ e si ha
$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)dx, \quad 1 \le j \le m.$$