UTILIA SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli **aperti**, $f \in C^0(I)$, $g \in C^0(J)$ con $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$. Sia $(x_0, y_0) \in I \times J$. Vale il seguente risultato.

Teorema 1.1. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y), \\ \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

*Esiste **un'unica soluzione** $\phi\colon (a,b) \longrightarrow J$ di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy, con (a,b) **massimale**, nel senso che se $(a,b) \subsetneq I$ allora **non** esiste $(a',b') \subset I$ con $(a,b) \subsetneq (a',b')$ al quale ϕ può essere estesa come soluzione.*

Dimostrazione. Poniamo

$$F\colon I \ni x \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad G\colon J \ni y \longmapsto G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)} ds.$$

Allora $F \in C^1(I)$ e $G \in C^1(J)$. Di più, G è monotona (crescente o decrescente) in quanto il segno di $G'(y) = 1/g(y)$ è costante. Dunque $G(J) = (c,d)$ e $G^{-1}\colon (c,d) \longrightarrow J$ è di classe C^1. Si noti che $G(y_0) = F(x_0) = 0$. Consideriamo ora l'equazione

$$G(y) = F(x).$$

Per risolvere l'equazione per $y \in J$, che sicuramente ha soluzione quando $y = y_0$ e $x = x_0$, occorre determinare un **intervallo aperto** $(a,b) \subset F^{-1}(c,d)$, tra quelli che compongono $F^{-1}(c,d)$, contentente x_0 (la componente connessa di $F^{-1}(c,d)$ che contiene x_0). Determiniamo dunque gli estremi a e b come segue:

$$a = \inf\{x \in I;\ c < F(t) < d,\ \forall t \in [x, x_0]\}, \quad b = \sup\{x \in I;\ c < F(t) < d,\ \forall t \in [x_0, x]\}.$$

Si ha allora che

$$\phi\colon (a,b) \ni x \longmapsto \phi(x) := G^{-1}(F(x))$$

è la soluzione richiesta, in quanto ϕ è di classe C^1 (le funzioni G^{-1} ed F lo sono), vale $\phi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$ e si ha (siccome $\dfrac{dG^{-1}}{dz}(z) = g(G^{-1}(z))$)

$$\phi'(x) = \frac{dG^{-1}}{dz}\Big|_{z=G^{-1}(F(x))} F'(x) = g(G^{-1}(F(x)))f(x) = g(\phi(x))f(x).$$

Infine, se $\psi\colon (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ è un'altra soluzione del problema di Cauchy, allora $\psi \in C^1$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\psi(x_0) = y_0$ e

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\psi'(t)}{g(\psi(t))} dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Ora, cambiando variabile $s = \psi(t)$ nell'integrale di sinistra si ottiene

$$\int_{y_0}^{\psi(x)} \frac{ds}{g(s)} = G(\psi(x)) = F(x),\ \ \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Dunque anche $\psi(x) = G^{-1}(F(x))$ per tutti gli $x \in (\alpha, \beta)$, per cui, essendo $x_0 \in (\alpha, \beta) \cap (a,b)$, necessariamente $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$. $\square$

2. Esistenza ed unicità

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto. Sia $f\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **continua** e **localmente lipschitziana**. Consideriamo, per $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Teorema 2.1 (Teorema di esistenza ed unicità locale)**.** *Per ogni fissati* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *sia* $\overline{S_{h,r}(t_0,x_0)} = [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B_r(x_0)}$ *una scatola chiusa contenuta in* $I \times \Omega$*, tale che, se*

$$M := \max_{(t,x) \in \overline{S_{h,r}(t_0,x_0)}} \|f(t,x)\|,$$

ed $L > 0$ *è la costante di lipschitzianità di* f *sulla scatola (vale cioè che*

$$\|f(t,x) - f(t,x')\| \leq L\|x - x'\|, \quad \forall (t,x),(t,x') \in \overline{S_{h,r}(t_0,x_0)}),$$

si abbia

$$Mh < r \quad e \quad Lh < 1.$$

Allora esiste un'unica soluzione $\phi\colon [t_0 - h, t_0 + h] \longrightarrow \overline{B_r(x_0)}$ *di (1). In particolare, il grafico di* ϕ *è interamente contenuto nella scatola* $\overline{S_{h,r}(t_0,x_0)}$*.*

Teorema 2.2 (Teorema di esistenza ed unicità della soluzione massimale)**.** *Se* $\phi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^n$*,* $J \subset I$ *intervallo, è una soluzione massimale dell'equazione* $\dot{x} = f(t,x)$ *allora* J *è* ***aperto****. Inoltre per ogni* $(t_0,x_0) \in I \times \Omega$ *esiste* ***un'unica*** *soluzione massimale di (1), la quale si chiama anche* ***curva integrale dell'equazione*** $\dot{x} = f(t,x)$ ***passante per*** (t_0,x_0)*. Infine, se* $\phi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è una soluzione massimale e* $\tau_+ := \sup J < \sup I$ *(risp.* $\tau_- := \inf J > \inf I$*) allora per ogni compatto* $K \subset \Omega$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $\phi(t) \notin K$ *per ogni* $t \in (\tau_+ - \varepsilon, \tau_+)$ *(risp.* $\phi(t) \notin K$ *per ogni* $t \in (\tau_-, \tau_- + \varepsilon)$*).*

3. Il wronskiano e il metodo di Lagrange della variazione della costante arbitraria

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a_0, \ldots, a_{n-1} \in C^0(I;\mathbb{R})$. Consideriamo l'operatore differenziale

$$P\colon C^n(I) \longrightarrow C^0(I), \quad Pu = u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_0(x), \quad x \in I.$$

Sia u_j, $j = 1, \ldots, n$, una n-upla fondamentale per P e sia

$$W(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

la **matrice wronskiana** di $(u_1, \ldots, u_n)$. Possiamo scegliere le $(u_1, \ldots, u_n)$ in modo tale che si abbia in $W(x_0) = \mathrm{Id}$, dove $x_0 \in I$ è fissato. Poiché in generale, per una matrice $A(x) = [a_1(x)|a_2(x)|\ldots|a_n(x)]$, dove $a_1, \ldots, a_n$ sono vettori colonna di funzioni di classe C^1, si ha

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \sum_{j=1}^{n} \det[a_1(x)|\ldots|a_j'(x)|\ldots|a_n(x)],$$

usando il fatto che $Pu_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, si ottiene che

$$\frac{d}{dx}\det W(x) = \det \begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}(x)u_1^{(n-j)}(x) & \dots & \dots & -\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}(x)u_n^{(n-j)}(x) \end{bmatrix}$$
$$= -a_{n-1}(x)\det W(x), \quad \forall x \in I.$$

Ciò mostra il seguente teorema di Liouville.

Teorema 3.1 (Teorema di Liouville)**.** *Il determinante* $\det W(x)$ *della matrice wronskiana* $W(x)$ *soddisfa l'equazione*

$$(\det W(x))' = -a_{n-1}(x)\det W(x), \quad x \in I,$$

da cui

$$\det W(x) = \exp(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt)\det W(x_0).$$

Quindi, essendo $\det W(x_0) \neq 0$*, si ha che*

$$\det W(x) \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema (**metodo di Lagrange della variazione della costante arbitraria**).

Teorema 3.2. *Si consideri l'equazione* $Pu = f$*, dove* $f \in C^0(I)$ *è data. Sia* $(u_1, \dots, u_n)$ *una* n*-upla fondamentale e per* $x \in I$ *sia* $\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{bmatrix}$ *un vettore di funzioni che soddisfa il sistema* $n \times n$

$$W(x)\psi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Siano allora $\varphi_j \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *le funzioni di classe* $C^1(I)$ *definite da*

$$\varphi_j(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_j(t)dt, \quad j = 1, \dots, n,$$

e si ponga

$$u_p(x) = \left\langle \begin{bmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Allora $Pu_p = f$ *e dunque* u_p *è una soluzione particolare dell'equazione data.*

Dimostrazione. Il sistema (2) è risolubile in quanto $\det W(x) \neq 0$ per tutti gli $x \in I$. Dunque

$$\psi(x) = W(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \psi_j \in C^0(I),\ 1 \leq j \leq n.$$

Allora, indicando con u il vettore colonna ${}^t(u_1, \dots, u_n)$ e con φ il vettore colonna ${}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ si ha:

$$u_p'(x) = \langle u'(x), \varphi(x)\rangle + \underbrace{\langle u(x), \varphi'(x)\rangle}_{=0} = \langle u'(x), \varphi(x)\rangle$$

in quanto $\langle u', \varphi \rangle = 0$ è la prima equazione del sistema (2),

$$u_p^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\langle u'(x), \varphi(x) \rangle = \langle u^{(2)}(x), \varphi(x) \rangle + \underbrace{\langle u'(x), \varphi'(x) \rangle}_{=0} = \langle u^{(2)}(x), \varphi(x) \rangle$$

in quanto $\langle u', \varphi' \rangle = 0$ è la seconda equazione del sistema (2), e così via fino ad

$$u_p^{(n-1)}(x) = \langle u^{(n-1)}(x), \varphi(x) \rangle + \underbrace{\langle u^{(n-2)}(x), \varphi'(x) \rangle}_{=0} = \langle u^{(n-1)}(x), \varphi(x) \rangle$$

in quanto $\langle u^{(n-2)}, \varphi' \rangle = 0$ è la $n-1$-esima equazione del sistema (2), e finalmente

$$u_p^{(n)}(x) = \langle u^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle + \underbrace{\langle u^{(n-1)}(x), \varphi'(x) \rangle}_{=f(x)} = \langle u^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle + f(x),$$

in quanto $\langle u^{(n-1)}, \varphi' \rangle = f$ è la n-esima equazione del sistema (2). Dunque, riscostituendo l'azione di P su u_p usando la linearità, e cioè moltiplicando le prime $n-1$ equazioni rispettivamente ciascuna per a_{n-j} (per $1 \leq j \leq n$) e sommando, si ottiene

$$Pu_p = u_p^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} u_p^{(n-j)} = \sum_{j=1}^{n} (\underbrace{Pu_j}_{=0}) \varphi_j + f = f,$$

concludendo così la dimostrazione. $\square$