UTILIA SULLE VARIETÀ, LE CURVE E LE 1-FORME DIFFERENZIALI

1. Varietà immerse $n-k$-dimensionali di $\mathbb{R}^n$ e Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e siano $f_1, \dots, f_k \in C^r(\Omega)$, $r \geq 1$. Si consideri la funzione a valori vettoriali $F = (f_1, \dots, f_k)\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e sia J_F la sua matrice jacobiana (ricordando che abbiamo rappresentato il gradiente come un vettore riga)

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \hline \nabla f_2(x) \\ \hline \vdots \\ \hline \nabla f_k(x) \end{bmatrix}.$$

Si noti che J_F è una matrice $k \times n$.

Definizione 1.1 (Varietà immersa)**.** *Una **varietà locale immersa di $\mathbb{R}^n$ di dimensione** $n-k$ **e classe** C^r ($r \geq 1$) è un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x_0 \in M$ esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 e k funzioni $f_1, \dots, f_k \in C^r(U)$ tali che*

$$M \cap U := \{x \in U;\ f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0,\ \operatorname{rg} J_F(x) = k\}.$$

*Equivalentemente si dice anche che M è un **vincolo di dimensione** $n-k$ (o **di codimensione** k) **e classe C^r** di $\mathbb{R}^n$.*

Data una varietà $n-k$-dimensionale M di classe C^r e dato $x_0 \in M$, lo **spazio tangente a M in x_0** è lo spazio vettoriale

$$T_{x_0}M := \{v \in \mathbb{R}^n;\ J_F(x_0)v = 0\} = \operatorname{Ker} J_F(x_0),$$

e lo **spazio normale a M in x_0** è lo spazio vettoriale

$$N_{x_0}M := \operatorname{Span}\{{}^t\nabla f_1(x_0), \dots, {}^t\nabla f_k(x_0)\} = \operatorname{Im}{}^tJ_F(x_0).$$

Si ha

$$\dim T_{x_0}M = n-k, \quad \dim N_{x_0}M = k, \quad \forall x_0 \in M,$$

$$(T_{x_0}M)^\perp = N_{x_0}M, \quad \mathbb{R}^n = T_{x_0}M \oplus N_{x_0}M, \quad \forall x_0 \in M.$$

Esempio 1.2. *Abbiamo i seguenti esempi ($r > 0, h \in \mathbb{R}$):*

- $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ *è una varietà immersa di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 e classe C^∞;*
- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ *è una varietà immersa di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e classe C^∞;*
- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = r^2,\ z = h\}$ *è una varietà immersa di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e classe C^∞;*
- *se $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^m$, $k \geq 1$, allora $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m;\ x \in \Omega\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ è una varietà immersa di $\mathbb{R}^{n+m}$ di dimensione n e classe C^k. Infatti in questo caso se $(x,y) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ sono le coordinate scelte, allora, scrivendo $f = (f_1, \dots, f_m)$, si ha che $M = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m;\ g_j(x,y) = y_j - f_j(x) = 0,\ 1 \leq j \leq m\}$.*

Definizione 1.3. *Sia $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $V \subset \Omega$ un vincolo. Si dice che $x_0 \in V$ è un **punto di massimo, risp. minimo, relativo vincolato** (o **punto estremale vincolato**) se esiste $B_r(x_0) \subset \Omega$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$, risp. $f(x) \geq f(x_0)$, per tutti gli $x \in B_r(x_0) \cap V$.*

Teorema 1.4 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Se $f \in C^1(\Omega)$ ed x_0 è un punto di massimo o minimo relativo vincolato a $V \subset \Omega$, con $V \subset \Omega$ vincolo di dimensione $n-k$, allora*

$$^t\nabla f(x_0) \in N_{x_0}V,$$

esistono cioè $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (i moltiplicatori di Lagrange) tali che

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla f_j(x_0),$$

dove, si ricordi, $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ sono le equazioni del vincolo V vicino ad x_0.

Dunque, se $x_0 \in V$ è un punto estremale vincolato per f con moltiplicatori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, allora la funzione $g(x,\mu) := f(x) - \sum_{j=1}^k \mu_j f_j(x)$ definita per $(x,\mu) \in U \times \mathbb{R}^k$, ha un punto critico in (x_0,λ) (dove $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$), cioè $\nabla_{x,\mu} g(x_0,\lambda) = (0,0)$ e quindi, equivalentemente,

$$x_0 \in U \ \text{ e } \quad \nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla f_j(x_0), \quad f_1(x_0) = 0, \dots, f_k(x_0) = 0.$$

2. Curve e 1-forme differenziali

(i) Una curva $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è **regolare** se $\gamma \in C^1$ e $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a,b)$.

(ii) Una curva $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è **regolare a tratti** se $\gamma \in C^0$ ed esiste una scomposizione $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = b$ di $[a,b]$ tale che $\gamma_j := \gamma\big|_{[a_{j-1},a_j]}$, $1 \leq j \leq N$, è regolare.

(iii) Ricordiamo che due curve $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sono **equivalenti**, in simboli $\varphi \sim \psi$, se c'è $p\colon [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ *di classe C^1, suriettiva e con derivata $p'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, tale che $\varphi(t) = \psi(p(t))$, $\forall t \in [a,b]$*. Allora:
- φ è regolare se e solo se ψ è regolare;
- se $p'(t) > 0$ allora si dice che φ e ψ *hanno lo stesso verso*, in simboli $\varphi \overset{(+)}{\sim} \psi$;
- se $p'(t) < 0$ allora si dice che φ e ψ *hanno verso opposto*, in simboli $\varphi \overset{(-)}{\sim} \psi$.

(iv) Date le curve $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue con $\gamma_1(b) = \gamma_2(\alpha)$, definiamo la *somma* $\gamma_1 + \gamma_2\colon [a, b+\beta-\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tramite

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t),\ a \leq t \leq b, \\ \\ \gamma_2(t-b+\alpha),\ b \leq t \leq b+\beta-\alpha. \end{cases}$$

È subito chiaro che anche $\gamma_1+\gamma_2$ è continua. Inoltre se γ_1, γ_2 sono regolari a tratti, anche $\gamma_1+\gamma_2$ lo è.

Data $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiamo l'*opposto* di γ essere

$$(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t),\ a \leq t \leq b.$$

Si ha subito che se γ è regolare anche $-\gamma$ lo è, e che $-\gamma \overset{(-)}{\sim} \gamma$.

(v) Si ha che se $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare a tratti, allora (nella notazione del punto (ii))

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N.$$

(vi) Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$, si ha che $\displaystyle\int_\gamma f ds$ **non** dipende dal verso di percorrenza di γ. Infatti si ha che

$$\varphi \sim \psi \Longrightarrow \int_\varphi f ds = \int_\psi f ds.$$

Dunque $\int_{-\gamma} f ds = \int_\gamma f ds$. Si ha inoltre che

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

(vii) Sia data ora $\omega \in C^0(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$ una 1-forma differenziale. Siano φ, ψ curve regolari con sostegno contenuto in Ω. Si ha

$$\varphi \sim \psi \Longrightarrow \int_\varphi \omega = \operatorname{sgn}(p') \int_\psi \omega.$$

In particolare se γ è regolare con sostegno in Ω

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega.$$

Inoltre se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, con γ_1, γ_2 regolari con sostegno in Ω, allora

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

(viii) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Dati $x_1, x_2 \in \Omega$ sia

$$\Gamma(x_1,x_2) = \{\text{curve regolari a tratti con sostegno contenuto in } \Omega, \text{ congiungenti } x_1 \text{ con } x_2\}.$$

Dato $x_0 \in \Omega$ sia

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Omega;\ \exists \gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega \text{ regolare a tratti con } \gamma([a,b]) \subset \Omega \text{ e } \gamma(a) = x_0,\ \gamma(b) = x\}.$$

Teorema 2.1. *Se Ω è **aperto e connesso** allora $\Gamma(x_0) = \Omega$, $\forall x_0 \in \Omega$, e dunque $\Gamma(x_1,x_2) \neq \emptyset$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che, dato $x_0 \in \Omega$ arbitrario, l'insieme $\Gamma(x_0)$ è aperto e chiuso in quanto questo implica allora che $\Gamma(x_0) = \Omega$ e dunque anche che per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ si ha $\Gamma(x_1,x_2) \neq \emptyset$. Essendo Ω aperto, esiste $r > 0$ sufficientemente piccolo tale che $B_r(x_0) \subset \Omega$. Ma allora per ogni $x \in B_r(x_0)$ con $x \neq x_0$ la curva regolare $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ data da $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ congiunge x_0 con x rimanendo in Ω e d'altra parte la curva chiusa regolare a tratti $\gamma + (-\gamma)$ congiunge x_0 con se stesso, il che prova che $B_r(x_0) \subset \Gamma(x_0)$ e dunque che $\Gamma(x_0)$ è non vuoto. Si noti che si può anche costruire γ semplice e chiusa regolare che parta da x_0 ed arrivi ad x_0: basta infatti costruire una piccola circonferenza che passi per x_0 interamente contenuta in $B_r(x_0)$. Per provare che è aperto, sia $x_1 \in \Gamma(x_0)$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_1) \subset \Omega$ e dunque esiste una curva regolare a tratti che congiunge x_0 con x_1 e poi un segmento di raggio della palla $B_r(x_1)$ che congiunge x_1 ad ogni $x \in B_r(x_1)$. Dunque $B_r(x_1) \subset \Gamma(x_0)$. Proviamo infine che $\Gamma(x_0)$ è chiuso. Prendiamo dunque una successione $(x_k)_{k\geq 1} \subset \Gamma(x_0)$ con $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \hat{x} \in \Omega$. Esiste $r > 0$ sufficientemente piccolo tale che $B_r(\hat{x}) \subset \Omega$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ (dipendente da r) tale che $x_k \in B_r(\hat{x})$ per ogni $k > k_0$. Preso allora $k = k_0 + 1$ (per esempio), sia $\gamma_1 \in \Gamma(x_0)$ la curva (regolare a tratti) che congiunge x_0 con x_k e sia γ_2 il segmento di raggio di $B_r(\hat{x})$ che congiunge x_k con $\hat{x}$. La curva $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ è allora regolare a tratti e congiunge x_0 con $\hat{x}$. Dunque $\hat{x} \in \Gamma(x_0)$ e quindi $\Gamma(x_0) = \Omega$, il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.2. *L'argomento appena visto ci permette anche di concludere che in un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ ogni due punti punti distinti possono essere connessi da un arco di curva semplice regolare a tratti.*

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, sia $\omega \in C^0(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$. Allora:*

$$\omega \text{ è esatta} \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(x_1,x_2),\ \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega. \tag{1}$$

Corollario. *Stesse ipotesi del teorema precedente. Allora:*

(2)
$$\omega \text{ è esatta} \iff \int_\gamma \omega = 0,\ \forall \gamma \text{ curva chiusa semplice regolare a tratti con sostegno contenuto in } \Omega.$$

(ix) Sia $\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) dx_k$ una forma differenziale su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema. *Se $\omega \in C^1(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$ è esatta allora deve risultare*

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(x),\ \ \forall x \in \Omega,\ \forall j,k \text{ con } 1 \le j,k \le n. \tag{3}$$

Definizione. *Una forma $\omega \in C^1(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$ si dice* ***chiusa*** *se vale la condizione (3).*

Definizione. *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato (rispetto ad un suo punto x_0) se per ogni $x \in \Omega$ il segmento $\{x_0 + t(x - x_0);\ t \in [0,1]\}$ di estremi x_0 e x è tutto contenuto in Ω.*

Un insieme convesso Ω (cioè per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento di estremi x_1 e x_2 è tutto contenuto in Ω) è stellato rispetto ad ogni suo punto.

Teorema. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto stellato allora ogni forma chiusa di classe C^1 su Ω è esatta.*

3. Il teorema di Gauss-Green e conseguenze

Sia γ: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa, semplice e regolare a tratti, il cui sostegno sia la frontiera ∂E di un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ (che necessariamente risulta essere compatto e connesso). Dunque $\partial E = \{\gamma(t);\ t \in [a,b]\}$. Supponiamo che γ sia orientata positivamente, cioè si ha, percorrendo la curva per t crescenti, che l'insieme E giace sempre a sinistra. Scriveremo allora $\partial^+ E$ per indicare che la frontiera di E è orientata positivamente. Si ha il Teorema di Gauss-Green.

Teorema 3.1. *Sia E come sopra e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto tale che $\bar{E} \subset \Omega$. Sia $\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ una 1-forma differenziale di classe C^1 su Ω. Allora*

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \iint_E \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \Big) dxdy. \tag{4}$$

Un corollario importante del Teorema di Gauss-Green riguarda le 1-forme differenziali su aperti *semplicemente connessi* di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.2. *Si dice che un sottoinsieme connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è* ***semplicemente connesso*** *se ogni curva (regolare a tratti) semplice e chiusa con sostegno contenuto in Ω delimita una regione limitata del piano interamente contenuta in Ω con frontiera data dal sostegno della curva.*

Corollario 3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso e sia $\omega \in C^1(\Omega, (\mathbb{R}^2)^*)$. Allora ω è chiusa se e solo se ω è esatta.*

Dimostrazione. Sappiamo già che se ω è esatta allora ω è chiusa. Vediamo il viceversa. Sia $\omega = Mdx + Ndy$ chiusa. Dunque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Sia ora γ una qualsiasi curva semplice chiusa e regolare a tratti. Dunque esiste $E \subset \Omega$ tale che $\gamma = \partial E$. Allora, con una scelta di segni dipendente dal fatto che γ dà o no l'orientazione positiva a ∂E si ha

$$\pm \int_\gamma \omega = \int_{\partial^+ E} \omega = \iint_E \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \Big) dxdy = 0.$$

□

Voglio dare due applicazioni importanti del Teorema di Gauss-Green: il *Teorema della divergenza* ed il *Teorema di Stokes*.

3.1. **Il Teorema della divergenza.** Con γ come sopra, poniamo

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \Big(\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\Big) = \tau = (\tau_1, \tau_2) = \textbf{versore velocità di } \gamma,$$

e consideriamo il versore

$$\nu = \nu_\gamma = (\tau_2, -\tau_1) = \textbf{normale unitaria esterna di } \partial E.$$

Consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (N(x,y), M(x,y))$. Si ha allora che

$$\langle F(\gamma(t)), \nu(t)\rangle = N(\gamma(t))\frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma'(t)\|} - M(\gamma(t))\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

per cui dal Teorema di Gauss-Green segue immediatamente la formula (chiamata *Teorema della divergenza*)

$$\int_{\partial^+E}\langle F,\nu\rangle ds = \int_\gamma(-Mdx+Ndy) = \iint_E\Big(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_E \operatorname{div} F\, dxdy, \tag{5}$$

dove

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}$$

è la **divergenza** del campo F. La formula (5) esprime la relazione tra il *flusso del campo F attraverso la frontiera di E* (il membro a sinistra della formula) e l'*integrale della divergenza del campo sopra E*.

3.2. **Il Teorema di Stokes.** Pensiamo ora ad E come ad un insieme planare di $\mathbb{R}^3$, cioè lo pensiamo come $E \subset \mathbb{R}^2_{x,y}\times\{0\}\subset\mathbb{R}^3_{x,y,z}$. Consideriamo il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) = (M(x,y), N(x,y), 0).$$

Il **rotore** del campo F (indicato con $\operatorname{rot} F$ o $\nabla\times F$, o $\operatorname{curl} F$) è il campo vettoriale

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_1 & F_2 & F_3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ M & N & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix},$$

che quindi punta nella direzione dell'asse z. D'altra parte, la **normale unitaria "esterna" ν_E del dominio (superficiale)** E è il vettore $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \vec{k}$ (si pensi alla regola della vite), per cui dal Teorema di Gauss-Green segue immediatamente la formula (chiamata *Teorema di Stokes*)

$$\int_{\partial^+E}\langle F,\tau\rangle ds = \int_\gamma\langle F, d\vec{s}\rangle = \iint_E\langle \operatorname{rot} F, \nu_E\rangle dxdy. \tag{6}$$

La formula (6) esprime la relazione tra la *circuitazione del campo F lungo il bordo di E* (il membro a sinistra della formula) ed il *flusso del rotore del campo attraverso la superficie E*

Il Teorema di Stokes può essere generalizzato ad $\mathbb{R}^n$. Particolarmente importante è il caso di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Sia allora $\varphi\colon \overline{D}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, dove $D\subset\mathbb{R}^2_{u,v}$ è un aperto connesso limitato, e sia $\Sigma = \varphi(D)$. Scelto $E\subset D$ aperto, tale che $\overline{E}\subset D$ e con frontiera regolare ∂E definita dal sostegno di una curva regolare (a tratti) semplice e chiusa $\tilde{\gamma}\colon I\longrightarrow D$, sia $S := \varphi(E)\subset\Sigma$. Allora $\partial S = \varphi(\tilde{\gamma}) = \gamma$, dove ora $\gamma = \varphi\circ\tilde{\gamma}\colon I\longrightarrow\Sigma$ è una curva regolare (a tratti) semplice e chiusa di $\mathbb{R}^3$ con sostegno contenuto in Σ. *Se $\tilde{\gamma}$ è orientata positivamente diremo che il bordo $\partial S \subset \Sigma$ è orientato positivamente*, scrivendo $\partial^+ S$. Allora (6) diventa in questo caso

$$\int_{\partial^+ S} \langle F, \tau \rangle ds = \int_\gamma \langle F, d\vec{s} \rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu_\Sigma \rangle d\sigma, \tag{7}$$

essendo, come al solito, $d\sigma$ l'elemento d'area infinitesimo di Σ, e dove $\nu_\Sigma = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \|}$ è il versore normale a Σ. Notiamo che in questo caso l'orientazione $\partial^+ S$ è quella indotta da S su ∂S, cioè indotta da ν_Σ, per cui *un osservatore con i piedi su ∂S e la testa nella direzione positiva di ν_Σ percorre ∂S tenendo S alla sua sinistra*.

Definizione 3.4. *Un insieme connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è **semplicemente connesso** se ogni curva (regolare a tratti) semplice e chiusa con supporto in Ω è bordo di una superficie regolare con sostegno in Ω.*

Dal Teorema di Stokes, nella formulazione (7), segue subito il seguente teorema sulle 1-forme differenziali.

Teorema 3.5. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, allora ogni forma chiusa ω definita in Ω è esatta.*

Dimostrazione. Ciò segue immediatamente da (7) e dall'osservazione che se, usando coordinate $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la forma differenziale $\omega(x) = \sum_{j=1}^3 a_j(x) dx_j$ è pensata come il campo vettoriale $F(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$, allora la forma ω è chiusa se e solo se il campo vettoriale F è irrotazionale, cioè se e solo se $\operatorname{rot} F(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$. Si ha infatti che ω è chiusa se

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2},$$

il che equivale a

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ -(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = 0.$$

□