UTILIA SULLE VARIETÀ, LE CURVE E LE 1-FORME DIFFERENZIALI

1. Teorema di Dini, varietà immerse $n-k$-dimensionali di $\mathbb{R}^n$ e Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e siano $f_1, \dots, f_k \in C^r(\Omega)$, $r \geq 1$. Si consideri la funzione a valori vettoriali $F = (f_1, \dots, f_k) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e sia J_F la sua matrice jacobiana (ricordando che abbiamo rappresentato il gradiente come un vettore riga)

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \hline \nabla f_2(x) \\ \hline \vdots \\ \hline \nabla f_k(x) \end{bmatrix}.$$

Si noti che J_F è una matrice $k \times n$.

Teorema 1.1 (di Dini)**.** *Sia data $F \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ come sopra. Sia $x_0 \in \Omega$ tale che $F(x_0) = 0$. Supponiamo che $\operatorname{rg} J_F(x_0) = k$. Supponiamo inoltre di avere scelto le variabili in modo tale che, scrivendo $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ e partizionando la jacobiana di F come $J_F(x) = [J_{F,x'}(x) | J_{F,x''}(x)]$, dove $J_{F,x'}(x)$ è $k \times (n-k)$ ed è costituita dalle derivate di F ripetto alle variabili x', e $J_{F,x''}(x)$ è $k \times k$ ed è costituita dalle derivate di F ripetto alle variabili x'', si abbia che $J_{F,x''}(x_0)$ è invertibile. Allora esistono intorni aperti V' di x_0' e V'' di x_0'' tali che $V' \times V'' \subset \Omega$, ed una unica funzione $\varphi \colon V' \longrightarrow V''$ tale che:*

- $\varphi(x_0') = x_0''$,
- $\varphi \in C^r(V')$,
- *per la jacobiana di φ si ha*

$$J_\varphi(x') = -J_{F,x''}(x)^{-1} J_{F,x'}(x), \quad \forall x' \in V'. \tag{1}$$

Il Teorema di Dini permette di comprendere alcuni aspetti geometrici delle varietà immerse di $\mathbb{R}^n$ (dette anche *vincoli regolari*).

Definizione 1.2 (Varietà immersa)**.** *Una **varietà immersa di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-k$ e classe C^r** ($r \geq 1$) è un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x_0 \in M$ esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 e k funzioni $f_1, \dots, f_k \in C^r(U)$ tali che*

$$M \cap U := \{x \in U;\ f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0,\ \operatorname{rg} J_F(x) = k\}.$$

*Equivalentemente si dice anche che M è un **vincolo di dimensione** $n-k$ (o **di codimensione** k) **e classe** C^r di $\mathbb{R}^n$.*

Il Teorema di Dini permette di costruire curve interamente contenute (localmente) in una varietà M, passanti per un punto di M. Dire che una curva $\gamma \colon I \longrightarrow M$ equivale a dire, quindi che, supponendo che il sostegno $\gamma(I)$ sia contenuto in un aperto $V' \times V'' \subset U$, con U come nella definizione di varietà e $V' \times V''$ come nel teorema di Dini, con relative funzioni $F = (f_1, \dots, f_k)$ definite su U, si ha $f_j(\gamma(t)) = 0$ per $j = 1, \dots, k$. Dunque, usando il teorema, abbiamo che γ è contenuta in M se e solo se

$$\gamma(t) = (\gamma'(t), \gamma''(t)) = (\gamma'(t), \varphi(\gamma'(t))), \tag{2}$$

e, in particolare, per la velocità di γ abbiamo

$$\dot\gamma(t) = \big(\dot\gamma'(t), J_\varphi(\gamma'(t))\dot\gamma'(t)\big), \text{ cioè } \dot\gamma''(t) = J_\varphi(\gamma'(t))\dot\gamma'(t). \tag{3}$$

Dunque basta assegnare la curva $\gamma' : I \longrightarrow V' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ per ottenere una curva interamente contenuta in M.

Se si ha inoltre che $\gamma \in C^1$, allora, necessariamente, per la velocità di γ si deve avere (dalla regola della catena)

$$\frac{d}{dt}\Big(F(\gamma(t))\Big) = 0 = J_F(\gamma(t))\dot\gamma(t) = J_{F,x'}(\gamma(t))\dot\gamma'(t) + J_{F,x''}(\gamma(t))\dot\gamma''(t), \quad \forall t \in I. \tag{4}$$

Quindi *se una curva γ è contenuta in M allora la sua velocità $\dot\gamma$ deve essere contenuta nel kernel della matrice jacobiana di F in ogni punto del sostegno*:

$$\dot\gamma(t) \in \operatorname{Ker} J_F(\gamma(t)), \quad \forall t \in I.$$

Questa osservazione permette, data una varietà $(n-k)$-dimensionale M di classe C^r e dato $x_0 \in M$, di definire lo **spazio tangente a** M **in** x_0 come l'insieme

$$T_{x_0}M = \{w \in \mathbb{R}^n,\ \exists \gamma \colon I \xrightarrow{C^1} M \cap (V' \times V''),\ \gamma(t_0) = x_0,\ \dot\gamma(t_0) = w\}.$$

Per quanto detto sopra abbiamo allora che se $w \in T_{x_0}M$ allora $w \in \operatorname{Ker} J_F(x_0)$, quindi

$$T_{x_0}M \subset \operatorname{Ker} J_F(x_0).$$

A questo punto dobbiamo chiederci se $T_{x_0}M \neq \emptyset$. Occorre sapere costruire una curva contenuta in M, passante per $x_0 \in M$ e avente come vettore tangente in x_0 un vettore w, che necessariamente deve appartenere a $\operatorname{Ker} J_F(x_0)$. Di nuovo, il Teorema di Dini ci permette di fare la costruzione. In primo luogo, siccome $w = (w', w'') \in \operatorname{Ker} J_F(x_0)$, da (3) abbiamo che deve equivalentemente essere

$$w'' = J_\varphi(x_0')w'.$$

Prendiamo allora

$$\gamma'(t) := x_0' + tw', \quad \gamma''(t) = \varphi(x_0' + tw'), \quad |t| < \delta,$$

dove $\delta > 0$ è scelto in modo che $x_0' + tw' \in V'$ per $|t| < \delta$. Poniamo

$$\gamma \colon (-\delta, \delta) = I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (x_0' + tw', \varphi(x_0' + tw')).$$

Abbiamo dunque che $\dot\gamma(0) = w$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(I) \subset M \cap (V' \times V'')$. Perciò $T_{x_0}M \neq \emptyset$. La costruzione mostra anche che $T_{x_0}M$ è uno *spazio vettoriale*. Infatti se $w_1, w_2 \in T_{x_0}M$ allora $w_j'' = J_\varphi(x_0'')w_j'$, $j = 1, 2$, e si costruisce la curva (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\gamma(t) = \Big(x_0' + t(\alpha w_1' + \beta w_2'), \varphi(x_0' + t(\alpha w_1' + \beta w_2'))\Big), \quad t \in I = (-\delta, \delta),$$

dove $\delta > 0$ è così piccolo che $x_0' + t(\alpha w_1' + \beta w_2') \in V'$ per $t \in I$. Di nuovo,

$$\gamma \colon I \longrightarrow M \cap (V' \times V''),\ \gamma(0) = x_0,\ \dot\gamma(0) = \alpha w_1 + \beta w_2,$$

per cui $\alpha w_1 + \beta w_2 \in T_{x_0}M$. Di più, siccome possiamo scegliere $n-k$ direzioni linearmente indipendenti $e_1, \ldots, e_{n-k}$ (base canonica in $\mathbb{R}^{n-k}$) come w', allora $\dim T_{x_0}M \geq n-k$. Ma allora

$$T_{x_0}M := \{w \in \mathbb{R}^n;\ J_F(x_0)w = 0\} = \operatorname{Ker} J_F(x_0).$$

Possiamo ora definire lo **spazio normale a** M **in** x_0 come lo spazio vettoriale

$$N_{x_0}M := T_{x_0}M^\perp = \operatorname{Span}\{{}^t\nabla f_1(x_0), \ldots, {}^t\nabla f_k(x_0)\} = \operatorname{Im} {}^tJ_F(x_0).$$

Si ha quindi

$$\dim T_{x_0}M = n-k, \quad \dim N_{x_0}M = k, \quad \forall x_0 \in M,$$
$$T_{x_0}M^\perp = N_{x_0}M, \quad \mathbb{R}^n = T_{x_0}M \oplus N_{x_0}M, \quad \forall x_0 \in M.$$

Esempio 1.3. *Abbiamo i seguenti esempi ($r > 0, h \in \mathbb{R}$):*

- *$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ è una varietà immersa di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 e classe C^∞;*
- *$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = r^2\}$ è una varietà immersa di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e classe C^∞;*

- *$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=r^2,\ z=h\}$ è una varietà immersa di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e classe C^∞;*
- *se $f\colon \Omega\subset\mathbb{R}^n \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^m$, $k\geq 1$, allora $M=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\ x\in\Omega\}\subset\Omega\times\mathbb{R}^m$ è una varietà immersa di $\mathbb{R}^{n+m}$ di dimensione n e classe C^k. Infatti in questo caso se $(x,y)\in\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_y$ sono le coordinate scelte, allora, scrivendo $f=(f_1,\dots,f_m)$, si ha che $M=\{(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^m;\ g_j(x,y)=y_j-f_j(x)=0,\ 1\leq j\leq m\}$.*

Definizione 1.4. *Sia $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ e sia $M\subset\Omega$ un vincolo. Si dice che $x_0\in M$ è un **punto di massimo, risp. minimo, relativo vincolato** (o **punto estremale vincolato**) se esiste $B_r(x_0)\subset\Omega$ tale che $f(x)\leq f(x_0)$, risp. $f(x)\geq f(x_0)$, per tutti gli $x\in B_r(x_0)\cap M$.*

Teorema 1.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Se $f\in C^1(\Omega)$ ed x_0 è un punto di massimo o minimo relativo vincolato a $M\subset\Omega$, con M vincolo di dimensione $n-k$, allora*

$$^t\nabla f(x_0)\in N_{x_0}M,$$

esistono cioè $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ (i moltiplicatori di Lagrange) tali che

$$\nabla f(x_0)=\sum_{j=1}^k \lambda_j\nabla f_j(x_0),$$

dove, si ricordi, $f_1=0,\dots,f_k=0$ sono le equazioni del vincolo M vicino ad x_0.

Dimostrazione. Sia $F=(f_1,\dots,f_{n-k})$. Per ogni fissato $w\in T_{x_0}M$ sia $\gamma\colon I\longrightarrow M\cap B_r(x_0)\subset M\cap(V'\times V'')$ (dove possiamo supporre $I=(-\delta,\delta)$), tale che $\gamma(0)=x_0$ e $\dot\gamma(0)=w$. Allora la funzione $g(t)=f(\gamma(t))$ ha un max/min locale per $t=0$. Siccome 0 è interno ad I abbiamo necessariamente che $g'(0)=0=\langle\nabla f(x_0),w\rangle$. Ma allora

$$\langle\nabla f(x_0),w\rangle=0,\quad \forall w\in T_{x_0}M,$$

i.e. $^t\nabla f(x_0)\in N_{x_0}M$, che conclude la dimostrazione. $\square$

Dunque, se $x_0\in M$ è un punto estremale vincolato per f con moltiplicatori $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, allora la funzione $g(x,\mu):=f(x)-\sum_{j=1}^k\mu_jf_j(x)$ definita per $(x,\mu)\in U\times\mathbb{R}^k$, ha un punto critico in (x_0,λ) (dove $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$), cioè $\nabla_{x,\mu}g(x_0,\lambda)=(0,0)$ e quindi, equivalentemente,

$$x_0\in U \ \text{ e } \ \nabla f(x_0)=\sum_{j=1}^k\lambda_j\nabla f_j(x_0),\quad f_1(x_0)=0,\dots,f_k(x_0)=0.$$

2. Curve e 1-forme differenziali

(i) Una curva $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è **regolare** se $\gamma\in C^1$ e $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in(a,b)$.

(ii) Una curva $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è **regolare a tratti** se $\gamma\in C^0$ ed esiste una scomposizione $a=a_0<a_1<\ldots<a_{N-1}<a_N=b$ di $[a,b]$ tale che $\gamma_j:=\gamma\big|_{[a_{j-1},a_j]}$, $1\leq j\leq N$, è regolare.

(iii) Ricordiamo che due curve $\varphi\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e $\psi\colon[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ sono **equivalenti**, in simboli $\varphi\sim\psi$, se c'è $p\colon[a,b]\longrightarrow[\alpha,\beta]$ *di classe C^1, suriettiva e con derivata $p'(t)\neq0$, $\forall t\in[a,b]$, tale che $\varphi(t)=\psi(p(t))$*, $\forall t\in[a,b]$. Allora:
- φ è regolare se e solo se ψ è regolare;
- se $p'(t)>0$ allora si dice che φ e ψ *hanno lo stesso verso*, in simboli $\varphi\overset{(+)}{\sim}\psi$;
- se $p'(t)<0$ allora si dice che φ e ψ *hanno verso opposto*, in simboli $\varphi\overset{(-)}{\sim}\psi$.

(iv) Date le curve $\gamma_1\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e $\gamma_2\colon[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ continue con $\gamma_1(b)=\gamma_2(\alpha)$, definiamo la *somma* $\gamma_1+\gamma_2\colon[a,b+\beta-\alpha]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ tramite

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t),\ a\leq t\leq b,\\[2ex] \gamma_2(t-b+\alpha),\ b\leq t\leq b+\beta-\alpha.\end{cases}$$

È subito chiaro che anche $\gamma_1 + \gamma_2$ è continua. Inoltre se γ_1, γ_2 sono regolari a tratti, anche $\gamma_1 + \gamma_2$ lo è.

Data $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiamo l'*opposto* di γ essere

$$(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t),\ a \leq t \leq b.$$

Si ha subito che se γ è regolare anche $-\gamma$ lo è, e che $-\gamma \overset{(-)}{\sim} \gamma$.

(v) Si ha che se $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare a tratti, allora (nella notazione del punto (ii))

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N.$$

(vi) Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$, si ha che $\displaystyle\int_\gamma f ds$ **non** dipende dal verso di percorrenza di γ. Infatti si ha che

$$\varphi \sim \psi \Longrightarrow \int_\varphi f ds = \int_\psi f ds.$$

Dunque $\displaystyle\int_{-\gamma} f ds = \int_\gamma f ds$. Si ha inoltre che

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

(vii) Sia data ora $\omega \in C^0(\Omega; (\mathbb{R}^n)^*)$ una 1-forma differenziale. Siano φ, ψ curve regolari con sostegno contenuto in Ω. Si ha

$$\varphi \sim \psi \Longrightarrow \int_\varphi \omega = \operatorname{sgn}(p') \int_\psi \omega.$$

In particolare se γ è regolare con sostegno in Ω

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega.$$

Inoltre se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, con γ_1, γ_2 regolari con sostegno in Ω, allora

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

(viii) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Dati $x_1, x_2 \in \Omega$ sia

$$\Gamma(x_1,x_2) = \{\text{curve regolari a tratti con sostegno contenuto in } \Omega, \text{ congiungenti } x_1 \text{ con } x_2\}.$$

Dato $x_0 \in \Omega$ sia

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \Omega;\ \exists \gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega \text{ regolare a tratti con } \gamma([a,b]) \subset \Omega \text{ e } \gamma(a) = x_0,\ \gamma(b) = x\}.$$

Teorema 2.1. *Se Ω è **aperto e connesso** allora $\Gamma(x_0) = \Omega$, $\forall x_0 \in \Omega$, e dunque $\Gamma(x_1,x_2) \neq \emptyset$, $\forall x_1, x_2 \in \Omega$.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che, dato $x_0 \in \Omega$ arbitrario, l'insieme $\Gamma(x_0)$ è aperto e chiuso in quanto questo implica allora che $\Gamma(x_0) = \Omega$ e dunque anche che per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ si ha $\Gamma(x_1,x_2) \neq \emptyset$. Essendo Ω aperto, esiste $r > 0$ sufficientemente piccolo tale che $B_r(x_0) \subset \Omega$. Ma allora per ogni $x \in B_r(x_0)$ con $x \neq x_0$ la curva regolare $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ data da $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ congiunge x_0 con x rimanendo in Ω e d'altra parte la curva chiusa regolare a tratti $\gamma + (-\gamma)$ congiunge x_0 con se stesso, il che prova che $B_r(x_0) \subset \Gamma(x_0)$ e dunque che $\Gamma(x_0)$ è non vuoto. Si noti che si può anche costruire γ semplice e chiusa regolare che parta da x_0 ed arrivi ad x_0: basta infatti costruire una piccola circonferenza che passi per x_0 interamente contenuta in $B_r(x_0)$. Per provare che è aperto, sia $x_1 \in \Gamma(x_0)$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_1) \subset \Omega$ e dunque esiste una curva regolare a tratti che congiunge x_0 con x_1 e poi un segmento di raggio della palla $B_r(x_1)$ che congiunge x_1 ad ogni $x \in B_r(x_1)$. Dunque $B_r(x_1) \subset \Gamma(x_0)$. Proviamo infine che $\Gamma(x_0)$ è chiuso. Prendiamo dunque una successione $(x_k)_{k\geq 1} \subset \Gamma(x_0)$ con

$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \hat{x} \in \Omega$. Esiste $r > 0$ sufficientemente piccolo tale che $B_r(\hat{x}) \subset \Omega$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ (dipendente da r) tale che $x_k \in B_r(\hat{x})$ per ogni $k > k_0$. Preso allora $k = k_0 + 1$ (per esempio), sia $\gamma_1 \in \Gamma(x_0)$ la curva (regolare a tratti) che congiunge x_0 con x_k e sia γ_2 il segmento di raggio di $B_r(\hat{x})$ che congiunge x_k con $\hat{x}$. La curva $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ è allora regolare a tratti e congiunge x_0 con $\hat{x}$. Dunque $\hat{x} \in \Gamma(x_0)$ e quindi $\Gamma(x_0) = \Omega$, il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.2. *L'argomento appena visto ci permette anche di concludere che in un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ ogni due punti punti distinti possono essere connessi da un arco di curva semplice regolare a tratti.*

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, sia $\omega \in C^0(\Omega;(\mathbb{R}^n)^*)$. Allora:*

$$\omega \text{ è esatta} \iff \forall x_1, x_2 \in \Omega,\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(x_1,x_2),\ \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega. \tag{5}$$

Corollario. *Stesse ipotesi del teorema precedente. Allora:*

$$\omega \text{ è esatta} \iff \int_{\gamma} \omega = 0,\ \forall \gamma \text{ curva chiusa semplice regolare a tratti con sostegno contenuto in } \Omega. \tag{6}$$

(ix) Sia $\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) dx_k$ una forma differenziale su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema. *Se $\omega \in C^1(\Omega;(\mathbb{R}^n)^*)$ è esatta allora deve risultare*

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(x),\ \ \forall x \in \Omega,\ \forall j,k \text{ con } 1 \le j,k \le n. \tag{7}$$

Definizione. *Una forma $\omega \in C^1(\Omega;(\mathbb{R}^n)^*)$ si dice **chiusa** se vale la condizione (7).*

Definizione. *Siano $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ due curve continue tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$. Si dice che γ_1 e γ_2 sono **omotope con estremi fissati** se esiste una mappa continua $\Phi \colon [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ tale che*

$$\Phi(a,s) = P, \quad \Phi(b,s) = Q, \quad \forall s \in [0,1],$$
$$\Phi(t,0) = \gamma_1(t), \quad \Phi(t,1) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

*Quando γ_1 e γ_2 con sostegno in Ω sono **chiuse** (non necessariamente con gli stessi estremi) diciamo che sono **omotope** se esiste $\Phi \colon [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ continua tale che*

$$\Phi(a,s) = \Phi(b,s), \quad \forall s \in [0,1],$$
$$\Phi(t,0) = \gamma_1(t), \quad \Phi(t,1) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Una curva chiusa γ con sostegno in Ω è omotopa ad un punto $P \in \Omega$ se $\gamma_1 = \gamma$ e $\gamma_2(t) \equiv P$ per ogni $t \in [a,b]$ sono omotope.

Teorema. *Se $\omega \in C^1(\Omega;(\mathbb{R}^n)^*)$ è chiusa, allora per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 omotope con estremi fissati si ha*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Definizione. *Un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se per ogni coppia di curve con sostegno contenuto in Ω e gli stessi estremi si ha che esse sono omotope.*

Teorema. *Un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso e e solo se ogni curva chiusa con sostegno in Ω è omotopa ad un punto.*

Corollario. *Sia Ω semplicemente connesso. Allora ogni forma chiusa su Ω è esatta.*

Definizione. *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato (rispetto ad un suo punto x_0) se per ogni $x \in \Omega$ il segmento $\{x_0 + t(x - x_0);\ t \in [0,1]\}$ di estremi x_0 e x è tutto contenuto in Ω.*

Un insieme convesso Ω (cioè per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento di estremi x_1 e x_2 è tutto contenuto in Ω) è stellato rispetto ad ogni suo punto.

Teorema. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto stellato allora ogni forma chiusa di classe C^1 su Ω è esatta.*

3. Il teorema di Gauss-Green e conseguenze

Sia $\gamma \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa, semplice e regolare a tratti, il cui sostegno sia la frontiera ∂E di un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ (che necessariamente risulta essere compatto e connesso). Dunque $\partial E = \{\gamma(t);\ t \in [a,b]\}$. Supponiamo che γ sia orientata positivamente, cioè si ha, percorrendo la curva per t crescenti, che l'insieme E giace sempre a sinistra. Scriveremo allora $\partial^+ E$ per indicare che la frontiera di E è orientata positivamente. Si ha il Teorema di Gauss-Green.

Teorema 3.1. *Sia E come sopra e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto tale che $\bar{E} \subset \Omega$. Sia $\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ una 1-forma differenziale di classe C^1 su Ω. Allora*

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \iint_E \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \Big) dxdy. \tag{8}$$

Un corollario importante del Teorema di Gauss-Green riguarda le 1-forme differenziali su aperti *semplicemente connessi* di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.2. *Si dice che un sottoinsieme connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è **semplicemente connesso** se ogni curva (regolare a tratti) semplice e chiusa con sostegno contenuto in Ω delimita una regione limitata del piano interamente contenuta in Ω con frontiera data dal sostegno della curva.*

Corollario 3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso e sia $\omega \in C^1(\Omega, (\mathbb{R}^2)^*)$. Allora ω è chiusa se e solo se ω è esatta.*

Dimostrazione. Sappiamo già che se ω è esatta allora ω è chiusa. Vediamo il viceversa. Sia $\omega = Mdx + Ndy$ chiusa. Dunque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Sia ora γ una qualsiasi curva semplice chiusa e regolare a tratti. Dunque esiste $E \subset \Omega$ tale che $\gamma = \partial E$. Allora, con una scelta di segni dipendente dal fatto che γ dà o no l'orientazione positiva a ∂E si ha

$$\pm \int_\gamma \omega = \int_{\partial^+ E} \omega = \iint_E \big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \big) dxdy = 0.$$

□

Voglio dare due applicazioni importanti del Teorema di Gauss-Green: il *Teorema della divergenza* ed il *Teorema di Stokes*.

3.1. **Il Teorema della divergenza.** Con γ come sopra, poniamo

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma'(t)\|}) = \tau = (\tau_1, \tau_2) = \textbf{versore velocità di } \gamma,$$

e consideriamo il versore

$$\nu = \nu_\gamma = (\tau_2, -\tau_1) = \textbf{normale unitaria esterna di } \partial E.$$

Consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (N(x,y), M(x,y))$. Si ha allora che

$$\langle F(\gamma(t)), \nu(t)\rangle = N(\gamma(t))\frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma'(t)\|} - M(\gamma(t))\frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

per cui dal Teorema di Gauss-Green segue immediatamente la formula (chiamata *Teorema della divergenza*)

$$\int_{\partial^+ E} \langle F, \nu\rangle ds = \int_\gamma (-Mdx + Ndy) = \iint_E \Big(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_E \operatorname{div} F\, dxdy, \tag{9}$$

dove

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}$$

è la **divergenza** del campo F. La formula (9) esprime la relazione tra il *flusso del campo F attraverso la frontiera di E* (il membro a sinistra della formula) e l'*integrale della divergenza del campo sopra E*.

3.2. **Il Teorema di Stokes.** Pensiamo ora ad E come ad un insieme planare di $\mathbb{R}^3$, cioè lo pensiamo come $E \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3_{x,y,z}$. Consideriamo il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) = (M(x,y), N(x,y), 0).$$

Il **rotore** del campo F (indicato con $\operatorname{rot} F$ o $\nabla \times F$, o $\operatorname{curl} F$) è il campo vettoriale

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ M & N & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix},$$

che quindi punta nella direzione dell'asse z. D'altra parte, la **normale unitaria "esterna" ν_E del dominio (superficiale)** E è il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{k}$ (si pensi alla regola della vite), per cui dal Teorema di Gauss-Green segue immediatamente la formula (chiamata *Teorema di Stokes*)

$$\int_{\partial^+ E} \langle F, \tau\rangle ds = \int_\gamma \langle F, d\vec{s}\rangle = \iint_E \langle \operatorname{rot} F, \nu_E\rangle dxdy. \tag{10}$$

La formula (10) esprime la relazione tra la *circuitazione del campo F lungo il bordo di E* (il membro a sinistra della formula) ed il *flusso del rotore del campo attraverso la superficie E*

Il Teorema di Stokes può essere generalizzato ad $\mathbb{R}^n$. Particolarmente importante è il caso di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Sia allora $\varphi\colon \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, dove $D \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$ è un aperto connesso limitato, e sia $\Sigma = \varphi(D)$. Scelto $E \subset D$ aperto, tale che $\overline{E} \subset D$ e con frontiera regolare ∂E definita dal sostegno di una curva regolare (a tratti) semplice e chiusa $\tilde{\gamma}\colon I \longrightarrow D$, sia $S := \varphi(E) \subset \Sigma$. Allora $\partial S = \varphi(\tilde{\gamma}) = \gamma$, dove ora $\gamma = \varphi \circ \tilde{\gamma}\colon I \longrightarrow \Sigma$ è una curva regolare (a tratti) semplice e chiusa di $\mathbb{R}^3$ con sostegno contenuto in Σ. *Se $\tilde{\gamma}$ è orientata positivamente diremo che il bordo $\partial S \subset \Sigma$ è orientato positivamente*, scrivendo $\partial^+ S$. Allora (10) diventa in questo caso

$$\int_{\partial^+ S} \langle F, \tau\rangle ds = \int_\gamma \langle F, d\vec{s}\rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu_\Sigma\rangle d\sigma, \tag{11}$$

essendo, come al solito, $d\sigma$ l'elemento d'area infinitesimo di Σ, e dove $\nu_\Sigma = \dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\|}$ è il versore normale a Σ. Notiamo che in questo caso l'orientazione ∂^+S è quella indotta da S su ∂S, cioè indotta da ν_Σ, per cui *un osservatore con i piedi su ∂S e la testa nella direzione positiva di ν_Σ percorre ∂S tenendo S alla sua sinistra*.

Definizione 3.4. *Un insieme connesso $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ è **semplicemente connesso** se ogni curva (regolare a tratti) semplice e chiusa con supporto in Ω è bordo di una superficie regolare con sostegno in Ω.*

Osservazione 3.5. *Si osservi che la precedente definizione di semplice connessione implica quella introdotta in precedenza. Infatti se la curva chiusa limita una superficie allora la si può deformare nella superficie ad un dato punto della stessa.*

Dal Teorema di Stokes, nella formulazione (11), segue subito il seguente teorema sulle 1-forme differenziali.

Teorema 3.6. *Se $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, allora ogni forma chiusa ω definita in Ω è esatta.*

Dimostrazione. Ciò segue immediatamente da (11) e dall'osservazione che se, usando coordinate $x=(x_1,x_2,x_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la forma differenziale $\omega(x)=\sum_{j=1}^3 a_j(x)dx_j$ è pensata come il campo vettoriale $F(x)=(a_1(x),a_2(x),a_3(x))$, allora la forma ω è chiusa se e solo se il campo vettoriale F è irrotazionale, cioè se e solo se $\operatorname{rot}F(x)=0$ per ogni $x\in\Omega$. Si ha infatti che ω è chiusa se

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2}=\frac{\partial a_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3}=\frac{\partial a_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial a_2}{\partial x_3}=\frac{\partial a_3}{\partial x_2},$$

il che equivale a

$$\operatorname{rot}F(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x_2}\\ -(\dfrac{\partial a_3}{\partial x_1}-\dfrac{\partial a_1}{\partial x_3})\\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}\end{bmatrix}=0.$$

□