UTILIA SULL'INTEGRALE MULTIPLO SECONDO RIEMANN

Avvertenza: tutto ciò detto nel seguito vale in $\mathbb{R}^n$ e non solo in $\mathbb{R}^2$.

1. Integrale di Riemann su rettangoli

- Un insieme $Q \subset \mathbb{R}^2$ si dice essere un **rettangolo** (chiuso) se $Q = [a,b] \times [c,d]$.
- Si dice che $\sigma \subset Q$ è una **scomposizione** di Q se $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ dove $\sigma_x = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ è una scomposizione di $[a,b]$ e $\sigma_y = \{y_0 = c < y_1 < \ldots < y_m = d\}$ è una scomposizione di $[c,d]$. Indichiamo con $\Omega(Q)$ l'insieme di tutte le scomposizioni di Q.
- Se $\sigma, \sigma' \in \Omega(Q)$ sono scomposizioni di Q, diciamo che σ è **più fine** di σ' se $\sigma' \subset \sigma$.
- Sia $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $\sigma \in \Omega(Q)$. La **somma superiore** $S(f,\sigma)$ e la **somma inferiore** $s(f,\sigma)$ di f rispetto a $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$, con $\sigma_x = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ e $\sigma_y = \{y_0 = c < y_1 < \ldots < y_m = d\}$, sono definite essere rispettivamente

$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{m-1} \Big(\sup_{[x_j,x_{j+1}] \times [y_k,y_{k+1}]} f \Big) (x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k),$$

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{m-1} \Big(\inf_{[x_j,x_{j+1}] \times [y_k,y_{k+1}]} f \Big) (x_{j+1} - x_j)(y_{k+1} - y_k).$$

Si ha, per ogni $\sigma, \sigma' \in \Omega(Q)$ con $\sigma' \subset \sigma$ e ponendo $m(Q) = (b-a)(d-c)$,

$$(\sup_Q f) m(Q) \geq S(f,\sigma') \geq S(f,\sigma) \geq s(f,\sigma) \geq s(f,\sigma') \geq (\inf_Q f) m(Q).$$

Definizione 1.1. *Diremo che $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata è **integrabile secondo Riemann** (R-integrabile) su Q, e scriveremo $f \in \mathscr{R}(Q)$, se vale*

$$\inf_{\sigma \in \Omega(Q)} S(f,\sigma) = \sup_{\sigma \in \Omega(Q)} s(f,\sigma).$$

Il valore comune viene indicato in generale con

$$\int_Q f(x)dx = \iint_Q f(x_1,x_2)dx_1 dx_2 = \iint_Q f(x,y)dxdy = \iint_Q f dxdy$$

(a seconda di come vengono indicate le variabili in $\mathbb{R}^2$).

- Si ha il seguente teorema di Riemann.

Teorema 1.2. *Sia $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Si ha $f \in \mathscr{R}(Q)$ se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma \in \Omega(Q) \ \text{ t.c. } \ S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Come conseguenza del Teorema 1.2 e del Teorema di Heine-Cantor (uniforme continuità delle funzioni continue su un compatto) si ha il seguente risultato.

Teorema 1.3. *Sia $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f \in \mathscr{R}(Q)$.*

- Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato allora possiamo trovare un rettangolo Q tale che $E \subset Q$. Possiamo dunque dare la seguente definizione.

Definizione 1.4. *$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata è Riemann-integrabile su E, e scriviamo $f \in \mathscr{R}(E)$, se $\tilde{f} \in \mathscr{R}(Q)$, dove $\tilde{f}$ è l'estensione di f a Q ponendo $\tilde{f}$ uguale a zero al di fuori di E:*

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \ se \ (x,y) \in E, \\ \\ 0, \ se \ (x,y) \in Q \setminus E. \end{cases}$$

Si pone

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_Q \tilde{f}(x,y)dxdy.$$

Osservazione 1.5. *Una tale definizione è ben posta in quanto* ***non*** *dipende dal rettangolo Q che contiene E.*

2. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan (PJ-misurabili)

- Per avere a disposizione una classe il più ampia possibile di funzioni R-integrabili occorre che essa contenga almeno le costanti. Siamo perciò portati a dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato si dice essere misurabile secondo Peano-Jordan (o "PJ-misurabile") se la sua funzione caratteristica χ_E,*

$$\chi_E(x,y) = \begin{cases} 1, \ se \ (x,y) \in E, \\ \\ 0, \ se \ (x,y) \notin E, \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann secondo la Definizione 1.4. In questo caso si pone

$$m(E) = \iint_Q \chi_E(x,y)dxdy$$

(essendo Q un qualsiasi rettangolo contenente E).

- Definiamo un *plurirettangolo* $P \subset \mathbb{R}^2$ essere una unione finita *essenzialmente disgiunta* di rettangoli $Q_1, \dots, Q_N$, cioè $P = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$ con gli interni dei Q_j disgiunti a due a due. Si pone $m(P) = \sum_{j=1}^{N} m(Q_j)$. Si ha allora il risultato seguente.

Teorema 2.2. *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato.*

(i) E è PJ-misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono plurirettangoli P_1, P_2 tali che

$$P_1 \subset E \subset P_2 \quad e \quad m(P_2) - m(P_1) < \varepsilon;$$

(ii) poiché allora $\partial E \subset P_2 \setminus P_1$, si ha che: E è PJ-misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo Z tale che

$$\partial E \subset Z \quad e \quad m(Z) < \varepsilon. \tag{1}$$

In particolare la prova di (1) ci dà il seguente corollario, il quale fornisce un metodo per verificare contemporaneamente che un insieme è PJ-misurabile con misura nulla.

Corollario 2.3. *L'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è PJ-misurabile con $m(A) = 0$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo Z tale che $A \subset Z$ e $m(Z) < \varepsilon$.*

Combinando il Teorema 2.2 ed il Corollario 2.3 si ottiene la seguente importante caratterizzazione degli insiemi PJ-misurabili.

Teorema 2.4. *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Si ha che E è PJ-misurabile se e solo se ∂E è PJ-misurabile e $m(\partial E) = 0$.*

Riguardo alle operazioni insiemistiche si ha il seguente corollario.

Corollario 2.5. *Se $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sono limitati e PJ-misurabili allora $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono tutti PJ-misurabili.*

Ovviamente l'insieme vuoto è misurabile.

Osservazione 2.6. *Ci sono insiemi che **non** sono PJ-misurabili.*

Proposizione 2.7. *Se $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è R-integrabile in una variabile allora il grafico di g*

$\Gamma_g = \{(x,y);\, x \in [a,b],\, y = g(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ *è PJ-misurabile in $\mathbb{R}^2$ e $m(\Gamma_g) = 0$.*

Corollario 2.8. *Se $g_1, g_2\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h_1, h_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni R-integrabili in una variabile allora gli insiemi*

$$E_a = \{(x,y);\, x \in [a,b],\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

e

$$E_b = \{(x,y);\, y \in [c,d],\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

*sono **misurabili**. E_a e E_b si chiamano y-**normali** (o y-**semplici**) e x-**normali** (o x-**semplici**) rispettivamente.*

3. Funzioni integrabili su insiemi PJ-misurabili

- Dalle sezioni precedenti si ottengono i fatti seguenti.

Teorema 3.1. *Se $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata e se $m(D) = 0$, dove $D \subset Q$ è l'insieme dei punti di discontinuità di f, allora $f \in \mathscr{R}(Q)$.*

Corollario 3.2. *(a) Se $K \subset \mathbb{R}^2$ è un compatto PJ-misurabile e $f \in C(K)$, allora $f \in \mathscr{R}(K)$.*
(b) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto PJ-misurabile e $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata e continua, allora $f \in \mathscr{R}(\Omega)$.

- Valgono inoltre le seguenti proprietà dell'integrale multiplo.

Teorema 3.3. *Siano $f, g \in \mathscr{R}(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora*

(i) $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(E)$ *e*
$$\iint_E (\alpha f + \beta g)\,dxdy = \alpha \iint_E f\,dxdy + \beta \iint_E g\,dxdy;$$
(ii) $f \le g$ *implica* $\iint_E f\,dxdy \le \iint_E g\,dxdy$*;*

(iii) $|f| \in \mathscr{R}(E)$ *e* $|\iint_E f\,dxdy| \le \iint_E |f|\,dxdy$*; in particolare, se E è PJ-misurabile e* $M = \sup_E |f|$ *allora* $|\iint_E f\,dxdy| \le M m(E)$*;*

(iv) vale il Teorema della media: se E è PJ-misurabile con $m(E) > 0$ allora
$$\inf_E f \le \frac{1}{m(E)} \iint_E f\,dxdy \le \sup_E f;$$
(v) se E è misurabile, compatto e connesso con $m(E) > 0$ e $f \in C(E)$ allora esiste $(x_0, y_0) \in E$ tale che
$$\frac{1}{m(E)} \iint_E f\,dxdy = f(x_0, y_0).$$
(vi) se E, E_1, E_2 sono PJ-misurabili, con $E_1 \cup E_2 = E$ e $m(E_1 \cap E_2) = 0$ e se $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ è limitata allora $f \in \mathscr{R}(E)$ se e solo se $f \in \mathscr{R}(E_1) \cap \mathscr{R}(E_2)$. In tal caso vale
$$\iint_{E_1 \cup E_2} f\,dxdy = \iint_{E_1} f\,dxdy + \iint_{E_2} f\,dxdy;$$

(vii) *se* $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *è limitata e* $f \in \mathscr{R}(Q)$ *ed* $E \subset Q$ *è misurabile con* $m(E) = 0$ *allora* $\displaystyle\iint_E f\,dxdy = 0.$

- Vale il Teorema di riduzione di Fubini:

Teorema 3.4. *Sia* $f \in \mathscr{R}(Q)$*, con* $Q = [a,b] \times [c,d]$*.*

(i) *Se per ogni* $x \in [a,b]$ *la funzione* $[c,d] \ni y \longmapsto f(x,y)$ *è in* $\mathscr{R}([c,d])$ *allora la funzione* $[a,b] \ni x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ *è in* $\mathscr{R}([a,b])$ *si ha*

$$\iint_Q f\,dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx.$$

(ii) *Se per ogni* $y \in [c,d]$ *la funzione* $[a,b] \ni x \longmapsto f(x,y)$ *è in* $\mathscr{R}([a,b])$ *allora la funzione* $[c,d] \ni y \longmapsto G(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ *è in* $\mathscr{R}([c,d])$ *si ha*

$$\iint_Q f\,dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

(iii) *In particolare se valgono contemporaneamente la (i) e (ii) sopra allora*

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

Osservazione 3.5. *Si osservi che quando* $f \in C(Q)$ *valgono sempre i punti (i) e (ii) sopra per cui in presenza di continuità dell'integrando è sempre vero che*

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

- Come conseguenza del Teorema di Fubini abbiamo che se E è y-normale allora

$$m(E) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx,$$

mentre se E è x-normale allora

$$m(E) = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))dy.$$

- Il Teorema del cambiamento di variabile.

Teorema 3.6. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un aperto e* $T\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$*,* $T\colon (u,v) \longmapsto (x,y)$*, una mappa biettiva, di classe* $C^1(\Omega)$ *e con* $\det J_T(u,v) \neq 0$ *per ogni* $(u,v) \in \Omega$*. Sia* E *tale che* $\bar{E} \subset T(\Omega)$ *e sia* $F = T^{-1}(E) = \{(u,v) \in \Omega;\ T(u,v) \in E\}$*. Allora:*

(i) *E è PJ-misurabile se e solo se F è PJ-misurabile;*

(ii) *se E è PJ-misurabile e* $f \in C(\bar{E})$ *allora*

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_F f(T(u,v))|\det J_T(u,v)|dudv.$$

Osservazione 3.7. *In molte applicazioni il teorema del cambiamento di variabili si applica in ipotesi più deboli sul cambio di variabili* T*. Il teorema infatti continua a valere se le ipotesi di biettività di* T *e sul determinante jacobiano valgono* ***al di fuori*** *di un insieme S di misura nulla.*

4. Integrale improprio (o generalizzato)

In questa sezione lavoreremo direttamente in $\mathbb{R}^n$.

- Possiamo dare la definizione di insieme PJ-misurabile nel caso di E non limitato come segue.

Definizione 4.1. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ **non** limitato. Diciamo che E è PJ-misurabile se*
$$E \cap B_r(0) \text{ è PJ-misurabile } \forall r > 0.$$
In tal caso si pone
$$m(E) = \sup_{r>0} m(E \cap B_r(0)) = \lim_{r\to+\infty} m(E \cap B_r(0)).$$

- Possiamo definire l'integrale improprio di funzioni limitate su insiemi non limitati come segue.

Definizione 4.2. *Dato E non limitato misurabile e data $f\colon E \longrightarrow [0,+\infty)$ limitata (si noti che $f(x) \geq 0$) tale che $f \in \mathscr{R}(E \cap B_r(0))$ per ogni $r > 0$, diciamo che f è integrabile in senso improprio su E se risulta **finito** il il limite (che esiste sempre in virtù della non-negatività di f)*
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{E\cap B_r(0)} f(x)dx = \sup_{r>0} \int_{E\cap B_r(x_0)} f(x)dx.$$

- Definiamo ora l'integrale improprio di funzioni non-negative illimitate in un punto.

Definizione 4.3. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato e misurabile, sia $x_0 \in D(E)$, e sia $f\colon E \setminus \{x_0\} \longrightarrow [0,+\infty)$ (si noti ancora che $f(x) \geq 0$) tale che $f \in \mathscr{R}(E \setminus B_r(x_0))$ per ogni $r > 0$. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su E se è **finito** il limite (che esiste sempre in virtù della non-negatività di f)*
$$\lim_{r\to 0} \int_{E\setminus B_r(x_0)} f(x)dx = \sup_{r>0} \int_{E\setminus B_r(x_0)} f(x)dx.$$

- Più in generale, rispetto all'ultimo punto, siano $E, S \subset \mathbb{R}^n$ limitati e misurabili, con $S \subset E$ e $m(S) = 0$.

Definizione 4.4. *Sia $f\colon E \setminus S \longrightarrow [0,+\infty)$. Sia $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ una successione di sottoinsiemi misurabili di $E \setminus S$ tali che*
(i) $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ *per ogni j,*
(ii) $\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j = E \setminus S$,
(iii) $f \in \mathscr{R}(\Omega_j)$ *per ogni $j \geq 1$.*
*Se risulta **finito** il limite*
$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega_j} f(x)dx$$
(in tal caso il limite non dipende dalla successione degli Ω_j) diciamo che f è integrabile in senso improprio su $E \setminus S$ e si pone
$$\int_{E\setminus S} f(x)dx = \lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega_j} f(x)dx.$$