PROVA SCRITTA DI
ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II
Corso di Laurea in ARCHITETTURA
(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2002/2003: 15 Gennaio 2003

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata $-1/2$. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**. Ammissione con punteggio ≥ 7. **Durata della prova: 3 ore. ORALE immediatamente successivo.**

(1). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 6y' + 9y = e^x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

Si determinino tutti gli α e β per i quali $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} = -\dfrac{7}{2}$.

☐ Tutti gli α e β tali che $\beta - 2\alpha = 2$
☐ Tutti gli $\alpha = 1, \beta = 2$
☐ $\alpha = 1, \beta = 3$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). L'equazione del piano tangente il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\ln(1 + y^2) + x^2 + y$, nel punto $(1, 0, f(1, 0))$ è

☐ $z = 2x + y - 1$
☐ $z = x + 2y + 1$
☐ $z = \ln 2 - 4 + 2x + 2y$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3y^2$. Allora:

☐ La funzione ha esattamente 3 punti critici, nessuno dei quali è di sella
☐ La funzione ha esattamente 3 punti critici, due dei quali sono punti di sella
☐ La funzione non ha punti critici
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (\frac{y^2}{1+x^2}, 2y \arctan x)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di $\vec{F}$, e si consideri la curva equipotenziale $f(x,y) = f(1,2)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale I, tale che $y(1) = 2$, si consideri $L = \sup_{x \in I} y(x)$. Allora:

☐ $L = \sqrt{3}$
☐ $L = +\infty$
☐ $L = \max_{x \in I} y(x)$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, 3t)$. Si calcoli $\int_\gamma z^2 ds$. [Si ricordi che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt$.]

☐ 11/4
☐ 54/5
☐ 33/5
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il volume V del solido di rotazione D_{rot} ottenuto ruotando l'insieme $D = \{(\rho, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R};\ \rho^2 \le z \le \sqrt{\rho}\}$ attorno all'asse z.

☐ $V = 3\pi/10$
☐ $V = 10\pi/3$
☐ $V = 8\pi/7$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione **continua** $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z$, sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 1 - (x^2 + y^2)\}$. Poiché A è chiuso, limitato e connesso, $f(A)$ è un intervallo, il cui estremo sinistro è il minimo assoluto di f ed il cui estremo destro è il massimo assoluto di f. Determinare $f(A)$. [Si usi la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.]

☐ $f(A) = [0, 3/2]$
☐ $f(A) = [-3/2, 3/2]$
☐ $f(A) = [0, 1]$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\alpha \ge 0$ e sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 4(x^2 + y^2)\}$. Si determinino tutti gli α per i quali

$$\iiint_A \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha} dxdydz < +\infty.$$

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha > 2$
☐ $\alpha \ge 3/2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI
ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II
Corso di Laurea in ARCHITETTURA
(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2002/2003: 15 Gennaio 2003

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata $-1/2$. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**. Ammissione con punteggio ≥ 7. **Durata della prova: 3 ore. ORALE immediatamente successivo.**

(1). L'equazione del piano tangente il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\ln(1+y^2)+x^2+y+2$, nel punto $(1,0,f(1,0))$ è

☐ $z = x + 2y - 1$
☐ $z = 2x + y + 1$
☐ $z = \ln 2 - 3 + 2x + 2y$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3y^2$. Allora:

☐ La funzione ha esattamente 3 punti critici, due dei quali sono punti di sella
☐ La funzione ha esattamente 3 punti critici, nessuno dei quali è di sella
☐ La funzione non ha punti critici
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (\dfrac{y^2}{1+x^2}, 2y\arctan x)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di $\vec{F}$, e si consideri la curva equipotenziale $f(x,y) = f(1,2)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sul suo dominio naturale I, tale che $y(1) = 2$, si consideri $L = \inf_{x\in I} y(x)$. Allora:

☐ $L = \sqrt{2}$
☐ $L = \min_{x\in I} y(x)$
☐ $L = -\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 6y' + 9y = e^x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

Si determinino tutti gli α e β per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} = -\frac{7}{2}$.

☐ Tutti gli α e β tali che $\beta - \alpha = 2$
☐ $\alpha = 1, \beta = 3$
☐ $\alpha = 1, \beta = 2$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, 3t)$. Si calcoli $\frac{1}{9}\int_\gamma z^3 ds$. [Si ricordi che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt$.]

☐ $33/5$
☐ $54/5$
☐ $11/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il volume V del solido di rotazione D_{rot} ottenuto ruotando l'insieme $D = \{(\rho, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R};\; \rho^2 \leq z \leq \sqrt{\rho}\}$ attorno all'asse z.

☐ $V = 8\pi/7$
☐ $V = 10\pi/3$
☐ $V = 3\pi/10$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione **continua** $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z$, sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}$. Poiché A è chiuso, limitato e connesso, $f(A)$ è un intervallo, il cui estremo sinistro è il minimo assoluto di f ed il cui estremo destro è il massimo assoluto di f. Determinare $f(A)$. [Si usi la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.]

☐ $f(A) = [-3/2, 3/2]$
☐ $f(A) = [0, 3/2]$
☐ $f(A) = [0, 1]$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Sia $\alpha \geq 0$ e sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2 + y^2 \leq z \leq 6(x^2 + y^2)\}$. Si determinino tutti gli α per i quali

$$\iiint_A \frac{1}{(2 + x^2 + y^2)^\alpha} dxdydz < +\infty.$$

☐ $\alpha > 0$
☐ $\alpha \geq 3/2$
☐ $\alpha > 2$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II

Corso di Laurea in ARCHITETTURA

(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2002/2003: 5 Febbraio 2003

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata $-1/2$. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**. Ammissione con punteggio ≥ 7. **Durata della prova: 3 ore. ORALE immediatamente successivo.**

(1). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$$

Si determinino tutti gli α e β per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ $\alpha = 0, \beta = 2$
☐ $\alpha = 0, \beta = 3$
☐ $\alpha = \beta = 3$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). L'equazione del piano tangente il grafico della funzione $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy^2 + y$, nel punto $(1, 1, f(1, 1))$ è

☐ $z = 3x + 4y - 4$
☐ $z = 4x + 3y - 3$
☐ $z = 4x + 3y - 4$
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y)y - xy^2$. Allora:

☐ La funzione ha esattamente 2 punti critici, nessuno dei quali è di sella
☐ La funzione ha esattamente 2 punti critici, uno dei quali è un punto di sella
☐ La funzione non ha punti critici
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (2x\ln(1+y^2), \dfrac{2yx^2}{1+y^2})$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di $\vec{F}$, e si consideri la curva equipotenziale $f(x,y) = f(1,-1)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sull'intervallo I del dominio che contiene 1, tale che $y(1) = -1$, si consideri $L = \sup_{x\in I} y(x)$.
Allora:
- ☐ $L = 0$
- ☐ $L = -\infty$
- ☐ $L = \max_{x\in I} y(x)$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^2, t)$. Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma z ds$. [Si ricordi che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt$.]
- ☐ 13/12
- ☐ 12/13
- ☐ 2/3
- ☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il volume V del solido di rotazione D_{rot} ottenuto ruotando l'insieme $D = \{(\rho, z) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R};\ \rho \le z \le \sqrt{\rho}\}$ attorno all'asse z.
- ☐ $V = 3\pi/7$
- ☐ $V = \pi/15$
- ☐ $V = 2\pi/15$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione **continua** $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + 2y + z$, sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 1\}$. Poiché A è chiuso, limitato e connesso, $f(A)$ è un intervallo, il cui estremo sinistro è il minimo assoluto di f ed il cui estremo destro è il massimo assoluto di f. Determinare $f(A)$. [Si usi la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.]
- ☐ $f(A) = [-5/4, 1+\sqrt{5}]$
- ☐ $f(A) = [-1-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
- ☐ $f(A) = [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$
- ☐ Nessuno dei precedenti

(8). Si calcoli il volume V dell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-3 \le z \le 1-(x^2+y^2)\}$.
- ☐ $V = 4\pi$
- ☐ $V = 8\pi$
- ☐ $V = \pi/3$
- ☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II

Corso di Laurea in ARCHITETTURA

(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2002/2003: 5 Febbraio 2003

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata $-1/2$. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**. Ammissione con punteggio ≥ 7. **Durata della prova: 3 ore. ORALE immediatamente successivo.**

(1). L'equazione del piano tangente il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + xy^2 + y + 1$, nel punto $(1,1,f(1,1))$ è

☐ $z = 4x + 3y - 3$
☐ $z = 3x + 4y - 3$
☐ $z = 4x + 3y - 4$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y)y - xy^2$. Allora:

☐ La funzione non ha punti critici
☐ La funzione ha esattamente 2 punti critici, nessuno dei quali è di sella
☐ La funzione ha esattamente 2 punti critici, uno dei quali è un punto di sella
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (2x\ln(1+y^2), \dfrac{2yx^2}{1+y^2})$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di $\vec{F}$, e si consideri la curva equipotenziale $f(x,y) = f(1,-1)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata la y come funzione $x \longmapsto y(x)$ definita sull'intervallo I del dominio che contiene 1, tale che $y(1) = -1$, si consideri $L = \inf_{x\in I} y(x)$. Allora:

☐ $L = \min_{x\in I} y(x)$
☐ $L = 0$
☐ $L = -\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni x \longmapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$$

Si determinino tutti gli α e β per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ $\alpha = 0, \beta = 3$
☐ $\alpha = 0, \beta = 2$
☐ $\alpha = \beta = 3$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^2, t)$. Si calcoli $\int_\gamma z ds$. [Si ricordi che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt$.]

☐ $3/2$
☐ $13/12$
☐ $12/13$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il volume V del solido di rotazione D_{rot} ottenuto ruotando l'insieme $D = \{(\rho, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R};\ \rho \leq z \leq \sqrt{\rho}\}$ attorno all'asse z.

☐ $V = \pi/7$
☐ $V = 2\pi/15$
☐ $V = 3\pi/15$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione **continua** $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x + y + z$, sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Poiché A è chiuso, limitato e connesso, $f(A)$ è un intervallo, il cui estremo sinistro è il minimo assoluto di f ed il cui estremo destro è il massimo assoluto di f. Determinare $f(A)$. [Si usi la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.]

☐ $f(A) = [1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$
☐ $f(A) = [-1 - \sqrt{5}, \sqrt{5}]$
☐ $f(A) = [-5/4, 1 + \sqrt{5}]$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Si calcoli il volume V dell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-3 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.

☐ $V = \pi$
☐ $V = 4\pi$
☐ $V = 8\pi/3$
☐ Nessuno dei precedenti

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II
Corso di Laurea in ARCHITETTURA
(Alberto PARMEGGIANI)

A.A. 2002/2003: 23 Giugno 2003

COGNOME e NOME (Stampatello):

FIRMA (per esteso):

MATRICOLA:

N.B. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni errata $-1/2$. **Barrare una sola casella**. **SCRIVERE NOME, COGNOME, NUMERO DI MATRICOLA**. Ammissione con punteggio ≥ 7. **Durata della prova: 3 ore. ORALE immediatamente successivo.**

(1). L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + xy^3 - x + 1$, nel punto $(1, 1, f(1,1))$ è

☐ $z = 4x + 3y - 1$
☐ $z = 3x + 4y - 2$
☐ $z = 4x + 3y - 5$
☐ Nessuno dei precedenti

(2). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x(3y^2 + 2x) + x^2 y$. Allora:

☐ la funzione non ha punti critici;
☐ la funzione ha esattamente 2 punti critici, uno di quali è un punto di sella;
☐ la funzione ha esattamente 2 punti critici, nessuno dei quali è di sella;
☐ Nessuno dei precedenti

(3). Sia dato su $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $F(x,y) = (2xe^{-(1+y^2)}, -2x^2ye^{-(1+y^2)})$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potenziale di F, e si consideri la curva equipotenziale $f(x,y) = f(1,0)$, pensata come equazione nella incognita y. Esplicitata y come funzione $x \mapsto y(x)$ definita sull'intervallo I del dominio che contiene il punto 1, tale che $y(1) = 0$, si consideri $L = \sup_{x \in I} |y(x)|$. Allora:

☐ $L = 1$
☐ $L = 2$
☐ $L = +\infty$
☐ Nessuno dei precedenti

(4). Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}\,, \quad y(0) = \frac{1}{5}\,, \quad y'(0) = \frac{7}{5}\,.$$

Si determinino tutti gli α e β per i quali $\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ $\alpha = 0\,, \beta = 2$
☐ $\alpha = 2\,, \beta = 0$
☐ $\alpha = \beta > 0$
☐ Nessuno dei precedenti

(5). Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^3, t^3, 3t)$. Si calcoli $\frac{1}{27} \int_\gamma z^3 ds$. [Si ricordi che $ds = \|\dot{\gamma}\| dt$.]

☐ $(3\sqrt{3} - 2)/4$
☐ $(2\sqrt{2} - 1)/2$
☐ $(3\sqrt{3} - 1)/4$
☐ Nessuno dei precedenti

(6). Si calcoli il volume V del solido di rotazione D_{rot} ottenuto ruotando l'insieme $D = \{(\rho, z) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}\,;\, \rho^2 \le z \le \rho\}$ attorno all'asse z.

☐ $V = \pi$
☐ $V = \pi/6$
☐ $V = \pi/9$
☐ Nessuno dei precedenti

(7). Sia data la funzione **continua** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + 2y - z$, sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 3(x^2+y^2) \le z \le 2\}$. Poiché A è chiuso limitato e connesso $f(A)$ è un intervallo, il cui estremo sinistro è il minimo assoluto di f ed il cui estremo destro è il massimo assoluto di f. Determinare $f(A)$. [Si usi la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.]

☐ $f(A) = [-5/12, \sqrt{10}/\sqrt{3} - 2]$
☐ $f(A) = [-5/12, \sqrt{10}/\sqrt{3} - 1]$
☐ $f(A) = [-\sqrt{10}/\sqrt{3} - 1, \sqrt{10}/\sqrt{3} - 1]$
☐ Nessuno dei precedenti

(8). Si calcoli il volume V dell'insieme $A = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 - 4 \le z \le 3 - 2(x^2+y^2)\}$.

☐ $V = \pi 43/6$
☐ $V = \pi 49/6$
☐ $V = \pi 50/7$
☐ Nessuno dei precedenti