

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA 2

Ingegneria Elettronica-Gestionale/BO-Informatica-Telecomunicazioni (P/Z)
Ingegneria Chimica
A.A. 1998/1999 (Alberto PARMEGGIANI)

Nota: è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

1 Successioni e Serie di Funzioni

Definizione di convergenza puntuale ed uniforme; teorema di continuità del limite(*); teorema di inversione dei limiti; criterio di Cauchy uniforme(*); teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata(*).

Serie di funzioni: definizione di convergenza puntuale, uniforme e totale; criterio di Cauchy per serie; criterio di Cauchy uniforme per serie; *convergenza totale* \Rightarrow *convergenza uniforme* \Rightarrow *convergenza puntuale*(*); teorema di continuità della somma(*); teorema di integrazione per serie(*); teorema di derivazione per serie(*).

Serie di potenze: definizione di raggio di convergenza; *se una serie di potenze ha raggio di convergenza $\rho > 0$, allora essa converge totalmente su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-\rho, \rho)$* (*); *la serie di potenze ha raggio di convergenza ρ se e solo se essa converge per $|x| < \rho$ e non converge per $|x| > \rho$* (*); criteri di Cauchy-Hadamard e D'Alembert(*); teorema sul raggio di convergenza della serie derivata(*); teorema di derivazione ed integrazione(*); serie di Taylor.

Serie di Fourier: polinomi trigonometrici; sviluppabilità in serie di Fourier; disuguaglianza di Bessel(*); lemma di Riemann-Lebesgue (sulla convergenza a zero dei coefficienti di Fourier)(*); teorema sulla convergenza puntuale(*); teorema sulla convergenza uniforme(*); teorema sull'integrazione termine a termine(*); teorema di Ascoli-Arzelà; teorema di approssimazione di Weierstrass; teorema di Abel sulle serie di potenze.

2 Spazi Metrici

Definizione di distanza; topologia di uno spazio metrico; funzioni continue tra spazi metrici; spazi metrici completi; teorema del punto fisso(*).

Spazi vettoriali: spazio vettoriale duale; norma; prodotti scalari; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz(*); norme equivalenti; topologia di \mathbf{R}^n ; compattezza; connessione; connessione per poligoni; teorema sugli aperti connessi di \mathbf{R}^n (*).

3 Calcolo Differenziale in \mathbf{R}^n

Funzioni continue; teorema di Weierstrass (*una funzione a valori reali, continua su un compatto ammette massimo e minimo*); equivalenza delle norme in \mathbf{R}^n (*); teorema dei valori intermedi(*); derivate parziali e direzionali; differenziabilità; teorema del differenziale ("dei differenziali totali")(*) (*); differenziabilità implica continuità(*); derivate successive; matrice

Jacobiana; matrice Hessiana; teorema di Schwarz(*); funzioni a valori vettoriali; teorema sul differenziale di funzioni composte(*); funzioni con gradiente nullo in un connesso(*); teorema di Lagrange(*); formula di Taylor (con resti secondo Peano, Lagrange ed integrale)(*); massimi e minimi relativi; condizioni necessarie e condizioni sufficienti(*); serie di Neumann dell'inversa di una matrice(*); teorema dell'invertibilità locale(*); teorema di Dini (delle funzioni implicite); massimi e minimi vincolati; spazio normale e spazio tangente ad un vincolo; teorema dei moltiplicatori di Lagrange(*). Formula per la derivata di $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$.

4 Equazioni Differenziali Ordinarie

Esistenza ed unicità locale del Problema di Cauchy(*); teorema di esistenza ed unicità globale; equazioni lineari di ordine n e sistemi lineari di equazioni ordinarie; teorema del Wronskiano(*); struttura di spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo(*); struttura delle soluzioni nel caso non-omogeneo; metodo della variazione delle costanti per sistemi non-omogenei(*).

Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti: definizione di $\exp A$ (A matrice); formula di rappresentazione della soluzione generale di un sistema omogeneo (usando la forma normale di Jordan); stabilità secondo Lyapunov; studio della stabilità dell'origine per sistemi lineari(*).

5 Curve ed Integrali Curvilinei

Curve semplici, chiuse, regolari; curve orientate; lunghezza di una curva e principali proprietà; teorema di rettificabilità delle curve C^1 ; ascissa curvilinea.

Integrale curvilineo: proprietà dell'integrale curvilineo; baricentro di una curva.

6 Forme Differenziali Lineari

Forme differenziali chiuse; integrale curvilineo di forme differenziali; potenziali e forme differenziali esatte; integrale curvilineo di forme esatte(*); caratterizzazione delle forme esatte(*); aperti stellati; *le forme differenziali chiuse su aperti stellati sono esatte*(*); aperti semplicemente connessi; *le forme differenziali chiuse in aperti semplicemente connessi sono esatte*.

7 L'Integrale di Lebesgue

Misura di Lebesgue di pluriintervalli; misura di aperti e compatti; sub-additività numerabile sugli aperti(*); insiemi misurabili limitati; insiemi misurabili non-limitati; sub-additività/additività numerabile sugli insiemi misurabili; insiemi di misura nulla; misura di successioni monotone di insiemi misurabili(*); regolarità della misura di Lebesgue.

Funzioni misurabili: varie proprietà delle funzioni misurabili; funzioni semplici; teorema di approssimazione crescente tramite funzioni semplici per funzioni misurabili non-negative(*).

L'integrale di Lebesgue: proprietà di linearità rispetto alle funzioni misurabili e rispetto a famiglie di insiemi misurabili; teorema di Beppo-Levi (della convergenza monotona); applicazioni alle serie di funzioni non-negative ed alle famiglie di insiemi(*); lemma di Fatou; funzioni sommabili; teorema della convergenza dominata di Lebesgue(*); teorema di Fubini; teorema di Tonelli; teorema del cambiamento di variabile; coordinate polari; teorema di Guldino sul volume di un solido di rotazione(*); teorema di Lebesgue-Vitali; sommabilità di $1/|x|^\alpha$ intorno a 0 ($\alpha < n$) e in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ($\alpha > n$)(*); calcolo di $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx (= \sqrt{\pi})$ (*);

calcolo di $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx (= \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}})$, A matrice simmetrica definita positiva(*); calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$ e di $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx$ (entrambi uguali a $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$)(*).

Distribuzione di Bernoulli (binaria) e sua rappresentazione nell'intervallo $(0, 1]$; funzioni di Rademacher; primo e secondo lemma di Borel-Cantelli(*) e applicazioni.

8 Superfici ed Integrali di Superficie

Superfici regolari; coordinate locali e cambiamento di parametri; area di una superficie; teorema di Guldino per le superfici di rotazione(*); superfici orientabili; superfici con bordo; integrale di superficie; k -forme in \mathbf{R}^3 e loro integrali; relazione tra vettori e 1- e 2-forme; Teorema di Stokes e applicazioni: teorema della divergenza e del rotore in \mathbf{R}^3 ed in \mathbf{R}^2 (*); teorema di Gauss-Green(*); formula di integrazione per parti(*).

Testo consigliato: M.Fusco-P.Marcellini-C.Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori Editore.

Eserciziario consigliato: P.Marcellini-C.Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, 2° Volume, parti I e II, Liguori Editore.