

# PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA 2

Ingegneria Elettronica-Gestionale/BO-Informatica-Telecomunicazioni (P/Z)  
Ingegneria Chimica  
A.A. 1998/1999 (Alberto PARMEGGIANI)

**Nota:** è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

## 1 Successioni e Serie di Funzioni

Definizione di convergenza puntuale ed uniforme; teorema di continuità del limite(\*); teorema di inversione dei limiti; criterio di Cauchy uniforme(\*); teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata(\*).

Serie di funzioni: definizione di convergenza puntuale, uniforme e totale; criterio di Cauchy per serie; criterio di Cauchy uniforme per serie; *convergenza totale*  $\Rightarrow$  *convergenza uniforme*  $\Rightarrow$  *convergenza puntuale*(\*); teorema di continuità della somma(\*); teorema di integrazione per serie(\*); teorema di derivazione per serie(\*).

Serie di potenze: definizione di raggio di convergenza; *se una serie di potenze ha raggio di convergenza  $\rho > 0$ , allora essa converge totalmente su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in  $(-\rho, \rho)$* (\*); *la serie di potenze ha raggio di convergenza  $\rho$  se e solo se essa converge per  $|x| < \rho$  e non converge per  $|x| > \rho$* (\*); criteri di Cauchy-Hadamard e D'Alembert(\*); teorema sul raggio di convergenza della serie derivata(\*); teorema di derivazione ed integrazione(\*); serie di Taylor.

Serie di Fourier: polinomi trigonometrici; sviluppabilità in serie di Fourier; disuguaglianza di Bessel(\*); lemma di Riemann-Lebesgue (sulla convergenza a zero dei coefficienti di Fourier)(\*); teorema sulla convergenza puntuale(\*); teorema sulla convergenza uniforme(\*); teorema sull'integrazione termine a termine(\*); teorema di Ascoli-Arzelà; teorema di approssimazione di Weierstrass; teorema di Abel sulle serie di potenze.

## 2 Spazi Metrici

Definizione di distanza; topologia di uno spazio metrico; funzioni continue tra spazi metrici; spazi metrici completi; teorema del punto fisso(\*).

Spazi vettoriali: spazio vettoriale duale; norma; prodotti scalari; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz(\*); norme equivalenti; topologia di  $\mathbf{R}^n$ ; compattezza; connessione; connessione per poligoni; teorema sugli aperti connessi di  $\mathbf{R}^n$ (\*).

## 3 Calcolo Differenziale in $\mathbf{R}^n$

Funzioni continue; teorema di Weierstrass (*una funzione a valori reali, continua su un compatto ammette massimo e minimo*); equivalenza delle norme in  $\mathbf{R}^n$ (\*); teorema dei valori intermedi(\*); derivate parziali e direzionali; differenziabilità; teorema del differenziale ("dei differenziali totali")(\*) (\*); differenziabilità implica continuità(\*); derivate successive; matrice

Jacobiana; matrice Hessiana; teorema di Schwarz(\*); funzioni a valori vettoriali; teorema sul differenziale di funzioni composte(\*); funzioni con gradiente nullo in un connesso(\*); teorema di Lagrange(\*); formula di Taylor (con resti secondo Peano, Lagrange ed integrale)(\*); massimi e minimi relativi; condizioni necessarie e condizioni sufficienti(\*); serie di Neumann dell'inversa di una matrice(\*); teorema dell'invertibilità locale(\*); teorema di Dini (delle funzioni implicite); massimi e minimi vincolati; spazio normale e spazio tangente ad un vincolo; teorema dei moltiplicatori di Lagrange(\*). Formula per la derivata di  $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$ .

## 4 Equazioni Differenziali Ordinarie

Esistenza ed unicità locale del Problema di Cauchy(\*); teorema di esistenza ed unicità globale; equazioni lineari di ordine  $n$  e sistemi lineari di equazioni ordinarie; teorema del Wronskiano(\*); struttura di spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo(\*); struttura delle soluzioni nel caso non-omogeneo; metodo della variazione delle costanti per sistemi non-omogenei(\*).

Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti: definizione di  $\exp A$  ( $A$  matrice); formula di rappresentazione della soluzione generale di un sistema omogeneo (usando la forma normale di Jordan); stabilità secondo Lyapunov; studio della stabilità dell'origine per sistemi lineari(\*).

## 5 Curve ed Integrali Curvilinei

Curve semplici, chiuse, regolari; curve orientate; lunghezza di una curva e principali proprietà; teorema di rettificabilità delle curve  $C^1$ ; ascissa curvilinea.

Integrale curvilineo: proprietà dell'integrale curvilineo; baricentro di una curva.

## 6 Forme Differenziali Lineari

Forme differenziali chiuse; integrale curvilineo di forme differenziali; potenziali e forme differenziali esatte; integrale curvilineo di forme esatte(\*); caratterizzazione delle forme esatte(\*); aperti stellati; *le forme differenziali chiuse su aperti stellati sono esatte*(\*); aperti semplicemente connessi; *le forme differenziali chiuse in aperti semplicemente connessi sono esatte*.

## 7 L'Integrale di Lebesgue

Misura di Lebesgue di pluriintervalli; misura di aperti e compatti; sub-additività numerabile sugli aperti(\*); insiemi misurabili limitati; insiemi misurabili non-limitati; sub-additività/additività numerabile sugli insiemi misurabili; insiemi di misura nulla; misura di successioni monotone di insiemi misurabili(\*); regolarità della misura di Lebesgue.

Funzioni misurabili: varie proprietà delle funzioni misurabili; funzioni semplici; teorema di approssimazione crescente tramite funzioni semplici per funzioni misurabili non-negative(\*).

L'integrale di Lebesgue: proprietà di linearità rispetto alle funzioni misurabili e rispetto a famiglie di insiemi misurabili; teorema di Beppo-Levi (della convergenza monotona); applicazioni alle serie di funzioni non-negative ed alle famiglie di insiemi(\*); lemma di Fatou; funzioni sommabili; teorema della convergenza dominata di Lebesgue(\*); teorema di Fubini; teorema di Tonelli; teorema del cambiamento di variabile; coordinate polari; teorema di Guldino sul volume di un solido di rotazione(\*); teorema di Lebesgue-Vitali; sommabilità di  $1/|x|^\alpha$  intorno a 0 ( $\alpha < n$ ) e in  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  ( $\alpha > n$ )(\*); calcolo di  $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx (= \sqrt{\pi})$ (\*);

calcolo di  $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx (= \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}})$ ,  $A$  matrice simmetrica definita positiva(\*); calcolo di  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$  e di  $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx$  (entrambi uguali a  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ )(\*).

Distribuzione di Bernoulli (binaria) e sua rappresentazione nell'intervallo  $(0, 1]$ ; funzioni di Rademacher; primo e secondo lemma di Borel-Cantelli(\*) e applicazioni.

## 8 Superfici ed Integrali di Superficie

Superfici regolari; coordinate locali e cambiamento di parametri; area di una superficie; teorema di Guldino per le superfici di rotazione(\*); superfici orientabili; superfici con bordo; integrale di superficie;  $k$ -forme in  $\mathbf{R}^3$  e loro integrali; relazione tra vettori e 1- e 2-forme; Teorema di Stokes e applicazioni: teorema della divergenza e del rotore in  $\mathbf{R}^3$  ed in  $\mathbf{R}^2$ (\*); teorema di Gauss-Green(\*); formula di integrazione per parti(\*).

**Testo consigliato:** M.Fusco-P.Marcellini-C.Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori Editore.

**Eserciziario consigliato:** P.Marcellini-C.Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, 2° Volume, parti I e II, Liguori Editore.