PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (I MODULO)

Ingegneria [Informatica-Telecomunicazioni] (L-Z)
A.A. 1999/2000 (Alberto PARMEGGIANI)

1 Premesse

Rudimenti di Logica Matematica: proposizioni, connettivi logici, predicati, quantificatori universali ed esistenziali, leggi di De Morgan.
Teoria (ingenua) degli insiemi: sottoinsiemi, operazioni tra insiemi, prodotto cartesiano.
Relazioni di equivalenza e d'ordine, max min sup ed inf di sottoinsiemi di un insieme ordinato.
Funzioni: iniettive, suriettive, biettive, funzioni composte, inverse, *una funzione è invertibile se e solo se è biettiva*, proprietà della controimmagine e della immagine funzionale di sottoinsiemi, funzioni circolari inverse.

2 Insiemi numerici

Numeri naturali, interi, razionali, reali; algoritmo di Euclide, principio di induzione, estremo superiore ed inferiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. La funzione $|x|$, $x \in \mathbb{R}$, e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare.

3 Numeri complessi

Forma algebrica, modulo di un numero complesso e sue proprietà, forma trigonometrica, radici, equazioni algebriche in campo complesso.

4 Limiti

Definizione di spazio metrico, intorni, aperti, chiusi, loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione. Punti di accumulazione, *un insieme è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione*. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme. Definizione di norma. Caso di $\mathbb{R}^n$: Teorema di Bolzano-Weierstrass, insiemi connessi e compatti. Definizione di $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, a punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. Località del limite, unicità del limite, locale limitatezza delle funzioni convergenti, *$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ con $x_n \to a$ quando $n \to +\infty$*; definizione di limite per funzioni a valori vettoriali, limite destro e sinistro di funzioni numeriche di una variabile reale, composizione di limiti, limiti e relazione d'ordine. Teorema del confronto, proprietà algebriche dei limiti, infiniti ed infinitesimi, proprietà algebriche degli infiniti e degli infinitesimi, forme indeterminate. Due teoremi utili per le successioni: *se $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \to \ell \in [0, +\infty]$, allora:*

$\ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$, $\ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$; *se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è come prima e* $a_{n+1}/a_n \to \ell \in [0, +\infty]$, *allora* $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.
Funzioni numeriche di una variabile reale: limite di funzioni monotone. Simboli di Landau ($f = O(g)$, $f = o(g)$, $f \approx g$, $f \sim g$ per $x \to a$) e loro proprietà. Infiniti ed infinitesimi campione. Ordine di un infinito e di un infinitesimo. Funzioni vettoriali di una variabile reale: traiettoria. Continuità di funzioni $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^k$: algebra delle funzioni continue, teorema di Weierstrass, teorema di Bolzano, *la composizione di funzioni continue dà luogo ad una funzione continua; se* $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua su* I *intervallo compatto di* $\mathbb{R}$, *allora* $f(I) = [\min_{x\in I} f(x), \max_{x\in I} f(x)]$; *se* f *è una funzione monotona da un intervallo* $I \subset \mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, *allora essa è continua se e solo se* $f(I)$ *è un intervallo*; *se* $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua e strettamente monotona sull'intervallo* I, *allora* f *è iniettiva e la funzione inversa* $f^{-1}: J = f(I) \longrightarrow I$ *è continua.*

5 Derivazione

Funzioni numeriche di una variabile reale: derivata, derivata destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi, derivata delle funzioni elementari; equazione della retta tangente in un punto del grafico; differenziale; algebra delle derivate, derivata della funzione composta e della funzione inversa; teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy (*se* $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ *sono continue, derivabili in* (a, b), *e* $g'(x) \neq 0$ *su* (a, b), *allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$*)*; regola di De l'Hospital per il calcolo dei limiti; formula di Taylor con resti secondo Peano e Lagrange; studio del grafico: massimi e minimi locali, condizioni necessarie affinché un punto interno sia di massimo o minimo, *una funzione continua su un intervallo ed ivi derivabile, con derivata nulla, è costante*; derivata e monotonia, flessi, concavità e convessità, asintoti.
Funzioni vettoriali di una variabile reale: vettore tangente.
Funzioni numeriche di più variabili reali: derivate direzionali, derivate parziali.

6 Integrale di Riemann (funzioni di una variabile)

Misura secondo Peano-Jordan di insiemi limitati del piano. Integrale esteso ad un intervallo compatto. Funzione integrale e primitive. Funzioni generalmente continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Calcolo dell'integrale mediante una primitiva dell'integrando. Integrazione per parti e per sostituzione. Significato geometrico dell'integrale. Integrale improprio (generalizzato): condizione di Cauchy di convergenza, teorema del confronto, convergenza tramite confronto con infiniti/infinitesimi campione. La formula: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (II MODULO)

Ingegneria [Informatica-Telecomunicazioni](L-Z)
A.A. 1999/2000 (Alberto PARMEGGIANI)

7 Equazioni differenziali lineari

Equazioni del primo ordine: integrale generale; struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea; formula risolutiva del problema di Cauchy; il caso a coefficienti costanti.
Equazioni del secondo ordine. Struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, teorema del Wronskiano, metodo di Lagrange per la determinazione di un integrale particolare dell'equazione completa. Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti: integrale generale nei vari casi (radici reali distinte, coincidenti, complesse coniugate); metodi per simpatia. I problemi al contorno.

8 Equazioni a variabili separabili

Formule risolutive.

9 Serie numeriche

Serie geometrica; serie telescopiche; serie complesse: convergenza assoluta, condizione necessaria, criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio di Dirichlet; serie a termini positivi: divergenza e convergenza, criteri del rapporto, della radice, di Raabe, criterio integrale; serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10 Serie di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme e loro relazione, continuità del limite uniforme, integrabilità del limite uniforme su intervalli compatti, condizioni sufficienti per la derivabilità del limite uniforme.
Serie di funzioni: convergenza puntuale, uniforme e totale e loro relazioni, continuità di una serie di funzioni uniformemente convergente, integrabilità termine a termine su intervalli compatti di serie di funzioni uniformemente convergenti, condizioni sufficienti per la derivabilità termine a termine di serie uniformemente convergenti; serie di Fourier di una funzione periodica e principali teoremi di convergenza (puntuale ed uniforme).

11 Funzioni di più variabili

Funzioni differenziabili, gradiente e matrice Jacobiana, derivate successive, matrice Hessiana. Teorema dei differenziali totali, teorema di Schwarz (sull'ordine di derivazione): la matrice Hessiana è simmetrica. Algebra delle funzioni differenziabili, differenziale della applicazione composta, teorema dell'invertibilità locale. *Il gradiente è la direzione di massima variazione della funzione. Una funzione definita su un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ avente ivi gradiente nullo è costante.* Piano tangente ad un grafico. Formula di Taylor del secondo ordine. Massimi e minimi locali; condizioni necessarie e condizioni sufficienti.
Varietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$, spazio tangente e spazio normale, parametrizzazioni, Teorema di Dini (delle funzioni implicite) ed applicazioni alle varietà differenziabili; curve tracciate su una varietà e loro costruzione tramite il teorema di Dini; estremanti vincolati, punti critici vincolati; teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Curve parametrizzate: curve chiuse, regolari, semplici, regolari a tratti; curve equivalenti, verso di una curva; curve rettificabili. Retta tangente ad una curva, versore tangente. Curve in coordinate polari, forma polare di una curva. Lunghezza di una curva e sua dipendenza **solo** dalla classe di equivalenza della curva. Lunghezza d'arco.

12 Integrale curvilineo

Integrale curvilineo di una funzione scalare e di un campo vettoriale (forma differenziale). Proprietà principali. Forme differenziali chiuse e esatte. *Il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva ma solo dagli estremi della curva stessa.* Potenziali. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma chiusa sia esatta. Il Teorema di Poincaré: *Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.* Calcolo di potenziali su rettangoli.

13 Integrali multipli

Rudimenti della teoria dell'integrale di Lebesgue: misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, insiemi misurabili e loro proprietà rispetto alle operazioni insiemistiche, funzioni misurabili e proprietà di spazio vettoriale ed algebra dell'insieme delle funzioni misurabili, definizione di integrale di Lebesgue, funzioni integrabili secondo Lebesgue, funzioni sommabili, proprietà dell'integrale di Lebesgue e sua relazione con l'integrale definito, e generalizzato, secondo Riemann, nel caso di una variabile reale. Teorema della convergenza monotona di Beppo Levi, teorema della convergenza dominata di Lebesgue, teoremi di riduzione (Fubini-Tonelli) e del cambiamento di variabile.
Coordinate polari, sferiche e cilindriche.

Studio della sommabilità "vicino a 0" ed "all'infinito" della funzione $1/\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\alpha}$.