PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (I MODULO)

Ingegneria Informatica (F-Z)
A.A. 2000/2001 (Alberto PARMEGGIANI)

Nota: è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

1 Premesse

Rudimenti di Logica Matematica: proposizioni, connettivi logici, predicati, quantificatori universali ed esistenziali.
Teoria (ingenua) degli insiemi: sottoinsiemi, operazioni tra insiemi, prodotto cartesiano.
Relazioni di equivalenza e d'ordine, max min sup ed inf di sottoinsiemi di un insieme ordinato.
Funzioni: iniettive, suriettive, biettive, funzioni composte, inverse, *una funzione è invertibile se e solo se è biettiva*, unicità delle funzione inversa(*), proprietà della controimmagine e della immagine funzionale di sottoinsiemi(*), funzioni monotone, funzioni circolari inverse.

2 Insiemi numerici

Il campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) : \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, estremo superiore ed inferiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, proprietà di $\mathbb{R}$ (compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto, $\mathbb{R}$ è archimedeo, densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, *ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette* sup *(risp.* inf*)*). Principio di induzione, disuguaglianza di Bernoulli(*), formula di Newton del binomio(*), formula di sommazione della progressione geometrica(*). La funzione $|x|$, $x \in \mathbb{R}$, e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare(*).

3 Numeri complessi

Forma algebrica, modulo di un numero complesso e sue proprietà(*), forma trigonometrica, radici, equazioni algebriche in campo complesso.

4 Limiti

Definizione di spazio metrico, intorni circolari, aperti, chiusi, loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione. Punti di accumulazione e di aderenza. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme. Teorema di Bolzano-Weierstrass (*Un sottoinsieme infinito di* $\mathbb{R}^n$ *ha almeno un punto di accumulazione*), insiemi connessi e compatti di $\mathbb{R}^n$. Definizione di $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Successioni regolari. Forme indeterminate. *Una successione convergente ad un limite reale è limitata*(*). Il teorema della permanenza del segno per successioni(*). Limiti di successioni e relazione d'ordine. Il

teorema del confronto (*Teorema dei due carabinieri*) per successioni. Algebra dei limiti delle successioni regolari (in particolare: il limite della somma(*) e del prodotto(*) nei casi in cui i limiti esistano in $\mathbb{R}$). Limite di una successione monotona(*): *Se* $\mathbb{N} \ni n \longmapsto x_n \in \mathbb{R}$ *è una successione crescente (risp. decrescente), allora* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è regolare e vale* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *(risp.* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$*)*. Due teoremi utili per le successioni: *se* $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n > 0$ *e* $a_{n+1}/a_n \to \ell \in [0,+\infty]$, *allora:* $\ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$, $\ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$; *se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è come prima e* $a_{n+1}/a_n \to \ell \in [0,+\infty]$, *allora* $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.
Definizione di $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, a punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. Località del limite, unicità del limite(*), locale limitatezza delle funzioni convergenti, $\exists \lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *se e solo se* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ *per ogni successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *con* $x_n \to a$ *quando* $n \to +\infty$; limite destro e sinistro di funzioni numeriche di una variabile reale, composizione di limiti, teorema della permanenza del segno(*), limiti e relazione d'ordine. Il teorema del confronto (*Teorema dei due carabinieri*) nel caso delle funzioni, proprietà algebriche dei limiti (in particolare il limite della somma(*)). Il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \cos x$(*). Limiti di funzioni monotone di una variabile reale.
Definizione di limite per funzioni a valori vettoriali.
Funzioni vettoriali di una variabile reale: curve parametrizzate, traiettoria.
Continuità di funzioni $f\colon A(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^k$: algebra delle funzioni continue, teorema di Weierstrass, teorema di Bolzano, *per ogni aperto* $V \subset \mathbb{R}^m$ *esiste un aperto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *tale che* $f^{-1}(V) = U \cap A$, *per ogni chiuso* $Z \subset \mathbb{R}^m$ *esiste un chiuso* $C \subset \mathbb{R}^n$ *tale che* $f^{-1}(Z) = C \cap A$, *la composizione di funzioni continue dà luogo ad una funzione continua; se* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua su* I *intervallo compatto di* $\mathbb{R}$, *allora* $f(I) = [\min_{x\in I} f(x), \max_{x\in I} f(x)]$; *se* f *è una funzione monotona da un intervallo* $I \subset \mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, *allora essa è continua se e solo se* $f(I)$ *è un intervallo*; *se* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua e strettamente monotona sull'intervallo* I, *allora* f *è iniettiva e la funzione inversa* $f^{-1}\colon J = f(I) \longrightarrow I$ *è continua*. Continuità di e^x, $\cos x$, $\sin x$(*).

5 Derivazione

Funzioni numeriche di una variabile reale: derivata, derivata delle funzioni elementari ($D(x^n) = nx^{n-1}$(*), $D(e^x) = e^x$(*), $D(\sin x) = \cos x$(*), $D(\cos x) = -\sin x$(*)); equazione della retta tangente in un punto del grafico; differenziale; algebra delle derivate, derivata della funzione composta e della funzione inversa; teoremi di Rolle(*), Lagrange(*), Cauchy: *se* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sono continue, derivabili in* (a,b), *e* $g'(x) \neq 0$ *su* (a,b), *allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$*;* regola di De l'Hospital per il calcolo dei limiti; formula di Taylor con resti secondo Peano e Lagrange. Simboli di Landau ($f = O(g)$, $f = o(g)$, $f \sim g$ per $x \to a$). Ordine di un infinito e di un infinitesimo.
Studio del grafico: massimi e minimi locali, condizioni necessarie affinché un punto interno sia di massimo o minimo(*), *una funzione continua su un intervallo ed ivi derivabile, con derivata nulla, è costante*; derivata e monotonia(*), flessi, polinomio di Taylor e condizioni sufficienti di massimo/minimo locale o di flesso(*), concavità e convessità, significato geometrico, condizioni necessarie e sufficienti (*Se* $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *è derivabile nell'intervallo*

I, allora f è convessa se e solo una delle seguenti equivalenti condizioni (i), (ii), (iii) è soddisfatta: (i) per ogni $x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, per ogni $x \in I$; (ii) f' è crescente; (iii) Nel caso in cui f sia derivabile 2 volte: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$), asintoti.

6 Integrale di Riemann (funzioni di una variabile)

Funzione integrale e primitive. Funzioni generalmente continue. Proprietà dell'integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale(*). Calcolo dell'integrale mediante una primitiva dell'integrando. Integrazione per parti(*) e per sostituzione. Metodo dei "fratti semplici". Integrale improprio (generalizzato): condizione di Cauchy di convergenza, integrabilità assoluta in senso generalizzato implica integrabilità in senso generalizzato, teorema del confronto, convergenza tramite confronto con infiniti/infinitesimi campione.

7 Equazioni differenziali lineari del I ordine

Equazioni del primo ordine: struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea; struttura delle soluzioni dell'equazione non-omogenea (completa); metodo di Lagrange della variazione della costante arbitraria; formula risolutiva del problema di Cauchy.

8 Equazioni a variabili separabili non lineari del I ordine

Formule risolutive.

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (II MODULO)

Ingegneria Informatica (F-Z)
A.A. 2000/2001 (Alberto PARMEGGIANI)

Nota: è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

9 Equazioni differenziali lineari del II ordine

Equazioni del secondo ordine. Struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, teorema del Wronskiano(*), metodo di Lagrange per la determinazione di un integrale particolare dell'equazione completa(*). Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti: integrale generale nei vari casi (radici reali distinte, coincidenti, complesse coniugate); metodi per simpatia. I problemi al contorno.

10 Serie numeriche

Serie geometrica(*); serie telescopiche; serie complesse: criterio di Cauchy di convergenza, convergenza assoluta, condizione necessaria di convergenza(*), criterio del confronto e del confronto asintotico; serie a termini positivi: divergenza e convergenza, criteri del rapporto, della radice, criterio integrale(*); serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.(*)

11 Serie di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme e loro relazione, continuità del limite uniforme di funzioni continue(*), integrabilità del limite uniforme su intervalli compatti, condizioni sufficienti per la derivabilità del limite uniforme.
Serie di funzioni: convergenza puntuale, uniforme e totale e loro relazioni, continuità di una serie di funzioni uniformemente convergente, integrabilità termine a termine su intervalli compatti di serie di funzioni uniformemente convergenti, condizioni sufficienti per la derivabilità termine a termine di serie uniformemente convergenti.
Serie di potenze: raggio di convergenza, caratterizzazione del raggio di convergenza: *per una serie di potenze di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$ il raggio di convergenza ρ è caratterizzato dal fatto che per $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \rho$ la serie converge e per $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \rho$ la serie non converge*(*), teorema di Hadamard sul calcolo del raggio di convergenza, convergenza totale su dischi di raggio strettamente minore del raggio di convergenza: *una serie di potenze di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio di convergenza ρ converge totalmente su tutti i dischi* $\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq r\}$, $0 < r < \rho$(*), serie di potenze derivata e serie di potenze

integrale: *data una serie di potenze di raggio di convergenza ρ, allora anche la serie derivata e la serie integrale hanno lo stesso raggio di convergenza.* Sviluppabilità in serie di Taylor. Serie di Fourier di una funzione periodica e principali teoremi di convergenza (puntuale ed uniforme).

12 Funzioni di più variabili

Definizione di norma, di norme equivalenti, *tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti*, di norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz(*).
Coordinate polari, sferiche e cilindriche.
Funzioni vettoriali di una variabile reale: vettore tangente.
Funzioni numeriche di più variabili reali: derivate direzionali, derivate parziali.
Funzioni differenziabili, gradiente e matrice Jacobiana, derivate successive, matrice Hessiana. Teorema dei differenziali totali, teorema di Schwarz (sull'ordine di derivazione): la matrice Hessiana è simmetrica. Algebra delle funzioni differenziabili, differenziale della applicazione composta, teorema dell'invertibilità locale. *Il gradiente è la direzione di massima variazione della funzione. Una funzione definita su un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ avente ivi gradiente nullo è costante.* Piano tangente ad un grafico. Formula di Taylor del secondo ordine(*). Massimi e minimi locali; condizioni necessarie e condizioni sufficienti(*).
Varietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$, Teorema di Dini (delle funzioni implicite) ed applicazioni alle varietà differenziabili (parametrizzazioni), curve tracciate su una varietà e loro costruzione tramite il teorema di Dini, spazio tangente e spazio normale; estremanti vincolati; teorema dei moltiplicatori di Lagrange(*).

13 Integrale curvilineo

Curve parametrizzate: curve chiuse, regolari, semplici, regolari a tratti; curve equivalenti, verso di una curva; curve rettificabili. Retta tangente ad una curva, versore tangente. Curve in coordinate polari, forma polare di una curva. Lunghezza di una curva e sua dipendenza **solo** dalla classe di equivalenza della curva. Lunghezza d'arco.
Integrale curvilineo di una funzione scalare e di un campo vettoriale (forma differenziale). Proprietà principali. Forme differenziali chiuse e esatte. *Il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva ma solo dagli estremi della curva stessa.* Potenziali. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma chiusa sia esatta. Il Teorema di Poincaré: *Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.* Calcolo di potenziali su rettangoli.

14 Integrali multipli

Rudimenti della teoria dell'integrale di Lebesgue: misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, insiemi misurabili e loro proprietà rispetto alle operazioni insiemistiche, funzioni misurabili e proprietà di spazio vettoriale ed algebra dell'insieme delle funzioni misurabili a valori in $\mathbb{R}$, definizione di integrale di Lebesgue, funzioni integrabili secondo Lebesgue, funzioni sommabili, proprietà dell'integrale di Lebesgue e sua relazione con l'integrale secondo Riemann, nel caso di una variabile reale (Teorema di Lebesgue-Vitali). Teoremi di riduzione di Tonelli

e di Fubini, teorema del cambiamento di variabile. Teorema della convergenza monotona di Beppo Levi, teorema della convergenza dominata di Lebesgue.
Determinante Jacobiano del cambiamento di variabili in coordinate polari, cilindriche, sferiche.
Studio della sommabilità “vicino a 0” ed “all’infinito” della funzione $1/\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\alpha}$.