PROGRAMMA DI
ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

Corso di Laurea in ARCHITETTURA
A.A. 2008/2009 (Alberto PARMEGGIANI)

Indice

1 Algebra lineare

1.1 Vettori nel piano $\mathbb{R}^2$, nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, e nello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$

Si consideri l'insieme dei **vettori** del piano

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ;\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un punto (x_1, x_2) del piano cartesiano è identificato con un elemento $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, si hanno (per definizione) le operazioni di "prodotto per uno scalare" e di "somma tra vettori"

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore nullo è $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ed è identificato con il punto $(0, 0)$).
Due vettori $v, w \neq 0$ si dicono *paralleli* se sono uno un multiplo dell'altro, cioè se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ tale che $v = \alpha w$. Si può inoltre definire un'operazione, detta *prodotto scalare*, che associa a due vettori x, y un numero come segue

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Talvolta si usa il simbolo $x \cdot y$ al posto di $\langle x, y \rangle$. Due vettori v e w si dicono *ortogonali* (in simboli $v \perp w$) se $\langle v, w \rangle = 0$.

La *norma* (o lunghezza) del vettore x è per definizione

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Tutte le precedenti operazioni si estendono naturalmente allo spazio dei vettori tridimensionali

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

ed anche allo spazio dei vettori n-dimensionali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ;\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

In questo caso dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} , \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

e

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n .$$

Inoltre,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2} .$$

- Si ha che $\mathbb{R}^n$, munito delle operazioni di "prodotto per uno scalare" e di "somma tra vettori", risulta essere uno *spazio vettoriale.*

Sia k un numero naturale, per *combinazione lineare* di k vettori $v_1, v_2, \cdots v_k$ di $\mathbb{R}^n$ si intende una qualsiasi espressione della forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$, dove $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ sono k numeri reali.

Dati k vettori del piano $v_1, v_2, \cdots v_k$, essi si dicono *linearmente indipendenti* se dal fatto che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ segue che $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, cioè quando vale

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Qualora non siano linearmente indipendenti i vettori si dicono *linearmente dipendenti.* Si ha che

- due vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno un multiplo dell'altro;
- **tre** vettori di $\mathbb{R}^2$ sono **sempre** linearmente dipendenti;
- **quattro** vettori di $\mathbb{R}^3$ sono **sempre** linearmente dipendenti,
- e, più in generale, $n+1$ vettori di $\mathbb{R}^n$ sono **sempre** linearmente dipendenti.
- L'importanza di avere una famiglia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$ risiede nel fatto che se un vettore è combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_k$, allora i coefficienti della combinazione lineare sono **unici**.

È importante osservare che i vettori possono essere pensati tanto come *vettori colonna* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ quanto come *vettori riga* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. In generale si utilizzano indifferentemente una o l'altra scrittura.

1.2 Matrici ed operazioni su matrici

Dati due numeri naturali m ed n (si pensi ad esempio ad $m, n \in \{1, 2, 3\}$) una matrice $m \times n$ è una tabella con m righe ed n colonne. Ad esempio,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

è una generica matrice 3×2.

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata.*

Date due matrici $m \times n$, A e B, la somma $A + B$ è (per definizione) la matrice $m \times n$ ottenuta sommando A con B "componente per componente". Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

allora

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ è per definizione la matrice avente per componenti quelle di A moltiplicate per lo scalare α. Ad esempio, se A è la matrice scritta sopra,

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{bmatrix}.$$

Date una matrice $m \times n$, A, ed una matrice $n \times k$, B, il prodotto AB è la matrice $m \times k$ che ha nel posto determinato dall'incrocio tra la i-esima riga e la j-esima colonna il prodotto scalare tra la i-esima riga della matrice A e la j-esima colonna della matrice B (si opera cioè un prodotto "righe-per-colonne"). In particolare se

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

allora

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} \end{bmatrix}.$$

Quindi tramite il prodotto di una matrice $m \times n$ per un matrice (vettore colonna) $n \times 1$, il prodotto di una matrice $m \times n$, A, per una matrice $n \times k$, $B = [b_1|b_2|\dots|b_k]$ dove $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ sono le colonne di B, si ottiene operando k volte il prodotto righe-per-colonne della matrice A per ciascuna colonna b_j $(j = 1, \dots, k)$ di B :

$$AB = [Ab_1|Ab_2|\dots|Ab_k]$$

che risulta perciò essere una matrice $m \times k$.

- Si ha la seguente proprietà di *linearità*: data la matrice $m \times n$, A, per ogni scalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vettori colonna (matrici $n \times 1$) $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

- La matrice *identità* I è la matrice con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

Osservazione. *Ricordiamo ancora che una matrice $n \times 1$, x, si identifica con un vettore $x \in \mathbb{R}^n$.*

1.3 Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si rappresenta con una matrice $m \times n$ (la matrice dei coefficienti), A, un vettore b di $\mathbb{R}^m$ (il vettore dei "termini noti"), ed un vettore x di $\mathbb{R}^n$ (il vettore delle incognite). Cioè il sistema $[A|b]$ si può rappresentare nella forma

$$Ax = b\,.$$

Per risolvere il sistema si può ricorrere a sostituzioni successive oppure alla *riduzione di Gauss-Jordan* che può essere descritta come segue.

- Si costruisce la matrice $[A|b]$;
- si opera sulla matrice $[A|b]$ agendo con *operazioni elementari* **sulle righe** della matrice fino a ridurre la matrice alla forma $[S|c]$, dove S è una forma *ridotta a scala* di A;
- si risolve il sistema partendo dall'ultima equazione in $[S|c]$ fino ad arrivare alla prima (con sostituzioni successive).

È importante osservare che procedendo con la riduzione di Gauss-Jordan ci si trova davanti ad una serie di **possibili alternative**:

- il sistema non ammette soluzione,
- il sistema ammette un'unica soluzione,
- il sistema ammette ∞^k soluzioni per un certo $k = n - r$, dove r è il numero di **pivot** della matrice a scala S. Il numero r si chiama *rango della matrice* A, e si indica con $\mathrm{rg}(A)$. Si noti che $r \leq \min\{m, n\}$.
- Il caso di non esistenza della soluzione si ha quando, dopo aver effettuato la riduzione di Gauss-Jordan, si trova un'equazione impossibile nel sistema $[S|c]$ (ad esempio, $0 = c_m$ con $c_m \neq 0$).

Si ha l'importante teorema di Rouché-Capelli.

Teorema. (Rouché-Capelli) *Data A, matrice $m \times n$, e dato il vettore $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è risolubile (cioè "ammette soluzione", o anche "è compatibile") per $x \in \mathbb{R}^n$ se e solo se*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}([A|b]).$$

In tal caso, posto $r = \mathrm{rg}(A)$, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni.

1.4 Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Consideriamo il sistema di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Quando $b = 0$ il sistema si dice *omogeneo.* Consideriamo l'insieme delle soluzioni

$$S_b = \{x \in \mathbb{R}^n;\, Ax = b\}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- se x ed y sono due soluzioni del sistema omogeneo (cioè $x, y \in S_0$) allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha x + \beta y$ è soluzione del sistema omogeneo (cioè $\alpha x + \beta y \in S_0$);
- se $\xi_0 \in S_b$ allora per ogni soluzione $x \in S_0$ si ha che $\xi_0 + x \in S_b$. In simboli, si ha che

  $$S_b = \{\xi_0 + x\,;\, x \in S_0\}$$

  (ξ_0 si dice essere una soluzione *particolare* del sistema non omogeneo). Si usa la notazione $S_b = \xi_0 + S_0$.

1.5 Sottospazi vettoriali e sottovarietà lineari affini

Un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$ è un *sottospazio vettoriale* se

$$\alpha v + \beta v' \in V \qquad \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, v' \in V.$$

Quindi, ad esempio, è un **sottospazio vettoriale** *l'insieme S_0 delle soluzioni di un sistema lineare* **omogeneo**.

Dati k vettori, $v_1, \cdots, v_k$, lo *spazio generato* da tali vettori è l'insieme

$$V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k\,;\, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}\,.$$

Tale insieme si denota con il simbolo $\operatorname{Span}\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ ed i vettori $v_1, \cdots, v_k$ sono detti i *generatori* del sottospazio V. Si ha che *V è un* **sottospazio vettoriale** *di $\mathbb{R}^n$.*

- Si dice che la famiglia **ordinata** di vettori $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ forma una *base* di un sottospazio vettoriale V se i $v_1, \ldots, v_k$ sono **linearmente indipendenti** e

  $$\operatorname{Span}\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} = V\,.$$

  La *dimensione* del sottospazio vettoriale V è il numero di elementi che formano una base.

- Dati i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^n$ allora:
  - l'insieme $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$;
- Se A è una matrice $m \times n$ allora
  - l'*immagine* di A è l'insieme

    $$\operatorname{Im} A = \{Ax\,;\, x \in \mathbb{R}^n\};$$

  - il *nucleo* di A è l'insieme

    $$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n;\; Ax = 0\}.$$

  - È importante osservare che

    $$\operatorname{Ker} A \neq \{0\} \iff \textit{i vettori colonna di } A \textit{ sono } \textbf{linearmente dipendenti};$$

  - $\operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Ker} A$ sono **sottospazi vettoriali** di $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$, **rispettivamente**;
  - per l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ vale $S_0 = \operatorname{Ker} A$.
- Osserviamo che data la matrice $m \times n$, $A = [\vec{a}_1|\vec{a}_2|\ldots|\vec{a}_n]$, dove i vettori $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ sono le colonne di A, e dati i vettori $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è equivalente a scrivere

  $$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = b,$$

e quindi *il sistema è risolubile se e solo se* $b \in \operatorname{Im} A$. Se ne deduce anche che

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\}.$$

È anche importante osservare che dal Teorema di Rouché-Capelli segue che l'appartenenza del vettore b allo spazio delle colonne di A (che dà la risolubilità del sistema) si legge nel sistema equivalente $[S|c]$, dove S è una riduzione a scala di A, ed esattamente nelle condizioni $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$, dove $r = \operatorname{rg}(A)$.

- Si ha che $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$.
- La matrice A si dice *singolare* se $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, il che è equivalente a $\operatorname{rg}(A) < n$.

Data la matrice A, $m \times n$, si definisce *trasposta di A* la matrice A^T *le cui righe sono le colonne di A*. Essa è quindi una matrice $n \times m$. Per esempio

$$\text{se} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice trasposta di A è anche denotata con il simbolo ${}^tA$.

- Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times k$, allora vale $(AB)^T = B^T A^T$, che quindi risulta essere una matrice $k \times m$.
- Vale la (importantissima) relazione: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$. Si ha quindi che

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\} = \dim \operatorname{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Un esempio molto importante di base di $\mathbb{R}^3$ è l'insieme formato dai vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti, e_1, e_2 ed e_3 sono linearmente indipendenti ed $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

In generale dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale si può estrarre da essi una base procedendo come segue:

- si costruisce una matrice avente per **colonne** tali vettori (per fissare le idee consideriamo il caso di quattro vettori in $\mathbb{R}^3$);
- si utilizzano le operazioni elementari **sulle righe** della matrice fino ad ottenere una forma scala S,
- le colonne della matrice di partenza **corrispondenti** alle colonne di S che contengono i pivot di S formano una base.
- **Equivalentemente**, si costruisce una matrice avente per **righe** i vettori dati e si utilizzano le operazioni elementari (sempre sulle righe) per ridurre la matrice ad una forma a scala. I vettori riga che contengono i pivot della matrice a scala, riletti come vettori colonna, formano una base.

Possiamo inoltre fare le seguenti considerazioni:

- i vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se, definendo $A = [v_1|\ldots|v_k]$ (matrice $n \times k$), il sistema $Ax = 0$ ha come **unica** soluzione la soluzione nulla 0 (e quindi se e solo se la matrice A è non-singolare, e cioè, ancora, se e solo se $\text{rg}(A) = k$);

- in generale, per ottenere l'equazione cartesiana di $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ basta usare il Teorema di Rouché-Capelli sul sistema $[A|x]$ e leggere le equazioni dalle condizioni di compatibilità del sistema, inoltre le colonne di A corrispondenti ai pivot di una forma a scala di A sono una **base** per $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$;

- avendo definito *sottovarietà lineare affine* l'insieme $\xi_0 + V = \{\xi_0 + v;\ v \in V\}$, dove V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, si ha quindi che

- per ottenere l'equazione cartesiana della sottovarietà lineare affine $\xi_0 + V$, dove $V = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, basta operare come nel caso vettoriale sul sistema $[A|x - \xi_0]$.

- Si pone $\dim(\xi_0 + V) = \dim V$.

- Supponiamo che $V = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Consideriamo ancora la matrice $n \times k$, $A = [v_1|v_2|\ldots|v_k]$. Si può allora pensare a $\xi_0 + V$ come l'insieme S_b delle soluzioni del sistema $Ax = b$, dove $b = A\xi_0$, cioè $\xi_0 + V = S_b$.

È chiaro che in un sottospazio vettoriale possono essere scelte diverse basi. Quindi i vettori appartenenti a tale sottospazio possono essere rappresentati usando diversi sistemi di coordinate. Un'operazione fondamentale è il cambiamento di sistema di coordinate, ossia passare dalle coordinate di un vettore espresse rispetto ad una base a quelle scritte rispetto ad una base diversa (si veda il paragrafo **1.11**).

1.6 Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà

Il determinante di un numero (matrice 1×1) è il numero stesso.
Data una matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

il determinate di A è per definizione il numero

$$\det A = ad - bc\,.$$

Data una matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

il determinante di A è definito nel modo seguente

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

dove

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Definendo
$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$
il **complemento algebrico dell'elemento** a_{ij}, si ha che la formula sopra si scrive anche
$$\det A = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13}.$$
In generale, nel caso $n \times n$, si ha che il determinante di una matrice A può essere calcolato nel modo seguente (sviluppo di Laplace). Dati $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sia A_{ij} la matrice ottenuta dalla matrice A sopprimendo la i–esima riga e la j–esima colonna, e sia $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, il complemento algebrico di a_{ij}. Fissiamo un numero $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Allora vale il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k–esima riga:
$$\det A = (-1)^{k+1}a_{k1}\det A_{k1} + (-1)^{k+2}a_{k2}\det A_{k2} + \ldots + (-1)^{k+n}a_{kn}\det A_{kn} =$$
$$= a_{k1}\mathcal{A}_{k1} + a_{k2}\mathcal{A}_{k2} + \ldots + a_{kn}\mathcal{A}_{kn}.$$
Vale una formula analoga rispetto alle colonne. Infatti, fissato $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k-esima colonna:
$$\det A = (-1)^{k+1}a_{1k}\det A_{1k} + (-1)^{k+2}a_{2k}\det A_{2k} + \ldots + (-1)^{k+n}a_{nk}\det A_{nk} =$$
$$= a_{1k}\mathcal{A}_{1k} + a_{2k}\mathcal{A}_{2k} + \ldots + a_{nk}\mathcal{A}_{nk}.$$
Il determinante soddisfa le seguenti proprietà:

- $\det I = 1$;
- $\det A = \det(A^T)$;
- data la matrice A sia B la matrice ottenuta scambiando nella matrice A due colonne (o due righe), allora $\det B = -\det A$; perciò, in particolare, se due colonne (o due righe) di A sono uguali, allora $\det A = 0$;
- siano $v_1, v_3, \ldots, v_n$ e w vettori colonna ed α e β due numeri reali allora
$$\det\,[\alpha v_1 + \beta w|v_2|\ldots|v_n] = \alpha\det\,[v_1|v_2|\ldots|v_n] + \beta\det[w|v_2|\ldots|v_n],$$
e vale anche sempre che
$$\det\,[v_1|\ldots|\alpha v_i + \beta v_j|\ldots|v_j|\ldots|v_n] = \alpha\det\,[v_1|\ldots|v_i|\ldots|v_j|\ldots|v_n].$$
La formula precedente si applica anche ad ogni altra coppia di colonne (e continua a valere ragionando sulle righe invece che sulle colonne);
- vale la formula di Binét: $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$.

1.7 Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa

Una matrice **quadrata** A si dice *invertibile* se esiste una matrice B tale che $AB = BA = I$. Si ha che *la matrice inversa se esiste è unica.* Si ha inoltre che *una matrice è invertibile se e solo se essa ammette una unica inversa destra*, e che *una matrice è invertibile se e solo se* $\mathrm{rg}(A) = n$. La matrice inversa (o brevemente *l'inversa*) della matrice A si denota con il simbolo A^{-1}. Vale il seguente teorema.

Teorema. *La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In particolare si ha che se A è invertibile, allora* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Per calcolare l'inversa di una matrice A si procede come segue:

- si costruisce la matrice $[A|I]$
- si procede con operazioni elementari sulle righe della matrice $[A|I]$ fino a che non ci si riduce ad una matrice della forma $[I|C]$ per una qualche matrice C (quello che conta è avere nel primo "blocco" la matrice identità!)
- si conclude che $A^{-1} = C$.

L'uso del determinante permette anche di dare le seguenti formule per l'inversa di A.

- Nel caso 2×2, data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $\det A \neq 0$, allora si ha la formula
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
- Nel caso $n \times n$, se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ è la matrice la cui entrata al posto ij è $\mathcal{A}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, si definisce la **matrice aggiunta** di A tramite la formula
$$\mathrm{Agg}(A) = \mathcal{A}^T,$$
e si ha che
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Agg}(A).$$
- In particolare, considerando il sistema $Ax = b$, A matrice $n \times n$ *invertibile*, allora la soluzione è univocamente data da $\xi = A^{-1}b$. Di più, si ha la *formula di Cramer* per la soluzione $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$,
$$\xi_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n,$$
dove B_i è la matrice che si ottiene *sostituendo alla colonna i-esima di A il vettore termine noto b*, $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.8 Prodotto scalare di vettori in $\mathbb{R}^n$ e proiezione di un vettore lungo un altro

Ricordiamo che, dati i vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si è definito *prodotto scalare* il numero reale

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j.$$

È importante notare che $\langle x, y\rangle = x^T y$ (prodotto del vettore riga x^T col vettore colonna y). Quindi è facile vedere che si ha la seguente formula: *per ogni matrice $n \times n$, A, si ha*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle.$$

Proprietà del prodotto scalare:

- simmetria: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$;
- bilinearità: $\begin{cases} \langle \alpha v + \beta v', w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle + \beta\langle v', w\rangle \\ \\ \langle v, \alpha w + \beta w'\rangle = \alpha\langle v, w\rangle + \beta\langle v, w'\rangle \end{cases}$, per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e tutti i $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$;
- $\langle v, v\rangle \geq 0$, per tutti i $v \in \mathbb{R}^n$, e $\langle v, v\rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

La **lunghezza** (o **norma**) di un vettore $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è stata definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Si osservi che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|, \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Dati poi due punti P_0, P_1 di $\mathbb{R}^n$, si definisce la loro *distanza* (euclidea) tramite

$$\mathsf{dist}(P_0, P_1) := \|P_0 - P_1\|.$$

Si noti che $\mathsf{dist}(P_0, P_1) = \mathsf{dist}(P_1, P_0)$.

Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: *per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

e l'uguaglianza sussiste se e solo se x è multiplo di y.

Proprietà della norma:

- $\|x\| \geq 0$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$;
- dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue la **disuguaglianza triangolare**

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, poiché dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta quindi essere

$$-1 \le \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \le 1, \ \forall x, y \ne 0,$$

si ha che **esiste un unico angolo** $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \cos\alpha.$$

Tale angolo si chiama *l'angolo (convesso) formato dai vettori x e y.*

- Si dice che due vettori v e w di $\mathbb{R}^n$ sono *ortogonali* se $\langle v, w\rangle = 0$.
- Dato $v \in \mathbb{R}^n$, si ha che $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $v = 0$.
- Dato un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, si definisce il *sottospazio ortogonale di V* l'insieme

  $$V^{\perp} := \{w \in \mathbb{R}^n; \ \langle v, w\rangle = 0, \, \forall v \in V\}.$$

  Si ha che $V^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, che $\dim V^{\perp} = n - \dim V$, e che ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive, in maniera **unica** come $v = v' + v''$ con $v' \in V$ e $v'' \in V^{\perp}$.
- Quando $A = A^T$, allora $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A$. Infatti, se $v \in \operatorname{Im} A$, allora $v = Av'$ per un certo $v' \in \mathbb{R}^n$, e quindi per ogni $w \in \operatorname{Ker} A$ si ha

  $$\langle v, w\rangle = \langle Av', w\rangle = \langle v', A^T w\rangle = \langle v', Aw\rangle = 0,$$

  poiché $A = A^T$ e $Aw = 0$. Ma allora $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni $w \in \operatorname{Ker} A$, da cui $v \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Quindi $\operatorname{Im} A \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ ed essendo

  $$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg}(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A = \dim(\operatorname{Ker} A)^{\perp},$$

  ne segue che $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.
- Dal punto precedente segue che quando $A = A^T$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive, in maniera **unica** come $v = v' + v''$ con $v' \in \operatorname{Ker} A$ e $v'' \in \operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A^{\perp}$.

1.9 Basi ortonormali, processo di ortonormalizzazione, matrici ortogonali

Una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice **ortonormale** se valgono le relazioni

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \ldots = \|u_n\| = 1, \quad \langle u_j, u_r\rangle = 0 \text{ se } j \ne r.$$

Le basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ sono di fondamentale importanza, in quanto esse permettono di scrivere facilmente le coordinate di un vettore qualsiasi v rispetto ad esse. Infatti: *se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ allora ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto* **in maniera univoca** *nella forma*

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \ldots + \langle v, u_n\rangle u_n.$$

Quindi **le coordinate di v rispetto alla base** $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono i numeri $\langle v, u_1\rangle, \dots, \langle v, u_n\rangle$.

- **Osservazione.** I vettori di una famiglia $\{u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ortonormale sono **linearmente indipendenti**.

- Dati i vettori non nulli $v, w \in \mathbb{R}^n$, si definisce *proiezione di v lungo w* il vettore

$$\mathsf{pr}_w(v) := \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w.$$

  Si noti il seguente fatto importantissimo (perché fondamentale per il processo di ortonormalizzazione): *il vettore $v - \mathsf{pr}_w(v)$ è ortogonale a w*, cioè

$$\langle v - \mathsf{pr}_w(v), w\rangle = 0.$$

Vale il seguente importante teorema.

Teorema. (Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Data la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ è sempre possibile costruire a partire da essa una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$.*

La dimostrazione del teorema è costruttiva. Facciamo vedere la costruzione nei casi $n = 2, 3$.

Caso $n = 2$. Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di $\mathbb{R}^2$. Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi $\|u_1\| = 1$. Sia poi $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$. Allora $\langle \tilde{u}_2, u_1\rangle = 0$. Per finire basta prendere

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}.$$

Caso $n = 3$. Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi $\|u_1\| = 1$. Sia poi $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_2\rangle u_2$. Allora $\langle \tilde{u}_2, u_1\rangle = 0$, e quindi prendiamo

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}.$$

Ora prendiamo $\tilde{u}_3 := v_3 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 - \langle v_3, u_1\rangle u_1$, e, per finire, essendo $\langle \tilde{u}_3, u_1\rangle = \langle \tilde{u}_3, u_2\rangle = 0$,

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 - \langle v_3, u_1\rangle u_1}{\|v_3 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 - \langle v_3, u_1\rangle u_1\|}.$$

Il caso generale n-dimensionale procede per induzione esattamente secondo le linee sopra esposte.

Osservazione. Una formulazione apparentemente più generale del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt è la seguente:

Teorema. *A partire da una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ del sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$ si può sempre costruire un'altra base di V che sia ortonormale.*

Data una base ortonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, costruiamo la matrice R la cui j-esima colonna è il vettore u_j, $j = 1, \ldots, n$:

$$R = [u_1|u_2|\ldots|u_n].$$

Allora la matrice trasposta di R si scrive

$$R^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \ldots \\ u_n^T \end{bmatrix},$$

le cui righe sono i vettori **riga** u_j^T. Dalla regola di moltiplicazione righe-per-colonne tra matrici si ha perciò

$$R^T R = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \ldots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \ldots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \ldots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Poiché R^T è invertibile, essa possiede un'unica inversa destra che quindi è R, da cui segue $R^T = R^{-1}$. Tali matrici, cioè quelle matrici *le cui colonne (equivalentemente le cui righe) formano una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali**, e sono di fondamentale importanza perché conservano il prodotto scalare tra vettori, e quindi le loro lunghezze, e quindi gli angoli tra i vettori. Infatti se R è una matrice ortogonale $n \times n$ allora

$$\langle Rv, Rw\rangle = \langle v, R^T Rw\rangle = \langle v, w\rangle, \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, prendendo $v = w$ si ottiene $\|Rv\| = \|v\|$, cioè Rv ha la stessa lunghezza di v. Allora, indicato con α l'angolo tra Rv e Rw e β l'angolo tra v e w, si ha che

$$\cos\alpha = \frac{\langle Rv, Rw\rangle}{\|Rv\|\|Rw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} = \cos\beta,$$

da cui segue che $\alpha = \beta$, essendo per ipotesi $\alpha, \beta \in [0, \pi]$.

- Dato $u \in \mathbb{R}^n$, la funzione $f_u\colon \mathbb{R}^n \ni v \longmapsto \langle v, u\rangle \in \mathbb{R}$ determina univocamente u e, reciprocamente, è determinata univocamente da u. Ciò si vede facilmente prendendo una base ortonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e notando che

$$u = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 + \ldots + \langle u, u_n\rangle u_n = f_u(u_1)u_1 + f_u(u_2)u_2 + \ldots + f_u(u_n)u_n.$$

1.10 Prodotto vettoriale di vettori in $\mathbb{R}^3$ e sua interpretazione geometrica

Dati due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ e $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ dello spazio $\mathbb{R}^3$, il loro *prodotto vettoriale* è il vettore $v \times w$ determinato dalla funzione, detta *prodotto misto*,

$$f_{v\times w}(u) = \langle u, v \times w\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}, \text{ ove } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

In altre parole, il vettore $v \times w$ è determinato dal conoscere tutti i possibili prodotti scalari $\langle u, v \times w\rangle$, u vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^3$, i quali, a loro volta, *per definizione* valgono $\det[u|v|w]$. Geometricamente, il prodotto misto $\langle u, v \times w\rangle$ rappresenta il volume (orientato, cioè con segno!) del parallelepipedo avente per spigoli u, v e w.

- È quindi chiaro che $\langle u, v \times w\rangle = 0$ *se e solo se* u, v *e* w *sono linearmente dipendenti.*

- In particolare, $v \times w$ *è ortogonale sia a* v *che a* w.

Poiché la funzione $f_{v\times w}$ determina univocamente il vettore $v \times w$, ne segue che $v \times w$ si può anche scrivere come il seguente determinante "formale" (in quanto $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$, vettori ortonormali della base canonica di $\mathbb{R}^3$, non sono numeri ma vettori!)

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix},$$

in altre parole

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, il prodotto vettoriale dei vettori v e w rappresenta l'area "orientata" (cioè con segno!) del parallelogramma avente per lati v e w.

- È quindi chiaro che $v \times w = 0$ *se e solo se* v *e* w *sono uno multiplo dell'altro.*

Valgono le seguenti proprietà: per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

- $v \times v = 0$;
- $v \times w = -(w \times v)$;
- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w) = (\lambda v) \times w$;
- $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$;
- $\|v \times w\| = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2} = \|v\|\,\|w\| \sin\alpha$, dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo tra v e w.

1.11 Forme quadratiche e diagonalizzazione

Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Il *polinomio caratteristico* di A è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico **ha grado** n, e le sue radici si chiamano *autovalori* (della matrice A). Se λ_0 è un autovalore l'insieme Ker $(A - \lambda_0 I)$ è *l'autospazio* associato all'autovalore λ_0. Gli elementi di Ker $(A - \lambda_0 I)$ sono gli *autovettori* di A (associati all'autovalore λ_0).

- Si dice che la *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ_0 è m se

$$(\lambda - \lambda_0)^m \text{ divide } p(\lambda), \quad \text{ma } (\lambda - \lambda_0)^{m+1} \text{ non divide } p(\lambda).$$

- Si dice che la *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ_0 è r se

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) = r.$$

- Si ha sempre che

$$\text{molteplicità geometrica}(\lambda_0) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda_0).$$

Si definisce *traccia* della matrice A, quadrata $n \times n$, la somma degli elementi sulla diagonale principale di A, cioè il numero

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Data la matrice A quadrata $n \times n$, valgono le seguenti relazioni tra gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A, $\mathrm{Tr}(A)$ e $\det(A)$:

- $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$;
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$;
- quando A è 2×2 si ha

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Una matrice quadrata A si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se $A = A^T$. Vale il seguente risultato.

Teorema. *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora, gli autovalori di A, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, ripetuti secondo la rispettiva molteplicità algebrica, sono reali ed autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali. Di più, si può trovare una* **base** *di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A. Tale base, eventualmente tramite un processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, può essere scelta* **ortonormale***.*

È importante notare il fatto seguente.
Sia A una matrice quadrata $n \times n$ **qualsiasi** (cioè non necessariamente simmetrica) la quale *abbia tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{R}$ ed i cui relativi autovettori formino una* **base** *di* $\mathbb{R}^n$. Sia allora Λ la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A, e siano $v_1, \dots, v_n$ i corrispondenti autovettori (relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, rispettivamente). Definiamo $S = [v_1|v_2|\dots|v_n]$. Allora S è invertibile perché $v_1, \dots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$. Dall'equazione agli autovalori $Av_j = \lambda_j v_j$, $j = 1, \dots, n$, segue che (righe-per-colonne)

$$AS = [Av_1|Av_2|\dots|Av_n] = [\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\dots|\lambda_n v_n] = S\Lambda,$$

e quindi si ha la relazione

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Una tale matrice si dice allora **diagonalizzabile**. Quindi, il teorema precedente assicura che *tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili.*
Osserviamo anche che quando *A è simmetrica e gli autovettori $v_1, \dots, v_n$ si scelgono in modo da formare una base* **ortonormale** *di $\mathbb{R}^n$*, allora la matrice S associata agli autovettori di A è **ortogonale**, per cui vale $S^{-1} = S^T$ e quindi anche la relazione

$$A = S\Lambda S^T.$$

Data A, matrice simmetrica $n \times n$, una *forma quadratica* Q è una funzione che associa ad ogni vettore x con n componenti il numero $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$. Sappiamo quindi che esiste una matrice ortogonale S tale che $A = S\Lambda S^T$, con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e con $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ gli autovalori (eventualmente ripetuti) della matrice A. Allora, se si pone $y = S^T x$, nelle "nuove" coordinate y si ha

$$Q(x) = Q(Sy) = \langle \Lambda y, y\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

2 Geometria del piano e dello spazio

2.1 Piani nello spazio tridimensionale

Sia P_0 un punto di $\mathbb{R}^3$ ed n un vettore di $\mathbb{R}^3$ diverso da zero. Allora il piano passante per il punto P_0 e perpendicolare al vettore n è l'insieme

$$\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle P - P_0, n\rangle = 0\}\,.$$

- Il vettore n si chiama *(una) direzione normale al piano* π.

Osserviamo che posto $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ la formula precedente si scrive come

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0) = 0\,.$$

In generale quindi un piano scritto secondo la *rappresentazione cartesiana* è dato da

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove a, b, c, d sono numeri assegnati. È allora chiaro che data la precedente rappresentazione cartesiana il vettore $(a, b, c)^T$ è un vettore normale al piano. Siano dati tre punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tali che i vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ siano linearmente indipendenti (tali punti si dicono *non allineati*), cioè

$$(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \neq 0\,.$$

Allora **il** piano π passante per P_0, P_1 e P_2 è dato dall'equazione

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{bmatrix} = 0\,,$$

cioè, posto $P = (x, y, z)$, la formula precedente può essere riscritta come segue

$$\langle (P - P_0), (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)\rangle = 0\,.$$

Il piano π contenente i punti P_0, P_1 e P_2, con $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ *linearmente indipendenti*, ha anche la seguente *rappresentazione parametrica*

$$\pi = \{P_0 + \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0)\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

- I vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ si chiamano *direzioni del piano* π.

Dalla rappresentazione parametrica è immediato passare a quella cartesiana infatti basta scegliere, ad esempio,

$$P_0 = P_0 \qquad \text{e} \qquad n = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$$

Due piani π_1 e π_2 si dicono

- *perpendicolari* se sono ortogonali le loro direzioni normali;
- *paralleli* se le loro direzioni normali sono una multiplo dell'altra.

Osservazione. Notiamo quindi che l'equazione cartesiana di una retta di $\mathbb{R}^3$ rappresenta l'intersezione di due piani distinti e non paralleli.

2.2 Rette nello spazio tridimensionale

Sia $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ un vettore (non nullo!) di $\mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto (fissato). La retta r passante per P_0 con *direzione* v è l'insieme

$$r = \{P_0 + tv\,;\ t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \\ z_0 + tv_3 \end{bmatrix}\,;\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La precedente è detta rappresentazione della retta r in *forma parametrica.* Si può passare dalla rappresentazione parametrica alla *rappresentazione cartesiana* ponendo

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

"eliminando" il parametro t dalle precedenti espressioni ci si riduce ad espressioni della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

dove a, b, c, a_1, b_1, c_1 sono numeri opportuni che dipendono da P_0 e v. Ci si può porre il problema inverso ossia come passare dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica.

In questo caso sono assegnate le espressioni (in modo che non siano una un multiplo dell'altra!)

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\,. \end{cases}$$

Basta scegliere un punto P_0 tra le soluzioni del precedente sistema (essendo formato da due equazioni in due incognite ammette sicuramente, almeno, ∞^1 soluzioni) e prendere come direzione v il prodotto vettoriale $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$.

Siano r ed s due rette con direzione v_r e v_s rispettivamente. Si dice che

- r è *parallela* ad s se v_r è un multiplo di v_s;
- r è *perpendicolare* ad s se r ed s si **intersecano** e v_r è perpendicolare a v_s, cioè $r \cap s \neq \emptyset$ e $\langle v_r, v_s \rangle = 0$;
- r ed s sono *sghembe* se v_r **non** è un multiplo di v_s ma $r \cap s = \emptyset$.

2.3 Distanza punto–retta e punto–piano

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di $\mathbb{R}^3$ e sia r una retta assegnata, ad esempio, in forma cartesiana:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0\,. \end{cases}$$

Sia v il vettore

$$v = \frac{(a,b,c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T}{\|(a,b,c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T\|}\,.$$

Allora la distanza del punto P_0 dalla retta r è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \|(P_1 - P_0) \times v\|\,,$$

dove P_1 è un punto della retta r fissato in modo arbitrario (la distanza del punto P_0 dalla retta r è indipendente dalla scelta del punto P_1).

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di $\mathbb{R}^3$ e sia π una piano assegnato, ad esempio, in forma cartesiana:

$$ax + by + cz + d = 0\,.$$

Allora la distanza del punto P_0 dal piano π è data dalla formula

$$d(P_0; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osserviamo che se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ ed $r \subset \mathbb{R}^2$ è la retta di equazione cartesiana

$$ax + by + c = 0\,,$$

allora la distanza del punto P_0 dalla retta r è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

2.4 Coniche, quadriche e forme normali

Per la classificazione delle quadriche si faccia riferimento al Capitolo 6 di [2]. Quella delle coniche segue da quella delle quadriche considerando i casi in cui $\mathrm{rg}(A)$ è uguale a 2 oppure 1. Basta usare le relative tabelle per la classificazione delle quadriche sostituendo

- *parabola* al posto di cilindro parabolico;
- *ellisse* al posto di cilindro ellittico;
- *iperbole* al posto di cilindro iperbolico;
- *punto* al posto di retta;
- *retta* al posto di piano.

Testo seguito:

[1] S.Abeasis, Elementi di algebra lineare e geometria, Zanichelli (Bologna), 2000.

[2] P.Albano-A.Parmeggiani, Elementi Introduttivi di Matematica, 2002.

Altri testi consigliati:

[3] M.Bramanti-C.D.Pagani-S.Salsa, Matematica, Zanichelli (Bologna), 2000.