

PROGRAMMA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

Corso di Laurea in ARCHITETTURA
A.A. 2011/2012 (Alberto PARMEGGIANI)

Indice

1	Algebra lineare	1
1.1	Vettori nel piano \mathbb{R}^2 , nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , e nello spazio n -dimensionale \mathbb{R}^n	1
1.2	Matrici ed operazioni su matrici	3
1.3	Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari	4
1.4	Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.	5
1.5	Sottospazi vettoriali e sottovarietà lineari affini	5
1.6	Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà	8
1.7	Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa	9
1.8	Prodotto scalare di vettori in \mathbb{R}^n e proiezione di un vettore lungo un altro	10
1.9	Basi ortonormali, processo di ortonormalizzazione, matrici ortogonali	12
1.10	Prodotto vettoriale di vettori in \mathbb{R}^3 e sua interpretazione geometrica	14
1.11	Forme quadratiche e diagonalizzazione	15
2	Geometria del piano e dello spazio	16
2.1	Piani nello spazio tridimensionale	16
2.2	Rette nello spazio tridimensionale	17
2.3	Distanza punto–retta e punto–piano	18
2.4	Coniche, quadriche e forme normali	19

1 Algebra lineare

1.1 Vettori nel piano \mathbb{R}^2 , nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , e nello spazio n -dimensionale \mathbb{R}^n

Si consideri l'insieme dei **vettori** del piano

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un punto (x_1, x_2) del piano cartesiano è identificato con un elemento $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dati

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, si hanno (per definizione) le operazioni di “prodotto per

uno scalare” e di “somma tra vettori”

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore nullo è $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ed è identificato con il punto $(0, 0)$).

Due vettori $v, w \neq 0$ si dicono *paralleli* se sono uno un multiplo dell'altro, cioè se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ tale che $v = \alpha w$. Si può inoltre definire un'operazione, detta *prodotto scalare*, che associa a due vettori x, y un numero come segue

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Talvolta si usa il simbolo $x \cdot y$ al posto di $\langle x, y \rangle$. Due vettori v e w si dicono *ortogonali* (in simboli $v \perp w$) se $\langle v, w \rangle = 0$.

La *norma* (o lunghezza) del vettore x è per definizione

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Tutte le precedenti operazioni si estendono naturalmente allo spazio dei vettori tridimensionali

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

ed anche allo spazio dei vettori n -dimensionali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

In questo caso dati $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

e

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n.$$

Inoltre,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}.$$

- Si ha che \mathbb{R}^n , munito delle operazioni di “prodotto per uno scalare” e di “somma tra vettori”, risulta essere uno *spazio vettoriale*.

Sia k un numero naturale, per *combinazione lineare* di k vettori v_1, v_2, \dots, v_k di \mathbb{R}^n si intende una qualsiasi espressione della forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono k numeri reali.

Dati k vettori del piano v_1, v_2, \dots, v_k , essi si dicono *linearmente indipendenti* se dal fatto che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ segue che $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, cioè quando vale

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Qualora non siano linearmente indipendenti i vettori si dicono *linearmente dipendenti*. Si ha che

- due vettori di \mathbb{R}^n sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno un multiplo dell'altro;
- **tre** vettori di \mathbb{R}^2 sono **sempre** linearmente dipendenti;
- **quattro** vettori di \mathbb{R}^3 sono **sempre** linearmente dipendenti,
- e, più in generale, $n + 1$ vettori di \mathbb{R}^n sono **sempre** linearmente dipendenti.
- L'importanza di avere una famiglia $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^n risiede nel fatto che se un vettore è combinazione lineare dei v_1, \dots, v_k , allora i coefficienti della combinazione lineare sono **unici**.

È importante osservare che i vettori possono essere pensati tanto come *vettori colonna* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

quanto come *vettori riga* (x_1, x_2, \dots, x_n) . In generale si utilizzano indifferentemente una o l'altra scrittura.

1.2 Matrici ed operazioni su matrici

Dati due numeri naturali m ed n (si pensi ad esempio ad $m, n \in \{1, 2, 3\}$) una matrice $m \times n$ è una tabella con m righe ed n colonne. Ad esempio,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

è una generica matrice 3×2 .

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata*.

Date due matrici $m \times n$, A e B , la somma $A + B$ è (per definizione) la matrice $m \times n$ ottenuta sommando A con B “componente per componente”. Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

allora

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ è per definizione la matrice avente per componenti quelle di A moltiplicate per lo scalare α . Ad esempio, se A è la matrice scritta sopra,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{bmatrix}.$$

Date una matrice $m \times n$, A , ed una matrice $n \times k$, B , il prodotto AB è la matrice $m \times k$ che ha nel posto determinato dall'incrocio tra la i -esima riga e la j -esima colonna il prodotto scalare tra la i -esima riga della matrice A e la j -esima colonna della matrice B (si opera cioè un prodotto "righe-per-colonne"). In particolare se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

allora

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{bmatrix}.$$

Quindi tramite il prodotto di una matrice $m \times n$ per una matrice (vettore colonna) $n \times 1$, il prodotto di una matrice $m \times n$, A , per una matrice $n \times k$, $B = [b_1|b_2|\dots|b_k]$ dove $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ sono le colonne di B , si ottiene operando k volte il prodotto righe-per-colonne della matrice A per ciascuna colonna b_j ($j = 1, \dots, k$) di B :

$$AB = [Ab_1|Ab_2|\dots|Ab_k]$$

che risulta perciò essere una matrice $m \times k$.

- Si ha la seguente proprietà di *linearità*: data la matrice $m \times n$, A , per ogni scalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vettori colonna (matrici $n \times 1$) $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

- La matrice *identità* I è la matrice con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

Osservazione. Ricordiamo ancora che una matrice $n \times 1$, x , si identifica con un vettore $x \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si rappresenta con una matrice $m \times n$ (la matrice dei coefficienti), A , un vettore b di \mathbb{R}^m (il vettore dei "termini noti"), ed un vettore x di \mathbb{R}^n (il vettore delle incognite). Cioè il sistema $[A|b]$ si può rappresentare nella forma

$$Ax = b.$$

Per risolvere il sistema si può ricorrere a sostituzioni successive oppure alla *riduzione di Gauss-Jordan* che può essere descritta come segue.

- Si costruisce la matrice $[A|b]$;
- si opera sulla matrice $[A|b]$ agendo con *operazioni elementari sulle righe* della matrice fino a ridurre la matrice alla forma $[S|c]$, dove S è una forma *ridotta a scala* di A ;
- si risolve il sistema partendo dall'ultima equazione in $[S|c]$ fino ad arrivare alla prima (con sostituzioni successive).

È importante osservare che procedendo con la riduzione di Gauss-Jordan ci si trova davanti ad una serie di **possibili alternative**:

- il sistema non ammette soluzione,
- il sistema ammette un'unica soluzione,
- il sistema ammette ∞^k soluzioni per un certo $k = n - r$, dove r è il numero di **pivot** della matrice a scala S . Il numero r si chiama *rango della matrice A* , e si indica con $\text{rg}(A)$. Si noti che $r \leq \min\{m, n\}$.
- Il caso di non esistenza della soluzione si ha quando, dopo aver effettuato la riduzione di Gauss-Jordan, si trova un'equazione impossibile nel sistema $[S|c]$ (ad esempio, $0 = c_m$ con $c_m \neq 0$).

Si ha l'importante teorema di Rouché-Capelli.

Teorema. (Rouché-Capelli) *Data A , matrice $m \times n$, e dato il vettore $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è risolubile (cioè "ammette soluzione", o anche "è compatibile") per $x \in \mathbb{R}^n$ se e solo se*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]).$$

In tal caso, posto $r = \text{rg}(A)$, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni.

1.4 Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Consideriamo il sistema di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Quando $b = 0$ il sistema si dice *omogeneo*. Consideriamo l'insieme delle soluzioni

$$S_b = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- se x ed y sono due soluzioni del sistema omogeneo (cioè $x, y \in S_0$) allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha x + \beta y$ è soluzione del sistema omogeneo (cioè $\alpha x + \beta y \in S_0$);
- se $\xi_0 \in S_b$ allora per ogni soluzione $x \in S_0$ si ha che $\xi_0 + x \in S_b$. In simboli, si ha che

$$S_b = \{\xi_0 + x; x \in S_0\}$$

(ξ_0 si dice essere una soluzione *particolare* del sistema non omogeneo). Si usa la notazione $S_b = \xi_0 + S_0$.

1.5 Sottospazi vettoriali e sottovarietà lineari affini

Un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$ è un *sottospazio vettoriale* se

$$\alpha v + \beta v' \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, v' \in V.$$

Quindi, ad esempio, è un **sottospazio vettoriale** l'insieme S_0 delle soluzioni di un sistema lineare **omogeneo**.

Dati k vettori, v_1, \dots, v_k , lo *spazio generato* da tali vettori è l'insieme

$$V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme si denota con il simbolo $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ed i vettori v_1, \dots, v_k sono detti i *generatori* del sottospazio V . Si ha che V è un **sottospazio vettoriale** di \mathbb{R}^n .

- Si dice che la famiglia **ordinata** di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ forma una *base* di un sottospazio vettoriale V se i v_1, \dots, v_k sono **linearmente indipendenti** e

$$\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = V.$$

La *dimensione* del sottospazio vettoriale V è il numero di elementi che formano una base.

- Dati i sottospazi V e W di \mathbb{R}^n allora:

– l'insieme $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n ;

- Se A è una matrice $m \times n$ allora

– l'*immagine* di A è l'insieme

$$\text{Im } A = \{Ax; x \in \mathbb{R}^n\};$$

– il *nucleo* di A è l'insieme

$$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

– È importante osservare che

$$\text{Ker } A \neq \{0\} \iff \text{ i vettori colonna di } A \text{ sono } \mathbf{linearmente dipendenti};$$

– $\text{Im } A$ e $\text{Ker } A$ sono **sottospazi vettoriali** di \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^n , **rispettivamente**;

– per l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ vale $S_0 = \text{Ker } A$.

- Osserviamo che data la matrice $m \times n$, $A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]$, dove i vettori $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ sono

le colonne di A , e dati i vettori $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, il sistema $Ax = b$ è

equivalente a scrivere

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = b,$$

e quindi il sistema è risolubile se e solo se $b \in \text{Im } A$. Se ne deduce anche che

$$\text{Im } A = \text{Span}\{\text{colonne di } A\}.$$

È anche importante osservare che dal Teorema di Rouché-Capelli segue che l'appartenenza del vettore b allo spazio delle colonne di A (che dà la risolubilità del sistema) si legge nel sistema equivalente $[S|c]$, dove S è una riduzione a scala di A , ed esattamente nelle condizioni $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$, dove $r = \text{rg}(A)$.

- Si ha che $\text{rg}(A) = \dim \text{Im } A$.
- La matrice A si dice *singolare* se $\text{Ker } A \neq \{0\}$, il che è equivalente a $\text{rg}(A) < n$.

Data la matrice A , $m \times n$, si definisce *trasposta di A* la matrice A^T le cui righe sono le colonne di A . Essa è quindi una matrice $n \times m$. Per esempio

$$\text{se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ allora } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice trasposta di A è anche denotata con il simbolo A^t .

- Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $n \times k$, allora vale $(AB)^T = B^T A^T$, che quindi risulta essere una matrice $k \times m$.
- Vale la (importantissima) relazione: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$. Si ha quindi che

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Span}\{\text{colonne di } A\} = \dim \text{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Un esempio molto importante di base di \mathbb{R}^3 è l'insieme formato dai vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti, e_1, e_2 ed e_3 sono linearmente indipendenti ed $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

In generale dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale si può estrarre da essi una base procedendo come segue:

- si costruisce una matrice avente per **colonne** tali vettori (per fissare le idee consideriamo il caso di quattro vettori in \mathbb{R}^3);
- si utilizzano le operazioni elementari **sulle righe** della matrice fino ad ottenere una forma scala S ,
- le colonne della matrice di partenza **corrispondenti** alle colonne di S che contengono i pivot di S formano una base.
- **Equivalentemente**, si costruisce una matrice avente per **righe** i vettori dati e si utilizzano le operazioni elementari (sempre sulle righe) per ridurre la matrice ad una forma a scala. I vettori riga che contengono i pivot della matrice a scala, rilette come vettori colonna, formano una base.

Possiamo inoltre fare le seguenti considerazioni:

- i vettori v_1, \dots, v_k di \mathbb{R}^n sono linearmente indipendenti se e solo se, definendo $A = [v_1 | \dots | v_k]$ (matrice $n \times k$), il sistema $Ax = 0$ ha come **unica** soluzione la soluzione nulla 0 (e quindi se e solo se la matrice A è non-singolare, e cioè, ancora, se e solo se $\text{rg}(A) = k$);
- in generale, per ottenere l'equazione cartesiana di $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ basta usare il Teorema di Rouché-Capelli sul sistema $[A|x]$ e leggere le equazioni dalle condizioni di compatibilità del sistema, inoltre le colonne di A corrispondenti ai pivot di una forma a scala di A sono una **base** per $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$;
- avendo definito *sottovarietà lineare affine* l'insieme $\xi_0 + V = \{\xi_0 + v; v \in V\}$, dove V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , si ha quindi che
- per ottenere l'equazione cartesiana della sottovarietà lineare affine $\xi_0 + V$, dove $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$, basta operare come nel caso vettoriale sul sistema $[A|x - \xi_0]$.
- Si pone $\dim(\xi_0 + V) = \dim V$.
- Supponiamo che $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Consideriamo ancora la matrice $n \times k$, $A = [v_1 | v_2 | \dots | v_k]$. Si può allora pensare a $\xi_0 + V$ come l'insieme S_b delle soluzioni del sistema $Ax = b$, dove $b = A\xi_0$, cioè $\xi_0 + V = S_b$.

È chiaro che in un sottospazio vettoriale possono essere scelte diverse basi. Quindi i vettori appartenenti a tale sottospazio possono essere rappresentati usando diversi sistemi di coordinate. Un'operazione fondamentale è il cambiamento di sistema di coordinate, ossia passare dalle coordinate di un vettore espresse rispetto ad una base a quelle scritte rispetto ad una base diversa (si veda il paragrafo **1.11**).

1.6 Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà

Il determinante di un numero (matrice 1×1) è il numero stesso.

Data una matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

il determinante di A è per definizione il numero

$$\det A = ad - bc.$$

Data una matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

il determinante di A è definito nel modo seguente

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

dove

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Definendo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

il **complemento algebrico dell'elemento** a_{ij} , si ha che la formula sopra si scrive anche

$$\det A = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13}.$$

In generale, nel caso $n \times n$, si ha che il determinante di una matrice A può essere calcolato nel modo seguente (sviluppo di Laplace). Dati $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ sia A_{ij} la matrice ottenuta dalla matrice A sopprimendo la i -esima riga e la j -esima colonna, e sia $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, il complemento algebrico di a_{ij} . Fissiamo un numero $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Allora vale il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k -esima riga:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} \det A_{k2} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det A_{kn} = \\ &= a_{k1}\mathcal{A}_{k1} + a_{k2}\mathcal{A}_{k2} + \dots + a_{kn}\mathcal{A}_{kn}. \end{aligned}$$

Vale una formula analoga rispetto alle colonne. Infatti, fissato $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, si ha il seguente sviluppo del determinante rispetto alla k -esima colonna:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} \det A_{2k} + \dots + (-1)^{k+n} a_{nk} \det A_{nk} = \\ &= a_{1k}\mathcal{A}_{1k} + a_{2k}\mathcal{A}_{2k} + \dots + a_{nk}\mathcal{A}_{nk}. \end{aligned}$$

Il determinante soddisfa le seguenti proprietà:

- $\det I = 1$;
- $\det A = \det(A^T)$;
- data la matrice A sia B la matrice ottenuta scambiando nella matrice A due colonne (o due righe), allora $\det B = -\det A$; perciò, in particolare, se due colonne (o due righe) di A sono uguali, allora $\det A = 0$;
- siano v_1, v_3, \dots, v_n e w vettori colonna ed α e β due numeri reali allora

$$\det [\alpha v_1 + \beta w | v_2 | \dots | v_n] = \alpha \det [v_1 | v_2 | \dots | v_n] + \beta \det [w | v_2 | \dots | v_n],$$

e vale anche sempre che

$$\det [v_1 | \dots | \alpha v_i + \beta v_j | \dots | v_j | \dots | v_n] = \alpha \det [v_1 | \dots | v_i | \dots | v_j | \dots | v_n].$$

La formula precedente si applica anche ad ogni altra coppia di colonne (e continua a valere ragionando sulle righe invece che sulle colonne);

- vale la formula di Binét: $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$.

1.7 Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa

Una matrice **quadrata** A si dice *invertibile* se esiste una matrice B tale che $AB = BA = I$. Si ha che *la matrice inversa se esiste è unica*. Si ha inoltre che *una matrice è invertibile se e solo se essa ammette una unica inversa destra*, e che *una matrice è invertibile se e solo se $\text{rg}(A) = n$* . La matrice inversa (o brevemente *l'inversa*) della matrice A si denota con il simbolo A^{-1} . Vale il seguente teorema.

Teorema. *La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In particolare si ha che se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.*

Per calcolare l'inversa di una matrice A si procede come segue:

- si costruisce la matrice $[A|I]$
- si procede con operazioni elementari sulle righe della matrice $[A|I]$ fino a che non ci si riduce ad una matrice della forma $[I|C]$ per una qualche matrice C (quello che conta è avere nel primo "blocco" la matrice identità!)
- si conclude che $A^{-1} = C$.

L'uso del determinante permette anche di dare le seguenti formule per l'inversa di A .

- Nel caso 2×2 , data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $\det A \neq 0$, allora si ha la formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- Nel caso $n \times n$, se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ è la matrice la cui entrata al posto ij è \mathcal{A}_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, si definisce la **matrice aggiunta** di A tramite la formula

$$\text{Agg}(A) = \mathcal{A}^T,$$

e si ha che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Agg}(A).$$

- In particolare, considerando il sistema $Ax = b$, A matrice $n \times n$ *invertibile*, allora la soluzione è univocamente data da $\xi = A^{-1}b$. Di più, si ha la *formula di Cramer* per la

$$\text{soluzione } \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

$$\xi_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

dove B_i è la matrice che si ottiene *sostituendo alla colonna i -esima di A il vettore termine noto b* , $i = 1, 2, \dots, n$.

1.8 Prodotto scalare di vettori in \mathbb{R}^n e proiezione di un vettore lungo un altro

Ricordiamo che, dati i vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si è definito *prodotto scalare* il numero reale

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

È importante notare che $\langle x, y \rangle = x^T y$ (prodotto del vettore riga x^T col vettore colonna y). Quindi è facile vedere che si ha la seguente formula: *per ogni matrice $n \times n$, A , si ha*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle.$$

Proprietà del prodotto scalare:

- simmetria: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$;
- bilinearità:
$$\begin{cases} \langle \alpha v + \beta v', w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v', w \rangle \\ \langle v, \alpha w + \beta w' \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v, w' \rangle \end{cases},$$
 per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e tutti i $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$;
- $\langle v, v \rangle \geq 0$, per tutti i $v \in \mathbb{R}^n$, e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

La **lunghezza** (o **norma**) di un vettore $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è stata definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Si osservi che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Dati poi due punti P_0, P_1 di \mathbb{R}^n , si definisce la loro *distanza* (euclidea) tramite

$$\text{dist}(P_0, P_1) := \|P_0 - P_1\|.$$

Si noti che $\text{dist}(P_0, P_1) = \text{dist}(P_1, P_0)$.

Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

e l'*uguaglianza sussiste* se e solo se x è multiplo di y .

Proprietà della norma:

- $\|x\| \geq 0$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$;
- dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue la **disuguaglianza triangolare**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, poiché dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta quindi essere

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1, \quad \forall x, y \neq 0,$$

si ha che **esiste un unico angolo** $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} = \cos \alpha.$$

Tale angolo si chiama *l'angolo (convesso) formato dai vettori x e y* .

- Si dice che due vettori v e w di \mathbb{R}^n sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.
- Dato $v \in \mathbb{R}^n$, si ha che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $v = 0$.
- Dato un sottospazio V di \mathbb{R}^n , si definisce il *sottospazio ortogonale di V* l'insieme

$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n; \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}.$$

Si ha che V^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , che $\dim V^\perp = n - \dim V$, e che ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive, in maniera **unica** come $v = v' + v''$ con $v' \in V$ e $v'' \in V^\perp$.

- Quando $A = A^T$, allora $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A$. Infatti, se $v \in \text{Im } A$, allora $v = Av'$ per un certo $v' \in \mathbb{R}^n$, e quindi per ogni $w \in \text{Ker } A$ si ha

$$\langle v, w \rangle = \langle Av', w \rangle = \langle v', A^T w \rangle = \langle v', Aw \rangle = 0,$$

poiché $A = A^T$ e $Aw = 0$. Ma allora $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in \text{Ker } A$, da cui $v \in (\text{Ker } A)^\perp$. Quindi $\text{Im } A \subset (\text{Ker } A)^\perp$ ed essendo

$$\dim \text{Im } A = \text{rg}(A) = n - \dim \text{Ker } A = \dim(\text{Ker } A)^\perp,$$

ne segue che $\text{Im } A = (\text{Ker } A)^\perp$.

- Dal punto precedente segue che quando $A = A^T$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive, in maniera **unica** come $v = v' + v''$ con $v' \in \text{Ker } A$ e $v'' \in \text{Im } A = (\text{Ker } A)^\perp$.

1.9 Basi ortonormali, processo di ortonormalizzazione, matrici ortogonali

Una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ di \mathbb{R}^n si dice **ortonormale** se valgono le relazioni

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \dots = \|u_n\| = 1, \quad \langle u_j, u_r \rangle = 0 \text{ se } j \neq r.$$

Le basi ortonormali di \mathbb{R}^n sono di fondamentale importanza, in quanto esse permettono di scrivere facilmente le coordinate di un vettore qualsiasi v rispetto ad esse. Infatti: *se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^n allora ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto in maniera univoca nella forma*

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n.$$

Quindi le **coordinate di v rispetto alla base $\{u_1, \dots, u_n\}$** sono i numeri $\langle v, u_1 \rangle, \dots, \langle v, u_n \rangle$.

- **Osservazione.** I vettori di una famiglia $\{u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ortonormale sono **linearmente indipendenti**.
- Dati i vettori non nulli $v, w \in \mathbb{R}^n$, si definisce *proiezione di v lungo w* il vettore

$$\text{pr}_w(v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w.$$

Si noti il seguente fatto importantissimo (perché fondamentale per il processo di ortonormalizzazione): *il vettore $v - \text{pr}_w(v)$ è ortogonale a w* , cioè

$$\langle v - \text{pr}_w(v), w \rangle = 0.$$

Vale il seguente importante teorema.

Teorema. (Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Data la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di \mathbb{R}^n è sempre possibile costruire a partire da essa una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$.*

La dimostrazione del teorema è costruttiva. Facciamo vedere la costruzione nei casi $n = 2, 3$.

Caso $n = 2$. Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di \mathbb{R}^2 . Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi $\|u_1\| = 1$. Sia poi $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Allora $\langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle = 0$. Per finire basta prendere

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

Caso $n = 3$. Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 . Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi $\|u_1\| = 1$. Sia poi $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Allora $\langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle = 0$, e quindi prendiamo

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

Ora prendiamo $\tilde{u}_3 := v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1$, e, per finire, essendo $\langle \tilde{u}_3, u_1 \rangle = \langle \tilde{u}_3, u_2 \rangle = 0$,

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1}{\|v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1\|}.$$

Il caso generale n -dimensionale procede per induzione esattamente secondo le linee sopra esposte.

Osservazione. Una formulazione apparentemente più generale del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt è la seguente:

Teorema. *A partire da una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ del sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$ si può sempre costruire un'altra base di V che sia ortonormale.*

Data una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ di \mathbb{R}^n , costruiamo la matrice R la cui j -esima colonna è il vettore u_j , $j = 1, \dots, n$:

$$R = [u_1 | u_2 | \dots | u_n].$$

Allora la matrice trasposta di R si scrive

$$R^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix},$$

le cui righe sono i vettori **riga** u_j^T . Dalla regola di moltiplicazione righe-per-colonne tra matrici si ha perciò

$$R^T R = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \dots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \dots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \dots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Poiché R^T è invertibile, essa possiede un'unica inversa destra che quindi è R , da cui segue $R^T = R^{-1}$. Tali matrici, cioè quelle matrici *le cui colonne (equivalentemente le cui righe) formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n* si dicono **ortogonali**, e sono di fondamentale importanza perché conservano il prodotto scalare tra vettori, e quindi le loro lunghezze, e quindi gli angoli tra i vettori. Infatti se R è una matrice ortogonale $n \times n$ allora

$$\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, R^T R w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, prendendo $v = w$ si ottiene $\|Rv\| = \|v\|$, cioè Rv ha la stessa lunghezza di v . Allora, indicato con α l'angolo tra Rv e Rw e β l'angolo tra v e w , si ha che

$$\cos \alpha = \frac{\langle Rv, Rw \rangle}{\|Rv\| \|Rw\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \cos \beta,$$

da cui segue che $\alpha = \beta$, essendo per ipotesi $\alpha, \beta \in [0, \pi]$.

- Dato $u \in \mathbb{R}^n$, la funzione $f_u: \mathbb{R}^n \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}$ determina univocamente u e, reciprocamente, è determinata univocamente da u . Ciò si vede facilmente prendendo una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ di \mathbb{R}^n e notando che

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n = f_u(u_1)u_1 + f_u(u_2)u_2 + \dots + f_u(u_n)u_n.$$

1.10 Prodotto vettoriale di vettori in \mathbb{R}^3 e sua interpretazione geometrica

Dati due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ e $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ dello spazio \mathbb{R}^3 , il loro *prodotto vettoriale* è il vettore $v \times w$ determinato dalla funzione, detta *prodotto misto*,

$$f_{v \times w}(u) = \langle u, v \times w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}, \quad \text{ove } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

In altre parole, il vettore $v \times w$ è determinato dal conoscere tutti i possibili prodotti scalari $\langle u, v \times w \rangle$, u vettore qualsiasi di \mathbb{R}^3 , i quali, a loro volta, *per definizione* valgono $\det[u|v|w]$. Geometricamente, il prodotto misto $\langle u, v \times w \rangle$ rappresenta il volume (orientato, cioè con segno!) del parallelepipedo avente per spigoli u, v e w .

- È quindi chiaro che $\langle u, v \times w \rangle = 0$ se e solo se u, v e w sono linearmente dipendenti.
- In particolare, $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w .

Poiché la funzione $f_{v \times w}$ determina univocamente il vettore $v \times w$, ne segue che $v \times w$ si può anche scrivere come il seguente determinante “formale” (in quanto $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ed \mathbf{e}_3 , vettori ortonormali della base canonica di \mathbb{R}^3 , non sono numeri ma vettori!)

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix},$$

in altre parole

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, il prodotto vettoriale dei vettori v e w rappresenta l’area “orientata” (cioè con segno!) del parallelogramma avente per lati v e w .

- È quindi chiaro che $v \times w = 0$ se e solo se v e w sono uno multiplo dell’altro.

Valgono le seguenti proprietà: per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

- $v \times v = 0$;
- $v \times w = -(w \times v)$;
- per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w) = (\lambda v) \times w$;
- $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$;
- $\|v \times w\| = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2} = \|v\| \|w\| \sin \alpha$, dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l’angolo tra v e w .

1.11 Forme quadratiche e diagonalizzazione

Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Il *polinomio caratteristico* di A è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico **ha grado** n , e le sue radici si chiamano *autovalori* (della matrice A). Se λ_0 è un autovalore l’insieme $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$ è l’*autospazio* associato all’autovalore λ_0 . Gli elementi di $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$ sono gli *autovettori* di A (associati all’autovalore λ_0).

- Si dice che la *molteplicità algebrica* dell’autovalore λ_0 è m se

$$(\lambda - \lambda_0)^m \text{ divide } p(\lambda), \quad \text{ma } (\lambda - \lambda_0)^{m+1} \text{ non divide } p(\lambda).$$

- Si dice che la *molteplicità geometrica* dell’autovalore λ_0 è r se

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_0 I) = r.$$

- Si ha sempre che

$$\text{molteplicità geometrica}(\lambda_0) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda_0).$$

Si definisce *traccia* della matrice A , quadrata $n \times n$, la somma degli elementi sulla diagonale principale di A , cioè il numero

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

Data la matrice A quadrata $n \times n$, valgono le seguenti relazioni tra gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A , $\text{Tr}(A)$ e $\det(A)$:

- $\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$;
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$;
- quando A è 2×2 si ha

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Una matrice quadrata A si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se $A = A^T$. Vale il seguente risultato.

Teorema. *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora, gli autovalori di A , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ripetuti secondo la rispettiva molteplicità algebrica, sono reali ed autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali. Di più, si può trovare una **base** di \mathbb{R}^n fatta di autovettori di A . Tale base, eventualmente tramite un processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, può essere scelta **ortonormale**.*

È importante notare il fatto seguente.

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ **qualsiasi** (cioè non necessariamente simmetrica) la quale abbia tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in \mathbb{R} ed i cui relativi autovettori formino una **base** di \mathbb{R}^n . Sia allora Λ la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A , e siano v_1, \dots, v_n i corrispondenti autovettori (relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, rispettivamente). Definiamo $S = [v_1|v_2|\dots|v_n]$. Allora S è invertibile perché v_1, \dots, v_n formano una base di \mathbb{R}^n . Dall'equazione agli autovalori $Av_j = \lambda_j v_j$, $j = 1, \dots, n$, segue che (righe-per-colonne)

$$AS = [Av_1|Av_2|\dots|Av_n] = [\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\dots|\lambda_n v_n] = S\Lambda,$$

e quindi si ha la relazione

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Una tale matrice si dice allora **diagonalizzabile**. Quindi, il teorema precedente assicura che *tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili*.

Osserviamo anche che quando A è *simmetrica* e gli autovettori v_1, \dots, v_n si scelgono in modo da formare una **base ortonormale** di \mathbb{R}^n , allora la matrice S associata agli autovettori di A è **ortogonale**, per cui vale $S^{-1} = S^T$ e quindi anche la relazione

$$A = SAS^T.$$

Data A , matrice simmetrica $n \times n$, una *forma quadratica* Q è una funzione che associa ad ogni vettore x con n componenti il numero $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$. Sappiamo quindi che esiste una matrice ortogonale S tale che $A = S\Lambda S^T$, con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori (eventualmente ripetuti) della matrice A . Allora, se si pone $y = S^T x$, nelle “nuove” coordinate y si ha

$$Q(x) = Q(Sy) = \langle \Lambda y, y \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

2 Geometria del piano e dello spazio

2.1 Piani nello spazio tridimensionale

Sia P_0 un punto di \mathbb{R}^3 ed n un vettore di \mathbb{R}^3 diverso da zero. Allora il piano passante per il punto P_0 e perpendicolare al vettore n è l'insieme

$$\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 : \langle P - P_0, n \rangle = 0\}.$$

- Il vettore n si chiama (*una*) *direzione normale al piano* π .

Osserviamo che posto $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ la formula precedente si scrive come

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0) = 0.$$

In generale quindi un piano scritto secondo la *rappresentazione cartesiana* è dato da

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove a, b, c, d sono numeri assegnati. È allora chiaro che data la precedente rappresentazione cartesiana il vettore $(a, b, c)^T$ è un vettore normale al piano. Siano dati tre punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tali che i vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ siano linearmente indipendenti (tali punti si dicono *non allineati*), cioè

$$(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \neq 0.$$

Allora il piano π passante per P_0, P_1 e P_2 è dato dall'equazione

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{bmatrix} = 0,$$

cioè, posto $P = (x, y, z)$, la formula precedente può essere riscritta come segue

$$\langle (P - P_0), (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \rangle = 0.$$

Il piano π contenente i punti P_0, P_1 e P_2 , con $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ *linearmente indipendenti*, ha anche la seguente *rappresentazione parametrica*

$$\pi = \{P_0 + \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- I vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ si chiamano *direzioni del piano* π .

Dalla rappresentazione parametrica è immediato passare a quella cartesiana infatti basta scegliere, ad esempio,

$$P_0 = P_0 \quad \text{e} \quad n = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$$

Due piani π_1 e π_2 si dicono

- *perpendicolari* se sono ortogonali le loro direzioni normali;
- *paralleli* se le loro direzioni normali sono una multiplo dell'altra.

Osservazione. Notiamo quindi che l'equazione cartesiana di una retta di \mathbb{R}^3 rappresenta l'intersezione di due piani distinti e non paralleli.

2.2 Rette nello spazio tridimensionale

Sia $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ un vettore (non nullo!) di \mathbb{R}^3 e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto (fissato). La retta r passante per P_0 con *direzione* v è l'insieme

$$r = \{P_0 + tv; t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \\ z_0 + tv_3 \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La precedente è detta rappresentazione della retta r in *forma parametrica*. Si può passare dalla rappresentazione parametrica alla *rappresentazione cartesiana* ponendo

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

“eliminando” il parametro t dalle precedenti espressioni ci si riduce ad espressioni della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

dove a, b, c, a_1, b_1, c_1 sono numeri opportuni che dipendono da P_0 e v . Ci si può porre il problema inverso ossia come passare dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica.

In questo caso sono assegnate le espressioni (in modo che non siano una un multiplo dell'altra!)

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Basta scegliere un punto P_0 tra le soluzioni del precedente sistema (essendo formato da due equazioni in due incognite ammette sicuramente, almeno, ∞^1 soluzioni) e prendere come

direzione v il prodotto vettoriale $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$.

Siano r ed s due rette con direzione v_r e v_s rispettivamente. Si dice che

- r è *parallela* ad s se v_r è un multiplo di v_s ;
- r è *perpendicolare* ad s se r ed s si **intersecano** e v_r è perpendicolare a v_s , cioè $r \cap s \neq \emptyset$ e $\langle v_r, v_s \rangle = 0$;
- r ed s sono *sghembe* se v_r **non** è un multiplo di v_s ma $r \cap s = \emptyset$.

2.3 Distanza punto–retta e punto–piano

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di \mathbb{R}^3 e sia r una retta assegnata, ad esempio, in forma cartesiana:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Sia v il vettore

$$v = \frac{(a, b, c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T}{\|(a, b, c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T\|}.$$

Allora la distanza del punto P_0 dalla retta r è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \|(P_1 - P_0) \times v\|,$$

dove P_1 è un punto della retta r fissato in modo arbitrario (la distanza del punto P_0 dalla retta r è indipendente dalla scelta del punto P_1).

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di \mathbb{R}^3 e sia π un piano assegnato, ad esempio, in forma cartesiana:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Allora la distanza del punto P_0 dal piano π è data dalla formula

$$d(P_0; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osserviamo che se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto di \mathbb{R}^2 ed $r \subset \mathbb{R}^2$ è la retta di equazione cartesiana

$$ax + by + c = 0,$$

allora la distanza del punto P_0 dalla retta r è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.4 Coniche, quadriche e forme normali

Per la classificazione delle quadriche si faccia riferimento al Capitolo 6 di [2]. Quella delle coniche segue da quella delle quadriche considerando i casi in cui $\text{rg}(A)$ è uguale a 2 oppure 1. Basta usare le relative tabelle per la classificazione delle quadriche sostituendo

- *parabola* al posto di cilindro parabolico;
- *ellisse* al posto di cilindro ellittico;
- *iperbole* al posto di cilindro iperbolico;
- *punto* al posto di retta;
- *retta* al posto di piano.

Testo seguito:

[1] S.Abeasis, Elementi di algebra lineare e geometria, Zanichelli (Bologna), 2000.

[2] P.Albano-A.Parmeggiani, Elementi Introduttivi di Matematica, 2002.

Altri testi consigliati:

[3] M.Bramanti-C.D.Pagani-S.Salsa, Matematica, Zanichelli (Bologna), 2000.