

# PROGRAMMA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

Corso di Laurea in ARCHITETTURA  
A.A. 2012/2013 (Alberto PARMEGGIANI)

## Indice

<b>1</b>	<b>Algebra lineare</b>	<b>1</b>
1.1	Vettori nel piano $\mathbb{R}^2$ , nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ , e nello spazio $n$ -dimensionale $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1
1.2	Matrici ed operazioni su matrici . . . . .	3
1.3	Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari . . . . .	4
1.4	Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari. . . . .	5
1.5	Sottospazi vettoriali e sottovarietà lineari affini . . . . .	6
1.6	Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà . . . . .	8
1.7	Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa . . . . .	10
1.8	Prodotto scalare di vettori in $\mathbb{R}^n$ e proiezione di un vettore lungo un altro . . . . .	11
1.9	Basi ortonormali, processo di ortonormalizzazione, matrici ortogonali . . . . .	12
1.10	Prodotto vettoriale di vettori in $\mathbb{R}^3$ e sua interpretazione geometrica . . . . .	14
1.11	Forme quadratiche e diagonalizzazione . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Geometria del piano e dello spazio</b>	<b>17</b>
2.1	Piani nello spazio tridimensionale . . . . .	17
2.2	Rette nello spazio tridimensionale . . . . .	18
2.3	Distanza punto–retta e punto–piano . . . . .	19
2.4	Coniche, quadriche e forme normali . . . . .	19

## 1 Algebra lineare

### 1.1 Vettori nel piano $\mathbb{R}^2$ , nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ , e nello spazio $n$ -dimensionale $\mathbb{R}^n$

Si consideri l'insieme dei **vettori** del piano

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un punto  $(x_1, x_2)$  del piano cartesiano è identificato con un elemento  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dati

$\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  e  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , si hanno (per definizione) le operazioni di “prodotto per

uno scalare” e di “somma tra vettori”

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore nullo è  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (ed è identificato con il punto  $(0, 0)$ ).

Due vettori  $v, w \neq 0$  si dicono *paralleli* se sono uno un multiplo dell'altro, cioè se esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $\alpha \neq 0$  tale che  $v = \alpha w$ . Si può inoltre definire un'operazione, detta *prodotto scalare*, che associa a due vettori  $x, y$  un numero come segue

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Talvolta si usa il simbolo  $x \cdot y$  al posto di  $\langle x, y \rangle$ . Due vettori  $v$  e  $w$  si dicono *ortogonali* (in simboli  $v \perp w$ ) se  $\langle v, w \rangle = 0$ .

La *norma* (o lunghezza) del vettore  $x$  è per definizione

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Tutte le precedenti operazioni si estendono naturalmente allo spazio dei vettori tridimensionali

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

ed anche allo spazio dei vettori  $n$ -dimensionali

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

In questo caso dati  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  e  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

e

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n.$$

Inoltre,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}.$$

- Si ha che  $\mathbb{R}^n$ , munito delle operazioni di “prodotto per uno scalare” e di “somma tra vettori”, risulta essere uno *spazio vettoriale*.

Sia  $k$  un numero naturale, per *combinazione lineare* di  $k$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_k$  di  $\mathbb{R}^n$  si intende una qualsiasi espressione della forma  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ , dove  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sono  $k$  numeri reali.

Dati  $k$  vettori del piano  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , essi si dicono *linearmente indipendenti* se dal fatto che  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$  segue che  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , cioè quando vale

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Qualora non siano linearmente indipendenti i vettori si dicono *linearmente dipendenti*. Si ha che

- due vettori di  $\mathbb{R}^n$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno un multiplo dell'altro;
- **tre** vettori di  $\mathbb{R}^2$  sono **sempre** linearmente dipendenti;
- **quattro** vettori di  $\mathbb{R}^3$  sono **sempre** linearmente dipendenti,
- e, più in generale,  $n + 1$  vettori di  $\mathbb{R}^n$  sono **sempre** linearmente dipendenti.
- L'importanza di avere una famiglia  $\{v_1, \dots, v_k\}$  di vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^n$  risiede nel fatto che se un vettore è combinazione lineare dei  $v_1, \dots, v_k$ , allora i coefficienti della combinazione lineare sono **unici**.

È importante osservare che i vettori possono essere pensati tanto come *vettori colonna*  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

quanto come *vettori riga*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . In generale si utilizzano indifferentemente una o l'altra scrittura.

## 1.2 Matrici ed operazioni su matrici

Dati due numeri naturali  $m$  ed  $n$  (si pensi ad esempio ad  $m, n \in \{1, 2, 3\}$ ) una matrice  $m \times n$  è una tabella con  $m$  righe ed  $n$  colonne. Ad esempio,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

è una generica matrice  $3 \times 2$ .

Se  $m = n$  la matrice si dice *quadrata*.

Date due matrici  $m \times n$ ,  $A$  e  $B$ , la somma  $A + B$  è (per definizione) la matrice  $m \times n$  ottenuta sommando  $A$  con  $B$  “componente per componente”. Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

allora

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione di una matrice  $A$  per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$  è per definizione la matrice avente per componenti quelle di  $A$  moltiplicate per lo scalare  $\alpha$ . Ad esempio, se  $A$  è la matrice scritta sopra,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{bmatrix}.$$

Date una matrice  $m \times n$ ,  $A$ , ed una matrice  $n \times k$ ,  $B$ , il prodotto  $AB$  è la matrice  $m \times k$  che ha nel posto determinato dall'incrocio tra la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna il prodotto scalare tra la  $i$ -esima riga della matrice  $A$  e la  $j$ -esima colonna della matrice  $B$  (si opera cioè un prodotto "righe-per-colonne"). In particolare se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

allora

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{bmatrix}.$$

Quindi tramite il prodotto di una matrice  $m \times n$  per una matrice (vettore colonna)  $n \times 1$ , il prodotto di una matrice  $m \times n$ ,  $A$ , per una matrice  $n \times k$ ,  $B = [b_1|b_2|\dots|b_k]$  dove  $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$  sono le colonne di  $B$ , si ottiene operando  $k$  volte il prodotto righe-per-colonne della matrice  $A$  per ciascuna colonna  $b_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) di  $B$ :

$$AB = [Ab_1|Ab_2|\dots|Ab_k]$$

che risulta perciò essere una matrice  $m \times k$ .

- Si ha la seguente proprietà di *linearità*: data la matrice  $m \times n$ ,  $A$ , per ogni scalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e vettori colonna (matrici  $n \times 1$ )  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

- La matrice *identità*  $I$  è la matrice con tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

**Osservazione.** Ricordiamo ancora che una matrice  $n \times 1$ ,  $x$ , si identifica con un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Metodi di risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite si rappresenta con una matrice  $m \times n$  (la matrice dei coefficienti),  $A$ , un vettore  $b$  di  $\mathbb{R}^m$  (il vettore dei "termini noti"), ed un vettore  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  (il vettore delle incognite). Cioè il sistema  $[A|b]$  si può rappresentare nella forma

$$Ax = b.$$

Per risolvere il sistema si può ricorrere a sostituzioni successive oppure alla *riduzione di Gauss-Jordan* che può essere descritta come segue.

- Si costruisce la matrice  $[A|b]$ ;
- si opera sulla matrice  $[A|b]$  agendo con *operazioni elementari sulle righe* della matrice fino a ridurre la matrice alla forma  $[S|c]$ , dove  $S$  è una forma *ridotta a scala* di  $A$ ;
- si risolve il sistema partendo dall'ultima equazione in  $[S|c]$  fino ad arrivare alla prima (con sostituzioni successive).

È importante osservare che procedendo con la riduzione di Gauss-Jordan ci si trova davanti ad una serie di **possibili alternative**:

- il sistema non ammette soluzione,
- il sistema ammette un'unica soluzione,
- il sistema ammette  $\infty^k$  soluzioni per un certo  $k = n - r$ , dove  $r$  è il numero di **pivot** della matrice a scala  $S$ . Il numero  $r$  si chiama *rango della matrice  $A$* , e si indica con  $\text{rg}(A)$ . Si noti che  $r \leq \min\{m, n\}$ .
- Il caso di non esistenza della soluzione si ha quando, dopo aver effettuato la riduzione di Gauss-Jordan, si trova un'equazione impossibile nel sistema  $[S|c]$  (ad esempio,  $0 = c_m$  con  $c_m \neq 0$ ).

Si ha l'importante teorema di Rouché-Capelli.

**Teorema.** (Rouché-Capelli) *Data  $A$ , matrice  $m \times n$ , e dato il vettore  $b \in \mathbb{R}^m$ , il sistema  $Ax = b$  è risolubile (cioè "ammette soluzione", o anche "è compatibile") per  $x \in \mathbb{R}^n$  se e solo se*

$$\text{rg}(A) = \text{rg}([A|b]).$$

*In tal caso, posto  $r = \text{rg}(A)$ , il sistema ammette  $\infty^{n-r}$  soluzioni.*

## 1.4 Proprietà delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Consideriamo il sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Quando  $b = 0$  il sistema si dice *omogeneo*. Consideriamo l'insieme delle soluzioni

$$S_b = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- se  $x$  ed  $y$  sono due soluzioni del sistema omogeneo (cioè  $x, y \in S_0$ ) allora per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  anche  $\alpha x + \beta y$  è soluzione del sistema omogeneo (cioè  $\alpha x + \beta y \in S_0$ );
- se  $\xi_0 \in S_b$  allora per ogni soluzione  $x \in S_0$  si ha che  $\xi_0 + x \in S_b$ . In simboli, si ha che

$$S_b = \{\xi_0 + x; x \in S_0\}$$

( $\xi_0$  si dice essere una soluzione *particolare* del sistema non omogeneo). Si usa la notazione  $S_b = \xi_0 + S_0$ .

## 1.5 Sottospazi vettoriali e sottovarietà lineari affini

Un insieme  $V \subset \mathbb{R}^n$  è un *sottospazio vettoriale* se

$$\alpha v + \beta v' \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v, v' \in V.$$

Quindi, ad esempio, è un **sottospazio vettoriale** l'insieme  $S_0$  delle soluzioni di un sistema lineare **omogeneo**.

Dati  $k$  vettori,  $v_1, \dots, v_k$ , lo *spazio generato* da tali vettori è l'insieme

$$V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme si denota con il simbolo  $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  ed i vettori  $v_1, \dots, v_k$  sono detti i *generatori* del sottospazio  $V$ . Si ha che  $V$  è un **sottospazio vettoriale** di  $\mathbb{R}^n$ .

- Si dice che la famiglia **ordinata** di vettori  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  forma una *base* di un sottospazio vettoriale  $V$  se i  $v_1, \dots, v_k$  sono **linearmente indipendenti** e

$$\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = V.$$

La *dimensione* del sottospazio vettoriale  $V$  è il numero di elementi che formano una base.

- Dati i sottospazi  $V$  e  $W$  di  $\mathbb{R}^n$  allora:
  - l'insieme  $V \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ ;
- Se  $A$  è una matrice  $m \times n$  allora
  - l'*immagine* di  $A$  è l'insieme

$$\text{Im } A = \{Ax; x \in \mathbb{R}^n\};$$

- il *nucleo* di  $A$  è l'insieme

$$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

- È importante osservare che

$$\text{Ker } A \neq \{0\} \iff \text{i vettori colonna di } A \text{ sono linearmente dipendenti};$$

- $\text{Im } A$  e  $\text{Ker } A$  sono **sottospazi vettoriali** di  $\mathbb{R}^m$  ed  $\mathbb{R}^n$ , **rispettivamente**;
- per l'insieme  $S_0$  delle soluzioni del sistema omogeneo  $Ax = 0$  vale  $S_0 = \text{Ker } A$ .

- Osserviamo che data la matrice  $m \times n$ ,  $A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]$ , dove i vettori  $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$  sono

le colonne di  $A$ , e dati i vettori  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , il sistema  $Ax = b$  è

equivalente a scrivere

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = b,$$

e quindi il sistema è risolubile se e solo se  $b \in \text{Im } A$ . Se ne deduce anche che

$$\text{Im } A = \text{Span}\{\text{colonne di } A\}.$$

È anche importante osservare che dal Teorema di Rouché-Capelli segue che l'appartenenza del vettore  $b$  allo spazio delle colonne di  $A$  (che dà la risolubilità del sistema) si legge nel sistema equivalente  $[S|c]$ , dove  $S$  è una riduzione a scala di  $A$ , ed esattamente nelle condizioni  $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$ , dove  $r = \text{rg}(A)$ .

- Si ha che  $\text{rg}(A) = \dim \text{Im } A$ .
- La matrice  $A$  si dice *singolare* se  $\text{Ker } A \neq \{0\}$ , il che è equivalente a  $\text{rg}(A) < n$ .

Data la matrice  $A$ ,  $m \times n$ , si definisce *trasposta di  $A$*  la matrice  $A^T$  le cui righe sono le colonne di  $A$ . Essa è quindi una matrice  $n \times m$ . Per esempio

$$\text{se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ allora } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice trasposta di  $A$  è anche denotata con il simbolo  $A^t$ .

- Se  $A$  è una matrice  $m \times n$  e  $B$  è una matrice  $n \times k$ , allora vale  $(AB)^T = B^T A^T$ , che quindi risulta essere una matrice  $k \times m$ .
- Vale la (importantissima) relazione:  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$ . Si ha quindi che

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Span}\{\text{colonne di } A\} = \dim \text{Span}\{\text{righe di } A\}.$$

Un esempio molto importante di base di  $\mathbb{R}^3$  è l'insieme formato dai vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti,  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  sono linearmente indipendenti ed  $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ .

In generale dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale si può estrarre da essi una base procedendo come segue:

- si costruisce una matrice avente per **colonne** tali vettori (per fissare le idee consideriamo il caso di quattro vettori in  $\mathbb{R}^3$ );
- si utilizzano le operazioni elementari **sulle righe** della matrice fino ad ottenere una forma scala  $S$ ,
- le colonne della matrice di partenza **corrispondenti** alle colonne di  $S$  che contengono i pivot di  $S$  formano una base.
- **Equivalentemente**, si costruisce una matrice avente per **righe** i vettori dati e si utilizzano le operazioni elementari (sempre sulle righe) per ridurre la matrice ad una forma a scala. I vettori riga che contengono i pivot della matrice a scala, rilette come vettori colonna, formano una base.

Possiamo inoltre fare le seguenti considerazioni:

- i vettori  $v_1, \dots, v_k$  di  $\mathbb{R}^n$  sono linearmente indipendenti se e solo se, definendo  $A = [v_1 | \dots | v_k]$  (matrice  $n \times k$ ), il sistema  $Ax = 0$  ha come **unica** soluzione la soluzione nulla  $0$  (e quindi se e solo se la matrice  $A$  è non-singolare, e cioè, ancora, se e solo se  $\text{rg}(A) = k$ );
- in generale, per ottenere l'equazione cartesiana di  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$  basta usare il Teorema di Rouché-Capelli sul sistema  $[A|x]$  e leggere le equazioni dalle condizioni di compatibilità del sistema, inoltre le colonne di  $A$  corrispondenti ai pivot di una forma a scala di  $A$  sono una **base** per  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ;
- avendo definito *sottovarietà lineare affine* l'insieme  $\xi_0 + V = \{\xi_0 + v; v \in V\}$ , dove  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , si ha quindi che
- per ottenere l'equazione cartesiana della sottovarietà lineare affine  $\xi_0 + V$ , dove  $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ , basta operare come nel caso vettoriale sul sistema  $[A|x - \xi_0]$ .
- Si pone  $\dim(\xi_0 + V) = \dim V$ .
- Supponiamo che  $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ . Consideriamo ancora la matrice  $n \times k$ ,  $A = [v_1 | v_2 | \dots | v_k]$ . Si può allora pensare a  $\xi_0 + V$  come l'insieme  $S_b$  delle soluzioni del sistema  $Ax = b$ , dove  $b = A\xi_0$ , cioè  $\xi_0 + V = S_b$ .

È chiaro che in un sottospazio vettoriale possono essere scelte diverse basi. Quindi i vettori appartenenti a tale sottospazio possono essere rappresentati usando diversi sistemi di coordinate. Un'operazione fondamentale è il cambiamento di sistema di coordinate, ossia passare dalle coordinate di un vettore espresse rispetto ad una base a quelle scritte rispetto ad una base diversa (si veda il paragrafo **1.11**).

## 1.6 Determinante per matrici $n \times n$ e proprietà

Il determinante di un numero (matrice  $1 \times 1$ ) è il numero stesso.

Data una matrice  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

il determinante di  $A$  è per definizione il numero

$$\det A = ad - bc.$$

Data una matrice  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

il determinante di  $A$  è definito nel modo seguente

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

dove

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Definendo

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

il **complemento algebrico dell'elemento**  $a_{ij}$ , si ha che la formula sopra si scrive anche

$$\det A = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13}.$$

In generale, nel caso  $n \times n$ , si ha che il determinante di una matrice  $A$  può essere calcolato nel modo seguente (sviluppo di Laplace). Dati  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  sia  $A_{ij}$  la matrice ottenuta dalla matrice  $A$  sopprimendo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna, e sia  $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , il complemento algebrico di  $a_{ij}$ . Fissiamo un numero  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Allora vale il seguente sviluppo del determinante rispetto alla  $k$ -esima riga:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} \det A_{k2} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det A_{kn} = \\ &= a_{k1}\mathcal{A}_{k1} + a_{k2}\mathcal{A}_{k2} + \dots + a_{kn}\mathcal{A}_{kn}. \end{aligned}$$

Vale una formula analoga rispetto alle colonne. Infatti, fissato  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , si ha il seguente sviluppo del determinante rispetto alla  $k$ -esima colonna:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} \det A_{2k} + \dots + (-1)^{k+n} a_{nk} \det A_{nk} = \\ &= a_{1k}\mathcal{A}_{1k} + a_{2k}\mathcal{A}_{2k} + \dots + a_{nk}\mathcal{A}_{nk}. \end{aligned}$$

Il determinante soddisfa le seguenti proprietà:

- $\det I = 1$ ;
- $\det A = \det(A^T)$ ;
- data la matrice  $A$  sia  $B$  la matrice ottenuta scambiando nella matrice  $A$  due colonne (o due righe), allora  $\det B = -\det A$ ; perciò, in particolare, se due colonne (o due righe) di  $A$  sono uguali, allora  $\det A = 0$ ;
- siano  $v_1, v_3, \dots, v_n$  e  $w$  vettori colonna ed  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri reali allora

$$\det [\alpha v_1 + \beta w | v_2 | \dots | v_n] = \alpha \det [v_1 | v_2 | \dots | v_n] + \beta \det [w | v_2 | \dots | v_n],$$

e vale anche sempre che

$$\det [v_1 | \dots | \alpha v_i + \beta v_j | \dots | v_j | \dots | v_n] = \alpha \det [v_1 | \dots | v_i | \dots | v_j | \dots | v_n].$$

La formula precedente si applica anche ad ogni altra coppia di colonne (e continua a valere ragionando sulle righe invece che sulle colonne);

- vale la formula di Binét:  $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$ .

## 1.7 Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa

Una matrice **quadrata**  $A$  si dice *invertibile* se esiste una matrice  $B$  tale che  $AB = BA = I$ . Si ha che *la matrice inversa se esiste è unica*. Si ha inoltre che *una matrice è invertibile se e solo se essa ammette una unica inversa destra*, e che *una matrice è invertibile se e solo se  $\text{rg}(A) = n$* . La matrice inversa (o brevemente *l'inversa*) della matrice  $A$  si denota con il simbolo  $A^{-1}$ . Vale il seguente teorema.

**Teorema.** *La matrice  $A$  è invertibile se e solo se  $\det A \neq 0$ . In particolare si ha che se  $A$  è invertibile, allora  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ .*

Per calcolare l'inversa di una matrice  $A$  si procede come segue:

- si costruisce la matrice  $[A|I]$
- si procede con operazioni elementari sulle righe della matrice  $[A|I]$  fino a che non ci si riduce ad una matrice della forma  $[I|C]$  per una qualche matrice  $C$  (quello che conta è avere nel primo "blocco" la matrice identità!)
- si conclude che  $A^{-1} = C$ .

L'uso del determinante permette anche di dare le seguenti formule per l'inversa di  $A$ .

- Nel caso  $2 \times 2$ , data la matrice  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  con  $\det A \neq 0$ , allora si ha la formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- Nel caso  $n \times n$ , se  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  è la matrice la cui entrata al posto  $ij$  è  $\mathcal{A}_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , si definisce la **matrice aggiunta** di  $A$  tramite la formula

$$\text{Agg}(A) = \mathcal{A}^T,$$

e si ha che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Agg}(A).$$

- In particolare, considerando il sistema  $Ax = b$ ,  $A$  matrice  $n \times n$  *invertibile*, allora la soluzione è univocamente data da  $\xi = A^{-1}b$ . Di più, si ha la *formula di Cramer* per la

$$\text{soluzione } \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

$$\xi_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

dove  $B_i$  è la matrice che si ottiene *sostituendo alla colonna  $i$ -esima di  $A$  il vettore termine noto  $b$* ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 1.8 Prodotto scalare di vettori in $\mathbb{R}^n$ e proiezione di un vettore lungo un altro

Ricordiamo che, dati i vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , si è definito *prodotto scalare* il numero reale

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

È importante notare che  $\langle x, y \rangle = x^T y$  (prodotto del vettore riga  $x^T$  col vettore colonna  $y$ ). Quindi è facile vedere che si ha la seguente formula: *per ogni matrice  $n \times n$ ,  $A$ , si ha*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle.$$

### Proprietà del prodotto scalare:

- simmetria:  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ , per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ;
- bilinearità: 
$$\begin{cases} \langle \alpha v + \beta v', w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v', w \rangle \\ \langle v, \alpha w + \beta w' \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v, w' \rangle \end{cases},$$
 per tutti gli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e tutti i  $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$ ;
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ , per tutti i  $v \in \mathbb{R}^n$ , e  $\langle v, v \rangle = 0$  se e solo se  $v = 0$ .

La **lunghezza** (o **norma**) di un vettore  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  è stata definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Si osservi che per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  ed ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Dati poi due punti  $P_0, P_1$  di  $\mathbb{R}^n$ , si definisce la loro *distanza* (euclidea) tramite

$$\text{dist}(P_0, P_1) := \|P_0 - P_1\|.$$

Si noti che  $\text{dist}(P_0, P_1) = \text{dist}(P_1, P_0)$ .

Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: per ogni coppia di vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

e l'*uguaglianza sussiste* se e solo se  $x$  è multiplo di  $y$ .

### Proprietà della norma:

- $\|x\| \geq 0$  per tutti gli  $x \in \mathbb{R}^n$ , e  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;

- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$  per tutti gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  e tutti gli  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue la **disuguaglianza triangolare**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, poiché dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta quindi essere

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1, \quad \forall x, y \neq 0,$$

si ha che **esiste un unico angolo**  $\alpha \in [0, \pi]$  tale che

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} = \cos \alpha.$$

Tale angolo si chiama *l'angolo (convesso) formato dai vettori  $x$  e  $y$* .

- Si dice che due vettori  $v$  e  $w$  di  $\mathbb{R}^n$  sono *ortogonali* se  $\langle v, w \rangle = 0$ .
- Dato  $v \in \mathbb{R}^n$ , si ha che  $\langle v, w \rangle = 0$  per ogni  $w \in \mathbb{R}^n$  se e solo se  $v = 0$ .
- Dato un sottospazio  $V$  di  $\mathbb{R}^n$ , si definisce il *sottospazio ortogonale di  $V$*  l'insieme

$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n; \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V\}.$$

Si ha che  $V^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ , che  $\dim V^\perp = n - \dim V$ , e che ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  si scrive, in maniera **unica** come  $v = v' + v''$  con  $v' \in V$  e  $v'' \in V^\perp$ .

- Quando  $A = A^T$ , allora  $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A$ . Infatti, se  $v \in \text{Im } A$ , allora  $v = Av'$  per un certo  $v' \in \mathbb{R}^n$ , e quindi per ogni  $w \in \text{Ker } A$  si ha

$$\langle v, w \rangle = \langle Av', w \rangle = \langle v', A^T w \rangle = \langle v', Aw \rangle = 0,$$

poiché  $A = A^T$  e  $Aw = 0$ . Ma allora  $\langle v, w \rangle = 0$  per ogni  $w \in \text{Ker } A$ , da cui  $v \in (\text{Ker } A)^\perp$ . Quindi  $\text{Im } A \subset (\text{Ker } A)^\perp$  ed essendo

$$\dim \text{Im } A = \text{rg}(A) = n - \dim \text{Ker } A = \dim(\text{Ker } A)^\perp,$$

ne segue che  $\text{Im } A = (\text{Ker } A)^\perp$ .

- Dal punto precedente segue che quando  $A = A^T$  ogni vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  si scrive, in maniera **unica** come  $v = v' + v''$  con  $v' \in \text{Ker } A$  e  $v'' \in \text{Im } A = (\text{Ker } A)^\perp$ .

## 1.9 Basi ortonormali, processo di ortonormalizzazione, matrici ortogonali

Una base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  si dice **ortonormale** se valgono le relazioni

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \dots = \|u_n\| = 1, \quad \langle u_j, u_r \rangle = 0 \text{ se } j \neq r.$$

Le basi ortonormali di  $\mathbb{R}^n$  sono di fondamentale importanza, in quanto esse permettono di scrivere facilmente le coordinate di un vettore qualsiasi  $v$  rispetto ad esse. Infatti: *se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  allora ogni vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  può essere scritto in maniera univoca nella forma*

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n.$$

Quindi le **coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\{u_1, \dots, u_n\}$**  sono i numeri  $\langle v, u_1 \rangle, \dots, \langle v, u_n \rangle$ .

- **Osservazione.** I vettori di una famiglia  $\{u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$  ortonormale sono **linearmente indipendenti**.
- Dati i vettori non nulli  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , si definisce *proiezione di  $v$  lungo  $w$*  il vettore

$$\text{pr}_w(v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w.$$

Si noti il seguente fatto importantissimo (perché fondamentale per il processo di ortonormalizzazione): *il vettore  $v - \text{pr}_w(v)$  è ortogonale a  $w$* , cioè

$$\langle v - \text{pr}_w(v), w \rangle = 0.$$

Vale il seguente importante teorema.

**Teorema.** (Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Data la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  è sempre possibile costruire a partire da essa una base ortonormale  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .*

La dimostrazione del teorema è costruttiva. Facciamo vedere la costruzione nei casi  $n = 2, 3$ .

**Caso  $n = 2$ .** Sia  $\{v_1, v_2\}$  una base di  $\mathbb{R}^2$ . Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi  $\|u_1\| = 1$ . Sia poi  $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$ . Allora  $\langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle = 0$ . Per finire basta prendere

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

**Caso  $n = 3$ .** Sia  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base di  $\mathbb{R}^3$ . Si pone

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Quindi  $\|u_1\| = 1$ . Sia poi  $\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$ . Allora  $\langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle = 0$ , e quindi prendiamo

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}.$$

Ora prendiamo  $\tilde{u}_3 := v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1$ , e, per finire, essendo  $\langle \tilde{u}_3, u_1 \rangle = \langle \tilde{u}_3, u_2 \rangle = 0$ ,

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1}{\|v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1\|}.$$

Il caso generale  $n$ -dimensionale procede per induzione esattamente secondo le linee sopra esposte.

**Osservazione.** Una formulazione apparentemente più generale del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt è la seguente:

**Teorema.** *A partire da una base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  del sottospazio vettoriale  $V \subset \mathbb{R}^n$  si può sempre costruire un'altra base di  $V$  che sia ortonormale.*

Data una base ortonormale  $\{u_1, \dots, u_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , costruiamo la matrice  $R$  la cui  $j$ -esima colonna è il vettore  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ :

$$R = [u_1 | u_2 | \dots | u_n].$$

Allora la matrice trasposta di  $R$  si scrive

$$R^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix},$$

le cui righe sono i vettori **riga**  $u_j^T$ . Dalla regola di moltiplicazione righe-per-colonne tra matrici si ha perciò

$$R^T R = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \dots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \dots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \dots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Poiché  $R^T$  è invertibile, essa possiede un'unica inversa destra che quindi è  $R$ , da cui segue  $R^T = R^{-1}$ . Tali matrici, cioè quelle matrici *le cui colonne (equivalentemente le cui righe) formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$*  si dicono **ortogonali**, e sono di fondamentale importanza perché conservano il prodotto scalare tra vettori, e quindi le loro lunghezze, e quindi gli angoli tra i vettori. Infatti se  $R$  è una matrice ortogonale  $n \times n$  allora

$$\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, R^T R w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, prendendo  $v = w$  si ottiene  $\|Rv\| = \|v\|$ , cioè  $Rv$  ha la stessa lunghezza di  $v$ . Allora, indicato con  $\alpha$  l'angolo tra  $Rv$  e  $Rw$  e  $\beta$  l'angolo tra  $v$  e  $w$ , si ha che

$$\cos \alpha = \frac{\langle Rv, Rw \rangle}{\|Rv\| \|Rw\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \cos \beta,$$

da cui segue che  $\alpha = \beta$ , essendo per ipotesi  $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ .

- Dato  $u \in \mathbb{R}^n$ , la funzione  $f_u: \mathbb{R}^n \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}$  determina univocamente  $u$  e, reciprocamente, è determinata univocamente da  $u$ . Ciò si vede facilmente prendendo una base ortonormale  $\{u_1, \dots, u_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  e notando che

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n = f_u(u_1)u_1 + f_u(u_2)u_2 + \dots + f_u(u_n)u_n.$$

### 1.10 Prodotto vettoriale di vettori in $\mathbb{R}^3$ e sua interpretazione geometrica

Dati due vettori  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)^T$  dello spazio  $\mathbb{R}^3$ , il loro *prodotto vettoriale* è il vettore  $v \times w$  determinato dalla funzione, detta *prodotto misto*,

$$f_{v \times w}(u) = \langle u, v \times w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}, \quad \text{ove } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

In altre parole, il vettore  $v \times w$  è determinato dal conoscere tutti i possibili prodotti scalari  $\langle u, v \times w \rangle$ ,  $u$  vettore qualsiasi di  $\mathbb{R}^3$ , i quali, a loro volta, *per definizione* valgono  $\det[u|v|w]$ . Geometricamente, il prodotto misto  $\langle u, v \times w \rangle$  rappresenta il volume (orientato, cioè con segno!) del parallelepipedo avente per spigoli  $u, v$  e  $w$ .

- È quindi chiaro che  $\langle u, v \times w \rangle = 0$  se e solo se  $u, v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.
- In particolare,  $v \times w$  è ortogonale sia a  $v$  che a  $w$ .

Poiché la funzione  $f_{v \times w}$  determina univocamente il vettore  $v \times w$ , ne segue che  $v \times w$  si può anche scrivere come il seguente determinante “formale” (in quanto  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ed  $\mathbf{e}_3$ , vettori ortonormali della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , non sono numeri ma vettori!)

$$v \times w = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix},$$

in altre parole

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, il prodotto vettoriale dei vettori  $v$  e  $w$  rappresenta l’area “orientata” (cioè con segno!) del parallelogramma avente per lati  $v$  e  $w$ .

- È quindi chiaro che  $v \times w = 0$  se e solo se  $v$  e  $w$  sono uno multiplo dell’altro.

Valgono le seguenti proprietà: per ogni  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,

- $v \times v = 0$ ;
- $v \times w = -(w \times v)$ ;
- per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w) = (\lambda v) \times w$ ;
- $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$ ;
- $\|v \times w\| = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2} = \|v\| \|w\| \sin \alpha$ , dove  $\alpha \in [0, \pi]$  è l’angolo tra  $v$  e  $w$ .

### 1.11 Forme quadratiche e diagonalizzazione

Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$ . Il *polinomio caratteristico* di  $A$  è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio caratteristico **ha grado**  $n$ , e le sue radici si chiamano *autovalori* (della matrice  $A$ ). Se  $\lambda_0$  è un autovalore l’insieme  $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$  è l’*autospazio* associato all’autovalore  $\lambda_0$ . Gli elementi di  $\text{Ker}(A - \lambda_0 I)$  sono gli *autovettori* di  $A$  (associati all’autovalore  $\lambda_0$ ).

- Si dice che la *molteplicità algebrica* dell’autovalore  $\lambda_0$  è  $m$  se

$$(\lambda - \lambda_0)^m \text{ divide } p(\lambda), \quad \text{ma } (\lambda - \lambda_0)^{m+1} \text{ non divide } p(\lambda).$$

- Si dice che la *molteplicità geometrica* dell’autovalore  $\lambda_0$  è  $r$  se

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_0 I) = r.$$

- Si ha sempre che

$$\text{molteplicità geometrica}(\lambda_0) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda_0).$$

Si definisce *traccia* della matrice  $A$ , quadrata  $n \times n$ , la somma degli elementi sulla diagonale principale di  $A$ , cioè il numero

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

Data la matrice  $A$  quadrata  $n \times n$ , valgono le seguenti relazioni tra gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  di  $A$ ,  $\text{Tr}(A)$  e  $\det(A)$ :

- $\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ ;
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ ;
- quando  $A$  è  $2 \times 2$  si ha

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Una matrice quadrata  $A$  si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, cioè se  $A = A^T$ . Vale il seguente risultato.

**Teorema.** *Sia  $A$  una matrice simmetrica  $n \times n$ . Allora, gli autovalori di  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ripetuti secondo la rispettiva molteplicità algebrica, sono reali ed autovettori associati ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali. Di più, si può trovare una **base** di  $\mathbb{R}^n$  fatta di autovettori di  $A$ . Tale base, eventualmente tramite un processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, può essere scelta **ortonormale**.*

È importante notare il fatto seguente.

Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$  **qualsiasi** (cioè non necessariamente simmetrica) la quale abbia tutti gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  in  $\mathbb{R}$  ed i cui relativi autovettori formino una **base** di  $\mathbb{R}^n$ . Sia allora  $\Lambda$  la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  di  $A$ , e siano  $v_1, \dots, v_n$  i corrispondenti autovettori (relativi a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , rispettivamente). Definiamo  $S = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ . Allora  $S$  è invertibile perché  $v_1, \dots, v_n$  formano una base di  $\mathbb{R}^n$ . Dall'equazione agli autovalori  $Av_j = \lambda_j v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , segue che (righe-per-colonne)

$$AS = [Av_1 | Av_2 | \dots | Av_n] = [\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \dots | \lambda_n v_n] = S\Lambda,$$

e quindi si ha la relazione

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Una tale matrice si dice allora **diagonalizzabile**. Quindi, il teorema precedente assicura che *tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili*.

Osserviamo anche che quando  $A$  è *simmetrica* e gli autovettori  $v_1, \dots, v_n$  si scelgono in modo da formare una **base ortonormale** di  $\mathbb{R}^n$ , allora la matrice  $S$  associata agli autovettori di  $A$  è **ortogonale**, per cui vale  $S^{-1} = S^T$  e quindi anche la relazione

$$A = SAS^T.$$

Data  $A$ , matrice simmetrica  $n \times n$ , una *forma quadratica*  $Q$  è una funzione che associa ad ogni vettore  $x$  con  $n$  componenti il numero  $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$ . Sappiamo quindi che esiste una matrice ortogonale  $S$  tale che  $A = S\Lambda S^T$ , con

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

e con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  gli autovalori (eventualmente ripetuti) della matrice  $A$ . Allora, se si pone  $y = S^T x$ , nelle “nuove” coordinate  $y$  si ha

$$Q(x) = Q(Sy) = \langle \Lambda y, y \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

## 2 Geometria del piano e dello spazio

### 2.1 Piani nello spazio tridimensionale

Sia  $P_0$  un punto di  $\mathbb{R}^3$  ed  $n$  un vettore di  $\mathbb{R}^3$  diverso da zero. Allora il piano passante per il punto  $P_0$  e perpendicolare al vettore  $n$  è l'insieme

$$\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 : \langle P - P_0, n \rangle = 0\}.$$

- Il vettore  $n$  si chiama (*una*) *direzione normale al piano*  $\pi$ .

Osserviamo che posto  $P = (x, y, z)$ ,  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $n = (n_1, n_2, n_3)^T$  la formula precedente si scrive come

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0) = 0.$$

In generale quindi un piano scritto secondo la *rappresentazione cartesiana* è dato da

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove  $a, b, c, d$  sono numeri assegnati. È allora chiaro che data la precedente rappresentazione cartesiana il vettore  $(a, b, c)^T$  è un vettore normale al piano. Siano dati tre punti  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  tali che i vettori  $P_1 - P_0$  e  $P_2 - P_0$  siano linearmente indipendenti (tali punti si dicono *non allineati*), cioè

$$(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \neq 0.$$

Allora il piano  $\pi$  passante per  $P_0, P_1$  e  $P_2$  è dato dall'equazione

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{bmatrix} = 0,$$

cioè, posto  $P = (x, y, z)$ , la formula precedente può essere riscritta come segue

$$\langle (P - P_0), (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \rangle = 0.$$

Il piano  $\pi$  contenente i punti  $P_0, P_1$  e  $P_2$ , con  $P_1 - P_0$  e  $P_2 - P_0$  *linearmente indipendenti*, ha anche la seguente *rappresentazione parametrica*

$$\pi = \{P_0 + \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- I vettori  $P_1 - P_0$  e  $P_2 - P_0$  si chiamano *direzioni del piano*  $\pi$ .

Dalla rappresentazione parametrica è immediato passare a quella cartesiana infatti basta scegliere, ad esempio,

$$P_0 = P_0 \quad \text{e} \quad n = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$$

Due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  si dicono

- *perpendicolari* se sono ortogonali le loro direzioni normali;
- *paralleli* se le loro direzioni normali sono una multiplo dell'altra.

**Osservazione.** Notiamo quindi che l'equazione cartesiana di una retta di  $\mathbb{R}^3$  rappresenta l'intersezione di due piani distinti e non paralleli.

## 2.2 Rette nello spazio tridimensionale

Sia  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  un vettore (non nullo!) di  $\mathbb{R}^3$  e  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto (fissato). La retta  $r$  passante per  $P_0$  con *direzione*  $v$  è l'insieme

$$r = \{P_0 + tv; t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \\ z_0 + tv_3 \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La precedente è detta rappresentazione della retta  $r$  in *forma parametrica*. Si può passare dalla rappresentazione parametrica alla *rappresentazione cartesiana* ponendo

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

“eliminando” il parametro  $t$  dalle precedenti espressioni ci si riduce ad espressioni della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

dove  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  sono numeri opportuni che dipendono da  $P_0$  e  $v$ . Ci si può porre il problema inverso ossia come passare dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica.

In questo caso sono assegnate le espressioni (in modo che non siano una un multiplo dell'altra!)

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Basta scegliere un punto  $P_0$  tra le soluzioni del precedente sistema (essendo formato da due equazioni in due incognite ammette sicuramente, almeno,  $\infty^1$  soluzioni) e prendere come

direzione  $v$  il prodotto vettoriale  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ .

Siano  $r$  ed  $s$  due rette con direzione  $v_r$  e  $v_s$  rispettivamente. Si dice che

- $r$  è *parallela* ad  $s$  se  $v_r$  è un multiplo di  $v_s$ ;
- $r$  è *perpendicolare* ad  $s$  se  $r$  ed  $s$  si **intersecano** e  $v_r$  è perpendicolare a  $v_s$ , cioè  $r \cap s \neq \emptyset$  e  $\langle v_r, v_s \rangle = 0$ ;
- $r$  ed  $s$  sono *sghembe* se  $v_r$  **non** è un multiplo di  $v_s$  ma  $r \cap s = \emptyset$ .

## 2.3 Distanza punto-retta e punto-piano

Sia  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $r$  una retta assegnata, ad esempio, in forma cartesiana:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Sia  $v$  il vettore

$$v = \frac{(a, b, c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T}{\|(a, b, c)^T \times (a_1, b_1, c_1)^T\|}.$$

Allora la distanza del punto  $P_0$  dalla retta  $r$  è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \|(P_1 - P_0) \times v\|,$$

dove  $P_1$  è un punto della retta  $r$  fissato in modo arbitrario (la distanza del punto  $P_0$  dalla retta  $r$  è indipendente dalla scelta del punto  $P_1$ ).

Sia  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\pi$  un piano assegnato, ad esempio, in forma cartesiana:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Allora la distanza del punto  $P_0$  dal piano  $\pi$  è data dalla formula

$$d(P_0; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osserviamo che se  $P_0 = (x_0, y_0)$  è un punto di  $\mathbb{R}^2$  ed  $r \subset \mathbb{R}^2$  è la retta di equazione cartesiana

$$ax + by + c = 0,$$

allora la distanza del punto  $P_0$  dalla retta  $r$  è data dalla formula

$$d(P_0; r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## 2.4 Coniche, quadriche e forme normali

Per la classificazione delle quadriche si faccia riferimento al Capitolo 6 di [2]. Quella delle coniche segue da quella delle quadriche considerando i casi in cui  $\text{rg}(A)$  è uguale a 2 oppure 1. Basta usare le relative tabelle per la classificazione delle quadriche sostituendo

- *parabola* al posto di cilindro parabolico;
- *ellisse* al posto di cilindro ellittico;
- *iperbole* al posto di cilindro iperbolico;
- *punto* al posto di retta;
- *retta* al posto di piano.

**Testo seguito:**

[1] S.Abeasis, Elementi di algebra lineare e geometria, Zanichelli (Bologna), 2000.

[2] P.Albano-A.Parmeggiani, Elementi Introduttivi di Matematica, 2002.

**Altri testi consigliati:**

[3] M.Bramanti-C.D.Pagani-S.Salsa, Matematica, Zanichelli (Bologna), 2000.