

PROGRAMMA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE II

Corso di Laurea in ARCHITETTURA (Sede di Cesena)
A.A. 2002/2003 (Alberto PARMEGGIANI)

1 Equazioni differenziali

1.1 Problema di Cauchy lineare del II ordine

Teorema: Se $a_0, a_1, f \in C(I; \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, il problema di Cauchy

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f, \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta,$$

ha una ed una sola soluzione $y \in C^2(I; \mathbb{R})$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fissati. Le soluzioni dell'equazione omogenea formano uno spazio vettoriale di dimensione 2, determinato da due soluzioni y_1, y_2 dell'equazione omogenea linearmente indipendenti (cioè il Wronskiano $\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$ in x_0 , e quindi su I , è $\neq 0$). Perciò l'unica soluzione y del problema omogeneo si scrive nella forma $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, dove C_1, C_2 vengono univocamente determinate dalle condizioni iniziali. La soluzione del problema non omogeneo si scrive nella forma $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{\text{part}}(x)$, dove y_{part} è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e C_1, C_2 vengono univocamente determinate dalle condizioni iniziali.

1.1.1 Coefficienti costanti. Caso omogeneo

Con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$,

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

si considera il **polinomio caratteristico** $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$, e le relative soluzioni λ_1, λ_2 dell'equazione caratteristica $p(\lambda) = 0$. **Tutte** le soluzioni sono univocamente date nella forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

dove le costanti C_1, C_2 sono determinate dalle condizioni iniziali e le funzioni, dette *fondamentali*, date dai seguenti casi:

- se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x};$$

- se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 = \lambda_2$, allora

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x};$$

- se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ allora $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, e

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

1.1.2 Coefficienti costanti. Caso non-omogeneo. Metodi per simpatia

Con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$,

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = F(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

tutte le soluzioni sono univocamente date nella forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

dove y_p è una soluzione **particolare** dell'equazione. Una volta determinata la y_p , le costanti C_1, C_2 sono determinate dalle condizioni iniziali. La y_p si determina nel modo seguente:

1) se $F = f$ polinomio di grado d (quindi $d + 1$ coefficienti sono dati) allora

- se $a_0 \neq 0$, $y_p(x) = g(x)$, dove g è un polinomio di grado d da determinarsi usando l'equazione,

- se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$, $y_p(x) = xg(x)$, dove g è un polinomio di grado d da determinarsi usando l'equazione,

- se $a_0 = a_1 = 0$, $y_p(x) = x^2g(x)$, dove g è un polinomio di grado d da determinarsi usando l'equazione;

2) se $F = e^{\mu x} f$, con f polinomio di grado d (quindi sono dati $d + 1$ coefficienti) allora

- se $p(\mu) \neq 0$ si prende $y_p(x) = e^{\mu x} g(x)$, dove g è un polinomio di grado d da determinarsi usando l'equazione,

- se $p(\mu) = 0$, con molteplicità $j = 1$ oppure 2 , si prende $y_p(x) = x^j e^{\mu x} g(x)$, dove g è un polinomio di grado d da determinarsi usando l'equazione;

3) se $F = e^{\gamma x} (k_1 \cos(\delta x) + k_2 \sin(\delta x))$, con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ costanti date, allora

- se $p(\gamma + i\delta) \neq 0$ si prende $y_p(x) = e^{\gamma x} (A \cos(\delta x) + B \sin(\delta x))$, con A, B che si determinano usando l'equazione,

- se $p(\gamma + i\delta) = 0$ si prende $y_p(x) = x e^{\gamma x} (A \cos(\delta x) + B \sin(\delta x))$, con A, B che si determinano usando l'equazione.

2 Richiami sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^n

Il prodotto scalare euclideo $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ di \mathbb{R}^n , la norma euclidea $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ di \mathbb{R}^n , la

disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, principali proprietà della norma euclidea, distanza euclidea di due punti di \mathbb{R}^n . Definizione di norma: una funzione $\mathbf{N}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ con le seguenti proprietà:

- $\mathbf{N}(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{N}(x) = 0 \iff x = 0$;
- $\mathbf{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathbf{N}(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbf{N}(x + y) \leq \mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare).

Distanza associata ad una norma \mathbf{N} : $\text{dist}_{\mathbf{N}}(x, y) = \mathbf{N}(x - y)$. Definizione di norme equivalenti.

La norma $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ e la norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, entrambe *equivalenti* a quella euclidea.

Insiemi limitati: $A \subset \mathbb{R}^n$ è limitato se esiste $M > 0$ tale che se $x \in A$ allora $\|x\| \leq M$.

3 Coordinate polari, sferiche e cilindriche

- Coordinate polari: $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \ni (\rho, \theta) \mapsto \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$
- Coordinate cilindriche: $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \ni (\rho, \theta, t) \mapsto \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases}$
- Coordinate sferiche: $[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \ni (\rho, \theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$

4 Funzioni di più variabili

Continuità di funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (cioè continuità delle singole componenti di $f = (f_1, \dots, f_m)$), e quindi esistenza di ogni singolo limite

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^0, \dots, x_n^0)} f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad 1 \leq j \leq m;$$

Condizione sufficiente per la continuità in un punto di \mathbb{R}^2 : *per verificare la continuità di $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, in un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, è sufficiente verificare che vale*

$$|f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - f(x_0, y_0)| \leq g(\rho), \quad \text{dove } g(\rho) \rightarrow 0, \text{ per } \rho \rightarrow 0+.$$

Proprietà della funzioni continue: *se $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue, allora anche $f + g$, λf , $h \circ f$ sono continue in \mathbb{R}^n .*

Gli aperti di \mathbb{R}^n sono gli insiemi $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ (f funzione continua su \mathbb{R}^n); gli insiemi chiusi di \mathbb{R}^n sono gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq 0\}$ (f funzione continua su \mathbb{R}^n); parte interna di un chiuso, chiusura di un aperto, frontiera di un insieme aperto o chiuso, insiemi limitati, l'intorno circolare di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$ è l'insieme $U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Proprietà topologiche: $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se $\forall x \in A \exists r > 0$ tale che $U_r(x) \subset A$, il complementare di un aperto è un chiuso, il complementare di un chiuso è un aperto, gli insiemi \emptyset e \mathbb{R}^n sono sia aperti che chiusi, l'intersezione e l'unione di un numero finito di aperti (risp. chiusi) dà un aperto (risp. chiuso), le frontiere sono insiemi chiusi. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice di accumulazione per un insieme E se per ogni $r > 0$ si ha $U_r(x) \cap E \neq \emptyset$ (un punto si dice quindi *isolato* quando non è di accumulazione).

Insiemi connessi (per archi): E è connesso per archi se per ogni coppia di punti $P, Q \in E$ esiste una funzione continua $\psi: [0, 1] \rightarrow E$ tale che $\psi(0) = P$ e $\psi(1) = Q$; funzioni continue $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dove E è aperto di \mathbb{R}^n , oppure chiuso di \mathbb{R}^n della forma $\{x; g(x) \geq 0\}$ o $\{x; g(x) = 0\}$: se si ha $\lim_{x \in E, x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in E$ (e cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap E$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$); il teorema di Bolzano-Weierstrass: se E è un insieme connesso (per archi), chiuso e limitato di \mathbb{R}^n e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $f(E) = [\min_{x \in E} f(x), \max_{x \in E} f(x)]$.

Derivate parziali; il vettore gradiente di $f : \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$; derivate direzionali: $D_v f(x_0)$, dove $v \in \mathbb{R}^n$ è una direzione, cioè un vettore di norma 1; differenziabilità di $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto x_0 dell'aperto A ; le funzioni differenziabili sono continue; una funzione le cui derivate parziali sono continue in un aperto A è differenziabile su A ; se f è differenziabile in x_0 allora $D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$; l'equazione del piano tangente al grafico:

$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle$$

(anche scritta come

$$\left\langle \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0), 1 \right), (x_1 - x_{01}, \dots, x_n - x_{0n}, x_{n+1} - f(x_0)) \right\rangle = 0;$$

la matrice Jacobiana (o Jacobiano) di una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in un punto $x \in A$ è una matrice $m \times n$ le cui righe sono date da $\nabla f_j(x)$, con $1 \leq j \leq m$; se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^k$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ sono funzioni differenziabili, allora anche $g \circ f$ lo è e lo Jacobiano della composizione $(g \circ f)(x)$ è il prodotto delle matrici Jacobiane relative, cioè la matrice $m \times n$

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x),$$

in particolare, nel caso $n = m = 1$, si ha la importante formula

$$\frac{d}{dt}(g \circ f)(t_0) = \langle \nabla g(f(t_0)), f'(t_0) \rangle;$$

punti di massimo o minimo locali; condizioni necessarie per i punti di un aperto: se x_0 è un punto di max o min locale per $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, con A aperto di \mathbb{R}^n , allora $\nabla f(x_0) = 0$; matrice Hessiana $H_f(x)$ di una funzione f nel punto x ; il lemma di Schwarz: se le derivate miste $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ e $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ della funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, sono continue su A , allora sono uguali, e quindi, se f ammette tutte le derivate parziali fino al secondo ordine continue, la matrice Hessiana è una matrice simmetrica; formula di Taylor al secondo ordine in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \text{errore} = \\ &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \text{errore}, \end{aligned}$$

dove **errore** $\rightarrow 0$ più velocemente di $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Condizioni sufficienti di max o min locale per una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^2 , continua insieme alle sue derivate parziali fino al secondo ordine: se $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$ è un punto in cui $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, scrivendo $H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, allora:

- se $H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva, cioè se $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$ (equivalentemente: le soluzioni λ_{\pm} dell'equazione $\det \left(H_f(x_0, y_0) - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$ sono entrambe positive), il punto (x_0, y_0) è un minimo locale

- se $H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa, cioè se $a < 0$ e $ac - b^2 > 0$ (equivalentemente: le soluzioni λ_{\pm} sono entrambe negative), il punto (x_0, y_0) è un massimo locale
- se $H_f(x_0, y_0)$ è indefinita, cioè se $ac - b^2 < 0$ (equivalentemente: le soluzioni λ_{\pm} sono una negativa ed una positiva), il punto (x_0, y_0) non è né un massimo locale né un minimo locale e si chiama punto di sella.

Condizioni sufficienti di max o min locale per una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto di \mathbb{R}^3 , continua insieme alle derivate parziali fino al secondo ordine: se $(x_0, y_0, z_0) \in A \subset \mathbb{R}^3$ è un punto in cui $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, denotando con H_k i minori principali di nord-ovest della matrice $H_f(x_0, y_0, z_0)$, allora:

- se $\det H_k > 0$ per ogni $k = 1, 2, 3$, allora il punto (x_0, y_0, z_0) è di minimo locale,
- se $(-1)^k \det H_k > 0$ per ogni $k = 1, 2, 3$, allora il punto (x_0, y_0, z_0) è di massimo locale.

5 Curve

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, una funzione continua $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *curva parametrizzata continua*; la *traiettoria* (o *sostegno*) è l'insieme $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$; la curva γ si dice *chiusa* se (in questo caso $I = [a, b]$) $\gamma(a) = \gamma(b)$; il *vettore velocità* di una curva parametrizzata γ le cui componenti γ_j sono derivabili è il vettore $\dot{\gamma}(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$; la curva si dice *regolare* se il vettore velocità è una funzione continua da I in \mathbb{R}^n e $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ per ogni $t \in I$; una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **sempllice** se per ogni coppia di punti t_1, t_2 di $[a, b]$, con almeno uno dei due appartenente a (a, b) , si ha che $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$; due curve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dicono *equivalenti* se esiste una funzione continua e derivabile, con derivata sempre diversa da zero, $p: I \rightarrow J$ tale che $\psi \circ p = \gamma$; due curve γ e ψ si dicono avere *la stessa orientazione* se esiste p come prima tale che $\psi \circ p = \gamma$ e $p'(t) > 0$ per ogni $t \in I$; la *lunghezza* di una curva regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt;$$

se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) è continua e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma([a, b]) \subset A$ è regolare, si definisce *l'integrale curvilineo* di f lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

l'integrale curvilineo di f lungo γ **non** dipende dal verso di percorrenza di γ ; *baricentro* di una curva regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il punto x^B di \mathbb{R}^n di coordinate

$$x_1^B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x_1 ds, \dots, x_n^B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x_n ds.$$

Una curva piana $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, I intervallo di \mathbb{R} , viene detta *essere in forma polare* se $\gamma(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$, $\theta \in I$. Quando $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è regolare ed in forma polare si ha allora che $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$, e che il suo baricentro è definito dalle coordinate

$$x_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b f(\theta) \cos \theta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta, \quad y_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b f(\theta) \sin \theta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta.$$

Se $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o $n = 3$) è un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ è una curva regolare, si definisce il *lavoro di F lungo γ* l'integrale

$$\mathcal{L}(F; \gamma) := \int_{\gamma} \langle F, d\vec{s} \rangle = \int_a^b \left\langle (F \circ \gamma)(t), \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right\rangle \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

- Se $\gamma^{\text{op}}: [a, b] \rightarrow A$ denota il cammino **opposto** a γ , definito da $\gamma^{\text{op}}(t) := \gamma(a + b - t)$, allora $\mathcal{L}(F; \gamma) = -\mathcal{L}(F; \gamma^{\text{op}})$.
- Se Γ è una spezzata curva in \mathbb{R}^n i cui archi componenti sono sostegno di curve γ_j , $j = 1, \dots, N$, tali che il punto finale di γ_j coincide con il punto iniziale di γ_{j+1} , $j = 1, \dots, N - 1$, allora $\mathcal{L}(F, \Gamma) = \mathcal{L}(F, \gamma_1) + \dots + \mathcal{L}(F, \gamma_N)$.
- Un campo $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo si dice **conservativo** (o **esatto**) se esiste una funzione differenziabile $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, detta *potenziale di F* , tale che $\nabla f(x) = F(x)$ per tutti gli $x \in A$.
- Il teorema (delle forze vive): Se $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo esatto e se $\gamma_j: [a, b] \rightarrow A$, $j = 1, 2$, sono curve regolari con $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, allora $\mathcal{L}(F; \gamma_1) = \mathcal{L}(F; \gamma_2) = f(\gamma_1(b)) - f(\gamma_1(a))$, essendo f un potenziale per F . In particolare se $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ è una curva chiusa, allora $\mathcal{L}(F, \gamma) = 0$.
- Un campo $F = (F_1, F_2, F_3): A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice irrotazionale se $\nabla \times F = 0$ su A , dove

$$\nabla \times F = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial F_3/\partial y - \partial F_2/\partial z \\ \partial F_1/\partial z - \partial F_3/\partial x \\ \partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y \end{bmatrix}.$$

Nel caso di $F = (F_1, F_2): A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la irrotazionalità è individuata dalle equazioni

$$\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y,$$

ottenute pensando ad F come $\tilde{F} = (F_1, F_2, 0): A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{F}(x, y, z) = (F(x, y), 0)$ (cioè come campo indipendente dalla variabile z e giacente sul piano $z = 0$ di \mathbb{R}^3) con $\nabla \times \tilde{F} = 0$.

- Un campo conservativo è **sempre** irrotazionale.
- Definizione di semplice connessione: Un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^3$ si dice **semplicemente connesso** quando ogni curva chiusa continua, con sostegno contenuto in A , può essere deformata in un punto di A in maniera continua e rimanendo dentro A stesso.
- Un campo irrotazionale su un aperto connesso semplicemente connesso è conservativo.

6 Massimi e minimi vincolati $n = 2, 3$

- Si chiama *vincolo regolare di dimensione $n - 1$* un insieme del tipo

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) = 0, \nabla g(x) \neq 0\},$$

dove la funzione g è differenziabile (su un certo insieme aperto);

- si chiama *vincolo regolare di dimensione $n - 2$* un insieme del tipo

$$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) = g_2(x) = 0, \nabla g_1(x) \text{ e } \nabla g_2(x) \text{ linear.indip.}\},$$

dove le funzioni g_1, g_2 sono differenziabili (su un certo insieme aperto).

Massimi e minimi vincolati (ad un vincolo regolare); il teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile con $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o 3), allora:

- se $V_1 \subset A$ è un vincolo regolare di dimensione $n - 1$ e $x_0 \in V_1$ è un punto di massimo o minimo vincolato per f , allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0),$$

- se $V_1 \subset A$ è un vincolo regolare di dimensione $n - 2$ e $x_0 \in V_2$ è un punto di massimo o minimo vincolato per f , allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g_1(x_0) + \mu \nabla g_2(x_0).$$

7 Calcolo delle variazioni

Se P, Q sono punti di \mathbb{R}^n e $\Gamma(P, Q)$ denota l'insieme di tutte le curve continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con vettore velocità $\dot{\gamma}$ continuo (cioè di classe $C^1[a, b]$) di estremi in P e Q , si definisce **Lagrangiana** una funzione (continua) $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L: (x, y) \mapsto L(x, y)$, ed *integrale d'azione* l'integrale, funzione di $\gamma \in \Gamma(P, Q)$,

$$A(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

(L'integrale $A(\gamma)$ è anche chiamato *funzionale*, perché definito sulle funzioni γ .)

- Una *variazione* di γ in $\Gamma(P, Q)$ è una curva $\gamma + \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\gamma + \psi)(t) = \gamma(t) + \psi(t)$, essendo $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva $C^1[a, b]$ tale che $\psi(a) = \psi(b) = 0$.
- La *variazione* (o *differenziale*) di A in γ lungo ψ è l'integrale

$$\delta A(\gamma)\psi = \int_a^b \left\langle \nabla_x L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_y L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right), \psi(t) \right\rangle dt,$$

dove $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è C^1 e $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Poiché se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua tale che $\int_a^b \langle f(t), \psi(t) \rangle dt = 0$ per ogni funzione continua $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\psi(a) = \psi(b) = 0$, allora è $f(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$, si hanno quindi le *equazioni di Eulero-Lagrange* per la variazione dell'integrale d'azione

$$\begin{cases} \delta A(\gamma)\psi = 0 \\ \forall \psi \text{ come sopra} \end{cases} \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x_j}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Esempio. Le equazioni di Newton. Sia $[0, T] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ un punto materiale di massa m che si muove sotto l'azione di una forza F dipendente dalla posizione x la quale ammetta potenziale f (cioè $f' = F$). Chiamiamo *energia potenziale V di F* la funzione

–*f.* Si considera la Lagrangiana $L(x, y) = \frac{m}{2}y^2 - V(x)$. Sul moto $x(t)$ la $L(x, \dot{x})$ descrive la differenza di bilancio energetico tra l'energia cinetica e quella potenziale del punto materiale considerato. L'integrale d'azione è quindi $A(x) = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right) dt$, il quale ha variazione in x lungo ψ della forma $\delta A(x)\psi = \int_0^T \left(-m\ddot{x}(t) - V'(x(t)) \right) \psi(t) dt$. L'azione è pertanto stazionaria su $t \mapsto x(t)$ quando vale l'equazione di Eulero-Lagrange, la quale è in questo caso $m\ddot{x}(t) = F(x(t))$, e cioè la fondamentale equazione di Newton.

8 Integrale multiplo in \mathbb{R}^n

8.1 Domini semplici ed integrale in \mathbb{R}^2

- Domini x -semplici di \mathbb{R}^2 : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ ($h_1, h_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue);
- Domini y -semplici di \mathbb{R}^2 : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ($g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue);
- Area di un dominio x -semplice, risp. y -semplice, D :

$$\text{Area}(D) = \int_D dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right) dy,$$

risp.

$$\text{Area}(D) = \int_D dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx;$$

- Integrale su un dominio x -semplice, risp. y -semplice, di una funzione continua $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_D f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

risp.

$$\int_D f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Se il dominio D è sia x -semplice che y -semplice allora

$$\text{Area}(D) = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx,$$

e

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

8.2 Domini semplici e volume in \mathbb{R}^3

- Domini z -semplici di \mathbb{R}^3 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D_3, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$ (D_3 dominio x o y semplice in $\mathbb{R}_{x,y}^2$ e $\gamma_1, \gamma_2: D_3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue);
- Volume di un dominio z -semplice D :

$$\text{Volume}(D) = \int_D dx dy dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(x,y) \in D_3} \left(\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} dz \right) dx dy.$$

8.3 Integrali su domini più generali

Si usano le notazioni $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ($n = 2$ oppure 3) e se $D \subset \mathbb{R}^n$ allora

$$\int_D f(x) dx = \overbrace{\int \int \dots \int}_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

- I domini regolari limitati sono unioni finite di domini semplici, $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$, che hanno a due a due al più i bordi in comune;
- La misura (area/volume) di un dominio regolare limitato $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$ è definita da

$$\text{misura}(D) = \text{misura}\left(\bigcup_{j=1}^N D_j\right) = \sum_{j=1}^N \text{misura}(D_j),$$

la misura non dipende dalla decomposizione di D in domini semplici;

- L'integrale di una funzione continua $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^N \int_{D_j} f(x, y) dx dy,$$

l'integrale non dipende dalla decomposizione di D in domini semplici;

- **Teorema** (Formula del cambiamento di variabili in $n = 2, 3$ dimensioni): Se D ed E sono domini regolari limitati di \mathbb{R}^n , $\Psi: D \rightarrow \Psi(D) = E \subset \mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \Psi(t) = (x_1, \dots, x_n)$ (cioè una funzione iniettiva, con derivate parziali continue), e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_E f(x) dx = \int_D (f \circ \Psi)(t) |\det J_\Psi(t)| dt,$$

dove $J_\Psi(t)$ è la matrice Jacobiana associata a Ψ . In particolare, quando $n = 2$ si ha, con $(t, s) \mapsto \Psi(t, s) = (x, y)$,

$$J_\Psi(t, s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(t, s) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(t, s) \end{bmatrix},$$

e quindi

$$dx dy = |\det J_\Psi(t, s)| dt ds = \left| \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) \frac{\partial y}{\partial s}(t, s) - \frac{\partial x}{\partial s}(t, s) \frac{\partial y}{\partial t}(t, s) \right| dt ds.$$

- Il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana delle coordinate polari è ρ . Perciò $dxdy = \rho d\rho d\theta$.
- Il teorema si applica anche in caso di calcolo di volumi in 3 dimensioni.
- Il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana delle coordinate sferiche è $\rho^2 \sin \varphi$. Perciò $dxdydz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$.
- Il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana delle coordinate cilindriche è ρ . Perciò $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$.

8.4 Volume di Solidi di Rotazione in \mathbb{R}^3

Il teorema del cambiamento di variabili (uso delle coordinate cilindriche) permette di calcolare il volume di solidi ottenuti facendo ruotare un dominio regolare limitato di \mathbb{R}^2 attorno all'asse z . Più precisamente, se $D \subset [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ è un dominio regolare limitato nelle coordinate (ρ, z) , il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse z di un angolo $\theta_0 \in (0, 2\pi]$ è il dominio di \mathbb{R}^3 descritto da

$$D_{\text{rot}} = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3; \theta \in [0, \theta_0], (\rho, z) \in D\},$$

da cui segue che, ricordando che $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$ nel cambiamento in coordinate cilindriche,

$$\text{Volume}(D_{\text{rot}}) = \int_{(\rho, z) \in D} \left(\int_0^{\theta_0} d\theta \right) \rho d\rho dz = \theta_0 \int_{(\rho, z) \in D} \rho d\rho dz.$$

8.5 Integrali su domini regolari illimitati

- I **domini regolari illimitati** sono insiemi **illimitati** che si possono scrivere come **unione al più numerabile di domini semplici**, $D = D_1 \cup \dots \cup D_N \cup \dots$, che hanno *a due a due al più i bordi in comune*;
- La *misura* (area/volume) di un dominio regolare illimitato $D = D_1 \cup \dots \cup D_N \cup \dots$ è definita da

$$\text{misura}(D) = \text{misura}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} D_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \text{misura}(D_j) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \text{misura}(D \cap \{x; N(x) \leq R\}),$$

la misura non dipende dalla decomposizione di D in domini semplici, né dalla norma $N(\cdot)$;

- L'integrale su domini regolari illimitati di funzioni continue e **non-negative** è definito da

$$\int_D f(x) dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{D_j} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D \cap \{x; N(x) \leq R\}} f(x) dx,$$

l'integrale non dipende dalla decomposizione di D in domini semplici, né dalla norma $N(\cdot)$;

- Il teorema del cambiamento di variabile si applica anche nel caso di domini regolari illimitati quando la funzione è continua e **non-negativa**;

- Gli integrali di funzioni **non-negative**, continue (anche non-limitate) su insiemi del tipo $D \setminus E$, dove D ed E sono *domini regolari*, sono definiti da

$$\int_{D \setminus E} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D \cap \{x; \text{dist}_{\mathbb{N}}(x, E) \geq \varepsilon\}} f(x) dx,$$

dove $\text{dist}_{\mathbb{N}}(x, E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in E} \text{dist}_{\mathbb{N}}(x, y)$ (tale integrale non dipende dalla decomposizione di D ed E in domini semplici, né dalla norma $\mathbb{N}(\cdot)$);

- Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (uguale a $\sqrt{\pi}$).

Testo consigliato: M.Bramanti-C.D.Pagani-S.Salsa, *Matematica*, Zanichelli (Bologna), 2000.