

# PROGRAMMA (E NOTE) DI MATEMATICA APPLICATA (ALL'ARCHITETTURA)

Corso di Laurea in ARCHITETTURA  
A.A. 2009/2010 (Alberto PARMEGGIANI)

## Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di Algebra Lineare</b>	<b>1</b>
1.1	Classificazione delle coniche a centro di $\mathbb{R}^2$ . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Geometria delle curve di <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>2</b>
2.1	Curve parametrizzate ad arco . . . . .	2
2.2	Formule per le curve non necessariamente parametrizzate ad arco . . . . .	4
2.3	Curve Bézier . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Geometria delle superfici di <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>5</b>
3.1	La prima forma fondamentale . . . . .	7
3.2	Curvatura normale e curvatura geodetica di una curva di $S$ . . . . .	8
3.3	La seconda forma fondamentale . . . . .	10
3.4	Curvatura di Gauss e Curvatura Media . . . . .	12
3.5	Teoremi importanti . . . . .	13
3.6	Superfici di rotazione . . . . .	14
3.7	Superfici rigate . . . . .	15
3.8	Superfici sviluppabili . . . . .	17
3.9	Parametrizzazioni di alcune superfici notevoli . . . . .	18

**Avvertenza:** Tutte le funzioni qui considerate sono *sufficientemente differenziabili*, cioè esse sono continue insieme alle loro derivate (ordinarie o parziali) fino ad un ordine sufficiente a giustificare rigorosamente tutte le definizioni e le formule date nel seguito (tale ordine di derivazione sarà sempre almeno 3).

## 1 Richiami di Algebra Lineare

Si veda anche il programma relativo al Corso di Istituzioni di Matematiche I, a.a. 2002/2003, nella pagina web <http://www.dm.unibo.it/~parmeggi>.

## 1.1 Classificazione delle coniche a centro di $\mathbb{R}^2$

Data la forma quadratica  $Q(x_1, x_2) := \langle A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rangle + c$ , dove  $A \neq 0$  è una matrice simmetrica e  $c \in \mathbb{R}$ , la *conica a centro* di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $Q(x_1, x_2) = 0$  è un insieme del tipo

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; Q(x_1, x_2) = 0\}.$$

La classificazione euclidea di  $C$  dice che *si può sempre trovare una rotazione degli assi  $R$  tale che nelle nuove coordinate  $(y_1, y_2)$ , legate alle  $(x_1, x_2)$  tramite la relazione  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$*

*${}^tR \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , l'insieme  $C$  è descritto da*

$$C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0\},$$

dove  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  sono gli autovalori di  $A$ . Si hanno le seguenti possibilità:

- Se  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  e  $c < 0$ , oppure se  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$  e  $c > 0$ , allora  $C$  è **un'ellisse**;
- Se  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  e  $c > 0$ , oppure se  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$  e  $c < 0$ , allora  $C = \emptyset$ ;
- Se  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$  e  $c = 0$ , oppure se  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$  e  $c = 0$ , allora  $C = \{(0, 0)\}$ ;
- Se  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$  e  $c < 0$ , oppure se  $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$  e  $c > 0$ , allora  $C$  è **l'unione di una coppia di rette parallele**;
- Se  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$  e  $c = 0$ , allora  $C$  è **l'asse  $y_1$** ;
- Se  $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$  e  $c = 0$ , allora  $C$  è **l'asse  $y_2$** ;
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno segno discorde e  $c \neq 0$ , allora  $C$  è **un'iperbole**;
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno segno discorde e  $c = 0$ , allora  $C$  è **l'unione di una coppia di rette che si intersecano nell'origine**.

## 2 Geometria delle curve di $\mathbb{R}^3$

Le curve sono funzioni sufficientemente differenziabili  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $I$  è un intervallo. Una curva si dice *semplice* quando  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  per ogni scelta di  $t_1, t_2 \in I$  con almeno uno tra  $t_1$  e  $t_2$  interno ad  $I$ . Una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice *chiusa* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . La *velocità* di una curva è il vettore  $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'$ . Una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice *regolare* quando  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . Due curve  $\gamma_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, 2$ , si dicono **equivalenti** quando esiste un cambiamento di parametro  $p: I_1 \ni t \mapsto p(t) = \tilde{t} \in I_2$ , continuo con derivata continua sempre  $\neq 0$  su  $I_1$ , tale che  $\gamma_1(t) = (\gamma_2 \circ p)(t)$ ; in particolare si ha che  $\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$ . *Ascissa curvilinea*

(detta anche *lunghezza d'arco*): essa è data dalla relazione  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ . Data la

curva  $\psi: s \mapsto \psi(s)$ ,  $s$  ascissa curvilinea, si denoterà sempre con  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{ds}$  la sua velocità.

Ogni curva regolare  $\gamma$  è sempre equivalente ad una curva  $\psi$  parametrizzata ad arco (cioè parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea); infatti la curva  $\psi: s \mapsto \psi(s) = \gamma(t(s))$ , dove  $t(s)$  è la funzione **inversa** della funzione  $t \mapsto s(t)$ , è parametrizzata ad arco ed è equivalente a  $\gamma$ .

## 2.1 Curve parametrizzate ad arco

Sia  $\gamma: I \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$  parametrizzata ad arco e biregolare (cioè  $\ddot{\gamma} \neq 0$  su tutto  $I$ ).

- **Triedro fondamentale di Frénet nel punto  $\gamma(s_0)$ :**

$$T(s_0) = \dot{\gamma}(s_0), \quad N(s_0) = \frac{\dot{T}(s_0)}{\|\dot{T}(s_0)\|}, \quad B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0).$$

- **Curvatura  $k(s_0)$  e Torsione  $\tau(s_0)$  nel punto  $\gamma(s_0)$ :**

$$k(s) = \|\dot{T}(s)\|, \quad \tau(s) = \langle \dot{B}(s), N(s) \rangle.$$

- Formule di Frénet:

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = & k(s)N(s) \\ \dot{N}(s) = & -k(s)T(s) & -\tau(s)B(s) \\ \dot{B}(s) = & \tau(s)N(s). \end{cases}$$

- Equazioni cartesiane del piano **rettificante** della curva (cioè il piano delle direzioni  $\{T, B\}$ ) nel punto  $\gamma(s_0)$ :

$$\left\langle N(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **normale** della curva (cioè il piano delle direzioni  $\{N, B\}$ ) nel punto  $\gamma(s_0)$ :

$$\left\langle T(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **osculatore** della curva (cioè il piano delle direzioni  $\{T, N\}$ ) nel punto  $\gamma(s_0)$ :

$$\left\langle B(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazione parametrica della circonferenza **osculatrice**  $C(\gamma; s_0)$  della curva nel punto  $\gamma(s_0)$ :

$$C(\gamma; s_0) = \left\{ \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}((\cos \theta)T(s_0) + (\sin \theta)N(s_0)); \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

- **Osservazione.** Se  $k(s) = 0$ , per tutti gli  $s \in I$ , allora  $\gamma$  è un segmento di retta.
- Se  $k(s)$  è una costante  $\neq 0$  (quindi  $> 0$ ) e  $\tau(s) = 0$  per tutti gli  $s \in I$  allora  $\gamma$  è un arco di circonferenza.

- Se  $k(s_0), \tau(s_0) \neq 0$ , la **sfera osculatrice** della curva nel punto  $\gamma(s_0)$  è la sfera il cui centro  $c(s_0)$  e raggio  $r(s_0)$  sono rispettivamente

$$c(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0)k(s_0)^2}B(s_0), \quad r(s_0) = \frac{1}{k(s_0)^2} + \left( \frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0)k(s_0)^2} \right)^2.$$

- Se  $k(s), \tau(s) \neq 0$  per tutti gli  $s \in I$ , allora la curva  $\gamma$  è contenuta in una sfera (e quindi nella sua sfera osculatrice) se e solo se vale la relazione

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{k}(s)}{\tau(s)k(s)^2} \right), \quad \forall s \in I.$$

- Fissato  $s_0 \in I$ , ed interno ad  $I$ , la formula di Taylor per  $s$  vicino ad  $s_0$  dà

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \dot{\gamma}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\gamma}{ds^3}(s_0)(s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3).$$

Usando le equazioni di Frénet in  $\gamma(s_0)$  si ottiene allora che le curve proiezioni della curva  $s \mapsto \gamma(s)$  sui piani rettificante, osculatore e normale in  $\gamma(s_0)$  sono date, per  $s$  vicino ad  $s_0$ , rispettivamente dalle curve

- **sul piano rettificante**  $(T, B)$ :

$$s \mapsto \left( \langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)(s - s_0)^3 \right);$$

- **sul piano osculatore**  $(T, N)$ :

$$s \mapsto \left( \langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2}k(s_0)(s - s_0)^2 \right);$$

- **sul piano normale**  $(N, B)$ :

$$s \mapsto \left( \langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2}k(s_0)(s - s_0)^2, \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)(s - s_0)^3 \right).$$

- **Il Teorema di Frénet:** Dato  $s \in I$ , intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , e date le funzioni sufficientemente differenziabili  $k: I \ni s \mapsto k(s) \in (0, +\infty)$  e  $\tau: I \ni s \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}$ , esiste  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , curva regolare, per la quale  $s$  è il parametro d'arco,  $k$  è la curvatura e  $\tau$  è la torsione. Tale curva è **unica** a meno di **rototraslazioni** dello spazio  $\mathbb{R}^3$  in sè.

## 2.2 Formule per le curve non necessariamente parametrizzate ad arco

Le formule per il triedro fondamentale, la curvatura e la torsione in un punto  $\gamma(t_0)$  per curve per le quali  $t$  non è la lunghezza d'arco sono (ponendo  $s_0 = s(t_0)$ )

$$T(s_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \quad B(s_0) = \frac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}, \quad N(s_0) = B(s_0) \times T(s_0),$$

$$k(s_0) = \tilde{k}(t_0) = \frac{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3},$$

$$\tau(s_0) = \tilde{\tau}(t_0) = \frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma''(t_0) \times \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2} = -\frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2}.$$

## 2.3 Curve Bézier

- Poligono di *controllo*: è un insieme  $\{P_0, \dots, P_n\}$  di  $n + 1$  punti (distinti) di  $\mathbb{R}^3$ ;
- algoritmo di costruzione delle curve Bézier: dato il poligono di controllo  $\{P_0, \dots, P_n\}$  e dato  $t_0 \in [0, 1]$ , il punto  $\gamma(t_0)$  della curva Bézier viene costruito nel modo seguente

[Passo 1] per  $k = 0, \dots, n$  si pone  $P_k^{(0)}(t_0) = P_k$  (punti di prima generazione)

[Passo 2] per  $j = 1, \dots, n$  si costruisce ricorsivamente la generazione  $j$ -esima a partire dalla generazione  $j - 1$ -esima tramite la formula

$$P_k^{(j)}(t_0) = (1 - t_0)P_{k-1}^{(j-1)}(t_0) + t_0P_k^{(j-1)}(t_0), \quad k = j, \dots, n$$

[Passo 3] si pone  $\gamma(t_0) = P_n^{(n)}$ .

Facendo variare  $t_0$  in  $[0, 1]$  si ottiene l'intera curva  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  associata al poligono di controllo dato;

- forma analitica delle curve Bézier: *dato il poligono di controllo  $\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^3$ , la curva Bézier  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  ad esso associata è data da*

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^n P_k \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k};$$

- la curva Bézier associata al poligono di controllo  $\{P_0, \dots, P_n\}$  è *contenuta nell'involuppo convesso di tale poligono*;
- poiché

$$\gamma'(t) = \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} \left( kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1} \right) =,$$

si ha in particolare che

$$\gamma'(0) = n(P_1 - P_0), \quad \text{e} \quad \gamma'(1) = n(P_n - P_{n-1}),$$

cioè  $\gamma'(0)$  è tangente al primo lato del poligono di controllo e  $\gamma'(1)$  tangente all'ultimo lato del poligono di controllo;

- formule per le derivate successive in termini del poligono di riferimento: avendo definito le funzioni (“miscelatrici” di Bernstein)  $\theta_{k,m}: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}_+$  con  $k \leq m$ , tramite la formula

$$\theta_{k,m}(t) := \frac{m!}{k!(m-k)!} t^k (1-t)^{m-k},$$

si ha

$$\gamma^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n-j} Q_{j,k} \theta_{k,n-j}(t)$$

(quindi  $\gamma^{(j)}(t) = 0$  per tutti i  $j \geq n + 1$ ), dove

$$\begin{cases} Q_{0,k} = P_k, \\ Q_{j,k} = (n-j+1) \left( Q_{j-1,k+1} - Q_{j-1,k} \right), \quad 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

### 3 Geometria delle superfici di $\mathbb{R}^3$

Nel seguito  $D$  è un sottoinsieme aperto e connesso (un dominio) di  $\mathbb{R}^2$  che possiamo pensare essere o un rettangolo aperto della forma  $(a, b) \times (c, d)$  oppure un cerchio della forma  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2\}$ . Con  $\overline{D}$  si denoterà la **chiusura** (topologica) di  $D$ . Quindi  $\overline{D} = [a, b] \times [c, d]$  nel primo caso,  $\overline{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq r^2\}$  nel secondo. Quando  $D = \mathbb{R}^2$  allora  $\overline{D} = \mathbb{R}^2$ , e quando  $D = (0, +\infty) \times (a, b)$  allora  $\overline{D} = [0, +\infty) \times [a, b]$ .

- Una *superficie regolare* dello spazio è un insieme  $S \subset \mathbb{R}^3$  per il quale esiste una funzione sufficientemente differenziabile, chiamata (una) **parametrizzazione** di  $S$ ,  $\varphi: D \ni (u, v) \mapsto \varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ , tale che

- $\varphi$  è **iniettiva** su  $D$ , cioè  $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$  implica  $u_1 = u_2$  e  $v_1 = v_2$ ;
- vale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D$$

(questa condizione assicura che i vettori  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$  siano **linearmente indipendenti** per ogni  $(u, v) \in D$ );

- vale  $\varphi(D) = S$ .
- Due superfici regolari  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizzate da  $\varphi_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, 2$ , rispettivamente, si dicono essere **equivalenti** se esiste una funzione sufficientemente differenziabile ed invertibile con inversa sufficientemente differenziabile (cioè un *diffeomorfismo*), chiamato **cambiamento di parametri**,  $f: D_1 \ni (u, v) \mapsto f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v)) = (u', v') \in D_2$ , tale che  $\varphi_1(u, v) = (\varphi_2 \circ f)(u, v)$ . Si ha in particolare che  $S_1 = S_2$ .
- Si dice inoltre che una funzione sufficientemente differenziabile  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una *superficie parametrizzata* (in particolare non si richiede che  $\varphi$  sia iniettiva). I punti  $p = \varphi(u, v)$  di  $S = \varphi(D)$  nei quali  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0$  si dicono *punti regolari* di  $S$ , si dicono *punti singolari* altrimenti.
- **Osservazione.** Assumeremo tacitamente nel seguito che le parametrizzazioni considerate possano essere estese su tutto  $\overline{D}$  come funzioni continue, insieme a tutte le loro derivate parziali di ordine sufficientemente grande.

Data la superficie regolare  $S$  e dato il punto  $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$ ,

- il **piano tangente (la superficie  $S$ ) in  $p$**  è il sottospazio vettoriale bidimensionale di  $\mathbb{R}^3$  (passante quindi per l'origine) definito da

$$T_p S = \left\{ w = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\};$$

- il **piano tangente affine in  $p$**  è il piano passante per  $p$  e **parallelo** a  $T_p S$ , e cioè

$$p + T_p S = \{\varphi(u_0, v_0) + w; w \in T_p S\}.$$

- Si ha quindi che il piano tangente affine  $p + T_p S$  in  $p = \varphi(u_0, v_0)$  ha equazione cartesiana

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \varphi(u_0, v_0) \right\rangle = 0.$$

Data la superficie regolare  $S$ ,

- **definiamo** il *campo vettoriale normale* ad  $S$  essere il campo vettoriale

$$\nu_\varphi: (u, v) \mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}, \quad (u, v) \in D$$

(si noti che l'altra scelta possibile è  $\nu_\varphi = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$ );

- se  $\varphi_j: D_j \rightarrow S$  sono due possibili parametrizzazioni di  $S$  (con  $f: (u, v) \mapsto (u', v')$  cambiamento di parametri) allora, indicati con  $\nu_{\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2$ , i rispettivi campi normali, si ha la seguente legge di trasformazione

$$\nu_{\varphi_1}(u, v) = \frac{\det J_f(u, v)}{|\det J_f(u, v)|} \nu_{\varphi_2}(u', v'), \quad (u', v') = f(u, v),$$

dove  $\det J_f$  è il determinante della matrice jacobiana di  $f$ ,  $J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}$ ;

- se si considerano quindi solo i cambiamenti di parametri  $f$  che abbiano  $\det J_f > 0$  si può definire la funzione

$$\nu: S \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \nu(p) = \nu_\varphi(u, v),$$

dove  $p = \varphi(u, v)$  e  $\mathbb{S}^2$  è la sfera di centro l'origine e raggio 1 di  $\mathbb{R}^3$ . Tale funzione è chiamata **mappa di Gauss**.

- Una superficie regolare  $S$  la cui mappa di Gauss  $\nu$  risulta essere **continua su tutta**  $S$  si dice *superficie orientabile*. (Il nastro di Möbius non è orientabile.)

Dato il punto  $p = \varphi(u_0, v_0)$  della superficie regolare  $S$ , l'applicazione

$$i_{\varphi,p}: T_p S \ni w = w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \mapsto \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ciò vuol dire che  $i_{\varphi,p}$  è lineare, cioè  $i_{\varphi,p}(\alpha w + \beta w') = \alpha i_{\varphi,p}(w) + \beta i_{\varphi,p}(w')$  per ogni  $w, w' \in T_p S$  e per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e che  $i_{\varphi,p}$  è invertibile con inversa anch'essa lineare. Identificheremo quindi il vettore  $w \in T_p S$  con il vettore  $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Nel seguito  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$  indicherà il prodotto scalare (euclideo) di  $\mathbb{R}^2$  mentre quello di  $\mathbb{R}^3$  rimarrà indicato con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### 3.1 La prima forma fondamentale

Sia data la superficie regolare  $S$  e sia dato il punto  $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$ , e siano

$$w = w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad w' = w'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

due vettori di  $T_p S$ . Quindi

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

- Si definiscono le funzioni di  $(u, v)$

$$E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2, \quad G = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle.$$

- La *prima forma fondamentale di  $S$  in  $p$*  è la **forma quadratica**  $l_p(w, w)$ ,  $w \in T_p S$ , dove  $l_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  è la mappa bilineare (cioè simmetrica e lineare nel primo e nel secondo argomento) definita da

$$l_p(w, w') = \langle w, w' \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_p S,$$

dove

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

(La matrice che definisce  $l_p$  è quella indotta dall'isomorfismo  $i_{\varphi, p}$ ).

- Dalla relazione  $\|w \times w'\|^2 = \|w\|^2 \|w'\|^2 - \langle w, w' \rangle^2$ , si ottiene

$$EG - F^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

(per ipotesi).

- $l_p$  è **definita positiva**, cioè  $l_p(w, w) \geq 0$  per ogni  $w \in T_p S$  e  $l_p(w, w) = 0$  se e solo se  $w = 0$ ; ciò equivale a dire che per la relativa matrice si ha  $EG - F^2 > 0$  (essendo  $E > 0$  per costruzione).
- Quindi  $l_p$  è un prodotto scalare su ogni  $T_p S$ , chiamato anche *prodotto scalare intrinseco di  $S$  in  $p$*  o *metrica Riemanniana di  $S$  in  $p$* . Si può perciò definire  $\sqrt{l_p(w, w)}$  essere la lunghezza **intrinseca** del vettore tangente  $w \in T_p S$ .
- Se  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ , sono parametrizzazioni equivalenti di  $S$ , cioè  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ , con  $f$  cambiamento di parametri, allora

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1} & F_{\varphi_1} \\ F_{\varphi_1} & G_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^t J_f \begin{bmatrix} E_{\varphi_2} & F_{\varphi_2} \\ F_{\varphi_2} & G_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$

In particolare, con  $p = \varphi_1(u_0, v_0) = \varphi_2(u'_0, v'_0)$ , la  $l_p$  **non dipende dalla parametrizzazione scelta**  $\varphi_j$ .

- Se  $T = \varphi(K) \subset S$ ,  $K$  un sottoinsieme chiuso e limitato di  $D$ , allora si definisce *area della porzione  $T$  di superficie* l'integrale

$$\text{Area}(T) = \iint_K \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

L'area **non dipende** dalla parametrizzazione scelta.



### 3.2 Curvatura normale e curvatura geodetica di una curva di $S$

Sia  $S$  una superficie regolare. Una curva regolare  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **contenuta** in  $S$  (oppure è **su**  $S$ ) se  $\gamma(I) \subset S$ . Scriveremo  $\varphi: I \rightarrow S$ . In questo caso si può vedere che, almeno vicino ad ogni  $t_0$  arbitrariamente fissato nella parte interna di  $I$ ,  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , dove  $t \mapsto (u(t), v(t))$  è una curva regolare (piana) contenuta in  $D$ . Si ha che  $\gamma$  è parametrizzata ad arco se e solo se  $\|\gamma'\| = 1$ , e poiché  $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$  ciò equivale a dire  $l_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1$ .

Sia  $\gamma: I \rightarrow S$  **parametrizzata ad arco**.

- Si definisce *vettore normale intrinseco* di  $\gamma$  in  $S$  nel punto  $\gamma(s)$  il vettore

$$N_S(s) = \nu(\gamma(s)) \times T(s).$$

- Si definisce *curvatura geodetica* di  $\gamma$  in  $\gamma(s)$

$$k_g(s) = \langle \ddot{\gamma}(s), N_S(s) \rangle = \det[\ddot{\gamma}(s) | \nu(\gamma(s)) | T(s)].$$

- Si definisce *curvatura normale* di  $\gamma$  in  $\gamma(s)$

$$k_n(s) = \langle \ddot{\gamma}(s), \nu(\gamma(s)) \rangle.$$

- Siccome  $\dot{\gamma}(s) = T(s)$  e quindi  $\ddot{\gamma}(s) = \dot{T}(s) = k(s)N(s)$ , essendo i vettori  $T(s)$  e  $N_S(s)$  una base ortonormale di  $T_{\gamma(s)}S$ , si ottiene la relazione

$$k(s)N(s) = k_g(s)N_S(s) + k_n(s)\nu(\gamma(s)),$$

da cui

$$k(s) = \sqrt{k_n(s)^2 + k_g(s)^2}.$$

In particolare si ha anche che

$$k_n(s) = k(s) \cos(\text{angolo}(N(s), \nu(\gamma(s)))).$$

- Poiché ogni curva regolare  $\gamma: I \rightarrow S$  può essere riparametrizzata ad arco, la curvatura geodetica di una curva regolare qualsiasi (cioè non necessariamente parametrizzata ad arco), è la curvatura geodetica della curva equivalente a  $\gamma$  parametrizzata ad arco. In particolare si ha, per la curvatura geodetica in ogni punto  $\gamma(t)$ , la formula

$$k_g = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \times \gamma'(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det[\gamma''(t) | \nu(\gamma(t)) | \gamma'(t)].$$

La formula si verifica facilmente nella maniera seguente. Ricordando che

$$v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3, \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3,$$

che

$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad N_S = \nu \times \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}, \quad k = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3},$$

e quindi che

$$N = B \times T = \frac{-1}{\|\gamma'\| \|\gamma' \times \gamma''\|} \left( \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma' - \|\gamma'\|^2 \gamma'' \right),$$

la formula segue dalla definizione

$$k_g = \langle kN, \nu \times T \rangle.$$

- Una curva regolare  $\gamma: I \rightarrow S$  si dice essere una *geodetica* di  $S$  se  $k_g = 0$  in tutti i punti  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ .

Le geodetiche hanno la proprietà di essere le curve di lunghezza minima tra due punti arbitrari  $p_0, p_1 \in S$ , ma “abbastanza vicini” relativamente alla distanza sulla superficie

$$\text{dist}_S(p_0, p_1) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_S(p_0, p_1)} \text{lunghezza}(\gamma),$$

dove  $\mathcal{C}_S(p_0, p_1)$  denota l'insieme delle curve regolari  $\gamma: [a, b] \rightarrow S$  tali che  $\gamma(a) = p_0$  e  $\gamma(b) = p_1$ , e  $\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .

- Quindi tutte le rette contenute nella superficie sono **geodetiche** della superficie, poiché  $k = 0 \Rightarrow k_g = 0$ .
- La condizione di geodeticità significa che il piano osculatore **vettoriale** della curva (cioè il traslato per l'origine, parallelo al piano osculatore) contiene, **in ogni punto**  $\gamma(t)$  della curva, il vettore normale  $\nu$ , essendo in questo caso  $k = |k_n|$ , e quindi, essendo  $kN = k_n\nu$ , nei punti della curva risulta  $N = \pm\nu$ .
- Risulta allora immediato dal punto precedente che i cerchi massimi su una sfera sono curve geodetiche, e sono tutte e le sole curve geodetiche della superficie della sfera.

### 3.3 La seconda forma fondamentale

Sia  $S$  regolare,  $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$ , e siano  $w, w' \in T_p S$ .

- Si definiscono le funzioni di  $(u, v)$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \\ \mathbf{g} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \\ \mathbf{f} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

(Dati i vettori  $w, w', w''$  di  $\mathbb{R}^3$ , si indica con  $[w|w'|w'']$  la matrice  $3 \times 3$  le cui colonne sono i vettori  $w, w'$  e  $w''$ , rispettivamente.)

- La *seconda forma fondamentale di  $S$  in  $p$*  è la **forma quadratica**  $\mathbb{I}_p(w, w)$ ,  $w \in T_p S$ , dove  $\mathbb{I}_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  è la mappa bilineare definita da

$$\mathbb{I}_p(w, w') = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_p S,$$

dove

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left( \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

(La matrice che definisce  $\mathbb{I}_p$  è quella indotta dall'isomorfismo  $i_{\varphi, p}$ ).

- Se  $\varphi_j, j = 1, 2$ , sono parametrizzazioni *positivamente equivalenti* di  $S$ , cioè  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ , con  $f$  cambiamento di parametri tale  $\det J_f > 0$ , allora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_1} & \mathbf{f}_{\varphi_1} \\ \mathbf{f}_{\varphi_1} & \mathbf{g}_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^t J_f \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_2} & \mathbf{f}_{\varphi_2} \\ \mathbf{f}_{\varphi_2} & \mathbf{g}_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$

In particolare la  $\mathbb{I}_p$  **dipende solamente dalla scelta di  $\nu$**  (e cioè dall'aver scelto  $\nu_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$  invece di  $\nu_\varphi = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$ ).

- Se  $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in S$  è parametrizzata ad arco, cioè  $\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1$ , allora

$$\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = k_n(s).$$

Si noti allora che in generale per una curva regolare  $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in S$ , **non** necessariamente parametrizzata ad arco, la curvatura normale  $k_n$  della curva  $\gamma$  nel punto  $p = \gamma(t_0) \in S$  è data dalla formula

$$k_n = \frac{\mathbb{I}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}{\mathbb{I}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}.$$

- **Teorema.** (Meusnier) *Se  $\gamma_j: s_j \mapsto \gamma_j(s_j) \in S$ ,  $s_j$  parametro d'arco relativo a  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  rispettivamente, sono curve tali che  $\gamma_1(s_{1,0}) = \gamma_2(s_{2,0}) = p$  e  $\dot{\gamma}_1(s_{1,0}) = \pm \dot{\gamma}_2(s_{2,0})$ , allora  $k_{n,\gamma_1}(s_{1,0}) = k_{n,\gamma_2}(s_{2,0})$ .*

- Poiché ogni curva regolare è riparametrizzabile ad ascissa d'arco, il teorema di Meusnier può essere anche enunciato dicendo che *due curve regolari  $\gamma_j: I_j \rightarrow S$ ,  $j = 1, 2$ , che passano per lo stesso punto  $p \in S$  ed ivi hanno la stessa **retta tangente**, hanno in  $p$  la stessa curvatura normale.*

- Il teorema di Meusnier permette di selezionare tra tutte le curve regolari su  $S$  passanti per un punto  $p \in S$  le *sezioni normali di  $S$  in  $p$  nella direzione  $v \in T_p S$*  (si ricordi che una direzione è un vettore diverso da zero). Esse sono curve ottenute intersecando  $S$  con il piano per  $p$  di direzioni  $\nu(p)$  e  $v$  (vicino a  $p$  tali sezioni sono sempre curve regolari). La curvatura di una sezione normale è quindi il valore assoluto della rispettiva curvatura normale. Il teorema di Meusnier può essere quindi riformulato dicendo che *il valore assoluto della curvatura normale nel punto  $p = \gamma(t_0) \in S$  di una curva regolare  $\gamma$  su  $S$  passante per  $p$  eguaglia la curvatura in  $p$  della sezione normale di  $S$  in  $p$  nella direzione  $\pm \gamma'(t_0)$ . In particolare, il piano osculatore di una sezione normale di  $S$  in un punto  $p$  nella direzione  $v \in T_p S$  coincide con il piano per  $p$  e direzioni  $v$  e  $\nu(p)$ .*

- Le *curvature principali*  $k_-(p), k_+(p)$  di  $S$  in  $p$  sono

$$k_-(p) = \min_{w \in C_S(p)} \mathbb{I}_p(w, w), \quad k_+(p) = \max_{w \in C_S(p)} \mathbb{I}_p(w, w),$$

dove  $C_S(p)$  è la conica a centro di  $T_p S$  definita da

$$C_S(p) = \{w \in T_p S; \mathbb{I}_p(w, w) = 1\}.$$

- La *mappa di Weingarten* (o *operatore forma*) di  $S$  in  $p$  è l'applicazione lineare

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

definita dalla relazione

$$\mathbb{I}_p(w, w') = \mathbb{I}_p(L_p w, w'), \quad \forall w, w' \in T_p S.$$

- La mappa di Weingarten  $L_p$  è **simmetrica rispetto ad  $\mathbf{l}_p$** , cioè

$$\mathbf{l}_p(L_p w, w') = \mathbf{l}_p(w, L_p w'), \quad \forall w, w' \in T_p S.$$

- La mappa di Weingarten  $L_p$  ammette la seguente rappresentazione matriciale  $\mathbf{L}_p$  nella base di  $T_p S$  data da  $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\}$  (cioè la matrice  $\mathbf{L}_p$  che definisce  $L_p$  è quella indotta dall'isomorfismo  $i_{\varphi,p}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p &= \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2} \begin{bmatrix} G(u_0, v_0) & -F(u_0, v_0) \\ -F(u_0, v_0) & E(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- **Teorema.** (Rodrigues) *Le curvatures principali  $k_{\pm}(p)$  di  $S$  in  $p$  sono gli autovalori della matrice  $\mathbf{L}_p$ . Denotati con  $\tilde{w}_{\pm}(p) \in \mathbb{R}^2$  i rispettivi autovettori, i vettori  $w_{\pm}(p) = i_{\varphi,p}^{-1}(\tilde{w}_{\pm}(p)) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  si chiamano **direzioni principali**, e possono essere **sempre scelti ortonormali rispetto a  $\mathbf{l}_p$**  (sono automaticamente ortogonali rispetto a  $\mathbf{l}_p$  quando  $k_-(p) \neq k_+(p)$ ), cioè  $\mathbf{l}_p(w_-(p), w_-(p)) = \mathbf{l}_p(w_+(p), w_+(p)) = 1$  e  $\mathbf{l}_p(w_-(p), w_+(p)) = 0$ . Si noti che quindi vale  $L_p w_{\pm}(p) = k_{\pm}(p)w_{\pm}(p)$  e che i  $w_{\pm}(p)$  sono ortonormali rispetto al prodotto scalare euclideo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  di  $\mathbb{R}^3$ .*

- Se  $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in S$  è una curva regolare parametrizzata ad arco sulla superficie  $S$ , e  $p = \gamma(s_0)$ , allora

$$T(s_0) = \mathbf{l}_p(T(s_0), w_-(p))w_-(p) + \mathbf{l}_p(T(s_0), w_+(p))w_+(p) = (\cos \alpha)w_-(p) + (\sin \alpha)w_+(p).$$

Si ottengono quindi, usando  $L_p w_{\pm}(p) = k_{\pm}(p)w_{\pm}(p)$  e la bilinearità di  $\mathbf{l}_p$ , le seguenti formule di Eulero:

$$k_n(s_0) = \mathbf{l}_p(T(s_0), T(s_0)) = (\cos \alpha)^2 k_-(p) + (\sin \alpha)^2 k_+(p).$$

### 3.4 Curvatura di Gauss e Curvatura Media

Si definiscono le seguenti funzione su  $S$ , superficie regolare:

- **La curvatura di Gauss:** in ogni punto  $p \in S$  essa è data da

$$K(p) = k_-(p)k_+(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \det(\mathbf{L}_p).$$

- **La curvatura media:** in ogni punto  $p \in S$  essa è data da

$$H(p) = \frac{k_-(p) + k_+(p)}{2} = \frac{Ge + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{L}_p).$$

- **Osservazione importante.** Date  $K(p)$  e  $H(p)$ , le curvatures principali sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathbf{L}_p - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{L}_p)\lambda + \det(\mathbf{L}_p) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0.$$

Quindi si ha

$$k_{\pm}(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

- Ogni punto  $p \in S$  è classificato nella seguente maniera:
  - $p$  è **ellittico** se  $K(p) > 0$ ;
  - $p$  è **iperbolico** se  $K(p) < 0$ ;
  - $p$  è **parabolico** se  $K(p) = 0$  e  $H(p) \neq 0$ ;
  - $p$  è **piano** se  $K(p) = H(p) = 0$ ;
  - $p$  è un **ombelico** se  $k_-(p) = k_+(p)$ .
- Dato il punto  $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$ , usando la funzione *altezza di  $S$  relativamente a  $T_p S$* , definita da  $h_S: (u, v) \mapsto \langle \varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0), \nu(p) \rangle = \text{pr}_{\nu(p)}(\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0))$ , si vedono le seguenti cose:
  - se  $K(p) > 0$  allora c'è un intorno del punto  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  nel quale tutti i punti di  $S$  giacciono dalla **stessa parte** rispetto al piano tangente affine  $p + T_p S$ ;
  - se  $K(p) < 0$  allora c'è un intorno del punto  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  nel quale i punti di  $S$  si distribuiscono da **ambo le parti** rispetto al piano tangente affine  $p + T_p S$ .
- Vale la cosa seguente: *se tutti i punti di  $S$  sono ombelichi, allora  $S$  è contenuta in una sfera o in un piano.*
- Sia  $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$ . Il *paraboloide osculatore di  $S$  in  $p = \varphi(u_0, v_0)$*  è il paraboloide dello spazio  $\mathbb{R}^3_{(u,v,h_S)}$  di equazione

$$h_S = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

- **Osservazione importante.** I concetti di prima e seconda forma fondamentale, mappe di Gauss e Weingarten, curvatures normali, geodetiche e principali, curvatura di Gauss e curvatura media **si estendono** anche al caso di **superfici parametrizzate** (cioè non necessariamente regolari) purché si restringa l'attenzione ai soli **punti regolari**.

### 3.5 Teoremi importanti

- **Teorema.** (Prima parte del Teorema fondamentale della teoria delle superfici, di Bonnet) *Date le superfici regolari  $S_j$ , di parametrizzazioni rispettive  $\varphi_j: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, 2$  (stesso insieme  $D$ ) si supponga che, avendo scelto (come sempre)  $\nu_{\varphi_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right\|$ ,  $j = 1, 2$ , si abbia*

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1}(u, v) & F_{\varphi_1}(u, v) \\ F_{\varphi_1}(u, v) & G_{\varphi_1}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\varphi_2}(u, v) & F_{\varphi_2}(u, v) \\ F_{\varphi_2}(u, v) & G_{\varphi_2}(u, v) \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_1}(u, v) & \mathbf{f}_{\varphi_1}(u, v) \\ \mathbf{f}_{\varphi_1}(u, v) & \mathbf{g}_{\varphi_1}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_2}(u, v) & \mathbf{f}_{\varphi_2}(u, v) \\ \mathbf{f}_{\varphi_2}(u, v) & \mathbf{g}_{\varphi_2}(u, v) \end{bmatrix},$$

per tutti gli  $(u, v) \in D$ . Allora esiste una rototraslazione  $R$  dello spazio  $\mathbb{R}^3$  in sè tale che  $\varphi_1 = R \circ \varphi_2$ . In particolare  $S_1 = R(S_2)$ .

- **Theorema Egregium.** (Gauss) *La curvatura di Gauss  $K$  è intrinseca, cioè dipende solamente dalla prima forma fondamentale.*

Una delle dimostrazioni è data dalla seguente formula (dovuta a F.Brioschi)

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) (EG - F^2) + \right. \\ \left. + \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{bmatrix} \right].$$

### 3.6 Superfici di rotazione

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto, sia  $I_0 \subset I$ , con  $I = [a, b]$  se  $a, b \in \mathbb{R}$  ovvero  $(-\infty, b]$  o  $[a, +\infty)$  se  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ , rispettivamente. Siano  $r, h: I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni  $C^\infty$ , con  $r(u) \geq 0$  per  $u \in I$  e  $r(u) > 0$  per  $u \in I_0$ , e tali che  $r'(u)^2 + h'(u)^2 \neq 0$  per  $u \in I$ . Una *superficie di rotazione* è una superficie **semplice e regolare** di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta facendo ruotare la curva regolare, chiamata *curva generatrice*,  $u \mapsto (r(u), h(u)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$  (essa è regolare in quanto  $(r')^2 + (h')^2 \neq 0$ ) del piano  $x, z$  intorno all'asse  $z$ . Si ottiene quindi una parametrizzazione

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)), \quad (u, v) \in I_0 \times (0, 2\pi).$$

In questo caso

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{bmatrix} -h'(u) \cos v \\ -h'(u) \sin v \\ r'(u) \end{bmatrix},$$

e, relativamente alla base  $\partial\varphi/\partial u$ ,  $\partial\varphi/\partial v$ , si hanno le formule:

- la matrice della prima forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} r'(u)^2 + h'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{bmatrix};$$

- la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r(u)h'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- la matrice della mappa di Weingarten è

$$\begin{bmatrix} \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{h'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- si noti che se si pone

$$k_1 = k_1(u) := \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}},$$

allora  $|k_1|$  è la curvatura della curva generatrice  $u \mapsto (r(u), h(u))$ ;

- la curvatura di Gauss e la curvatura media sono date rispettivamente dalle funzioni

$$K = \frac{h'}{r} \frac{r'h'' - h'r''}{((r')^2 + (h')^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \left( \frac{r'h'' - h'r''}{(r')^2 + (h')^2} + \frac{h'}{r} \right).$$

- I meridiani, per esempio parametrizzati ad arco,  $s \mapsto \gamma_{v_0}(s) = \varphi(u(s), v_0)$  (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale  $\dot{u}(s) = 1/\sqrt{r'(u(s))^2 + h'(u(s))^2}$ ), sono **curve geodetiche**:  $k_g(s) = 0$ .
- I paralleli, per esempio parametrizzati ad arco,  $s \mapsto \gamma_{u_0}(s) = \varphi(u_0, v(s))$  (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale  $\dot{v}(s) = 1/r(u_0)$ ), sono **curve geodetiche** se e solo se  $r'(u_0) = 0$ , cioè se e solo se il relativo vettore velocità della curva generatrice è nella direzione dell'asse  $z$  quando  $u = u_0$ . Infatti si ha

$$k_g(s) = \frac{r'(u_0)}{r(u_0)\sqrt{r'(u_0)^2 + h'(u_0)^2}} = 0 \iff r'(u_0) = 0.$$

- **Definizione.** Data la superficie di rotazione  $S$ , definiamo  $S_c$  (“completamento” di  $S$ ) la superficie ottenuta facendo ruotare la curva generatrice di un intero angolo  $2\pi$ . Si ha quindi che  $S_c$  è ottenuta da  $S$  aggiungendo ad  $S$  il meridiano

$$C_0 := \{(r(u), 0, h(u)); u \in I_0\}.$$

- **Il Teorema di Clairaut.** Sia  $S$  una superficie di rotazione parametrizzata dalla mappa  $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ . Se una curva regolare  $\psi: s \mapsto \psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$  (con  $s$  parametro d'arco di  $\psi$ ) è una geodetica allora, detto  $\theta(s) \in [0, \pi]$  l'angolo formato dalla curva ed il parallelo  $v \mapsto \varphi(u(s), v)$  nel punto  $\psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$ , si ha

$$s \mapsto r(u(s)) \cos \theta(s) = \text{costante}.$$

### 3.7 Superfici rigate

Siano  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva (non necessariamente regolare né semplice), e sia  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale, con  $\|X(u)\| \neq 0$  per tutti gli  $u \in I$ . (Quando  $I = [a, b]$  e  $\gamma$  è chiusa si richiede qui che sia  $X(a) = X(b)$ .)

Una *superficie rigata* è una *superficie parametrizzata dalla funzione*

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

La curva  $\gamma$  è chiamata una *direttrice* della superficie. La retta contenuta nella superficie passante per il punto  $\varphi(u_0, v_0)$  è l'insieme  $R(u_0) := \{\gamma(u_0) + vX(u_0); v \in \mathbb{R}\}$ . Essa è chiamata una *retta generatrice*. La superficie si dice *non cilindrica* se  $\|X'(u)\| \neq 0$  per tutti gli  $u \in I$ .

- **Definizione.** Diciamo che una superficie  $S$  di **rotazione** è rigata se lo è la superficie  $S_c$ .

Si hanno i seguenti esempi:

- **Cono sopra la curva  $\gamma$ :** presa  $\gamma$  regolare, fissato  $P_0 \notin \gamma(I)$ , si considera

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + v(P_0 - \gamma(u)), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Cilindro sopra la curva  $\gamma$ :** presa  $\gamma$  regolare, fissato il vettore (costante non nullo)  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ , si considera

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + v\vec{w}, \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Iperboloide ad una falda:** si prendono  $a, b, c > 0$ ,  $\gamma: u \mapsto (a \cos u, b \sin u, 0)$ , e

$$X: u \mapsto \gamma'(u) + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-a \sin u, b \cos u, c). \text{ Allora}$$

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

- **L'elicoide:** si sceglie  $c > 0$  e si considera  $X(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$ . In questo caso  $\gamma$  è la curva  $u \mapsto (0, 0, cu)$ . Allora

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- **Il paraboloido iperbolico:** presi  $a, b > 0$ , si considerano varie possibilità:

- si prende  $\gamma: u \mapsto (au, 0, u^2)$ ,  $X_{\pm}: u \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \pm b \\ 2u \end{bmatrix}$ , e  $\varphi_{\pm}: (u, v) \mapsto \varphi_{\pm}(u, v) = \gamma(u) + vX_{\pm}(u)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ;

- si prende  $\sigma_{\pm}: u \mapsto (au, \pm bu, 0)$ ,  $Y_{\pm}: u \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \mp b \\ 4u \end{bmatrix}$ , e  $\psi_{\pm}: (u, v) \mapsto \psi_{\pm}(u, v) = \sigma_{\pm}(u) + vY_{\pm}(u)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ .

In tutti i casi l'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



- Per le superfici rigate si ha sempre

$$E = \|\gamma'(u) + vX'(u)\|^2, \quad G = \|X(u)\|^2, \quad F = \langle \gamma'(u) + vX'(u), X(u) \rangle,$$

per cui nei punti regolari (cioè i punti nei quali  $EG - F^2 \neq 0$ )

$$e = \frac{\det [\gamma''(u) + vX''(u) \mid \gamma'(u) + vX'(u) \mid X(u)]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = 0,$$

$$f = \frac{\det [X'(u) \mid \gamma'(u) \mid X(u)]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Perciò per le superfici rigate, nei punti regolari, vale sempre

$$K = -\frac{f^2}{EG - F^2} = -\left(\frac{\det [X'(u) \mid \gamma'(u) \mid X(u)]}{EG - F^2}\right)^2 \leq 0,$$

e le rette contenute nella superficie (cioè che “rigano” la superficie) sono geodetiche.

- Si ha che *le uniche superfici di rotazione che sono anche rigate, ottenute facendo ruotare una retta dello spazio, sono quelle con  $K = 0$  e l'iperboloide ad una falda  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  quando  $K < 0$ .*
- **La superficie tangente, normale e binormale ad una curva:** sia  $\gamma: I \ni s \mapsto \gamma(s)$  una curva regolare e biregolare parametrizzata ad arco.

- La superficie **tangente** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vT(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

- La superficie **normale** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vN(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

- La superficie **binormale** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vB(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

È importante notare che la definizione si estende facilmente a curve non necessariamente parametrizzate ad arco.

- **Il nastro di Möbius** (non è orientabile): presi  $R \geq 1$  e  $0 < \varepsilon < R/2$ , si considera

$$\varphi: [0, 2\pi] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \left( (R + v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (R - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

Pertanto la curva direttrice  $\gamma$  ed il campo di direzioni  $X$  sono dati, rispettivamente, da

$$\gamma(u) = (R \sin u, R \cos u, 0), \quad X(u) = \left( \sin \frac{u}{2} \sin u, -\sin \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \right).$$

### 3.8 Superfici sviluppabili

Una superficie rigata parametrizzata da  $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u)$  (stesse notazioni della sezione precedente) con  $\|X\| = 1$  si dice *svilupabile* quando

$$\det [\gamma' | X' | X] = 0.$$

Nei punti regolari (cioè nei punti in cui  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$ ) si ha che

$$g = 0, \quad f = -\frac{\det [\gamma' | X' | X]}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = 0,$$

e quindi  $K = 0$  in tali punti. Di conseguenza per queste superfici nei punti regolari vale sempre

$$K = 0 \iff \det [\gamma' | X' | X] = 0.$$

Si hanno i fatti seguenti.

- Un utile criterio per riconoscere le superfici sviluppabili è dato dalla seguente proposizione.

**Proposizione.** *Sia  $S$  una superficie rigata parametrizzata da  $\varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u)$ . Allora  $S$  è sviluppabile se e solo se, per ogni  $u$ ,  $S$  ha lo stesso piano tangente (piano tangente vettoriale) in tutti i punti della retta generatrice  $R(u)$ .*

- **Proposizione.** *Sia  $s \mapsto \gamma(s)$  una curva (regolare e biregolare) parametrizzata ad arco. Allora la superficie tangente è sempre sviluppabile. Le superfici normale e binormale sono sviluppabili se e solo se la curva è planare.*

**Osservazione.** *La proposizione vale anche per curve non necessariamente parametrizzate ad arco.*

- La direzione principale relativa alla curvatura principale 0 è  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = X$ . (In questo caso essa è anche di lunghezza 1.)

- **Teorema.** *Una superficie rigata  $S$  è sviluppabile se e solo se una delle seguenti condizioni (equivalenti) è soddisfatta:*

(i)  $K = 0$ ;

(ii) *La superficie è localmente isometrica ad un piano (cioè localmente diffeomorfa in modo da conservare la prima forma fondamentale), e le rette generatrici  $\{vX(u); v \in \mathbb{R}\}$  rimangono direzioni principali.*

- **Osservazione.** Se non si suppone che  $\|X\| = 1$ , ma solo che  $\|X\| \neq 0$ , è ancora vero che  $K = 0$  se e solo se  $\det [\gamma' | X' | X] = 0$  nei punti regolari. In questo caso però la direzione principale di lunghezza 1 relativa alla curvatura principale 0 è data da  $\frac{1}{\|X\|} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{X}{\|X\|}$ .

### 3.9 Parametrazioni di alcune superfici notevoli

- **Ellissoide:**  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad u \in (0, \pi), v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nel caso in cui  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)^2} > 0.$$

- **Toro:**  $0 < r_1 < r_2$ ,

$$\varphi(u, v) = \left( (r_1 \cos u + r_2) \cos v, (r_1 \cos u + r_2) \sin v, r_1 \sin u \right), \quad u, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} - r_2 \right)^2 + z^2 = r_1^2.$$

La curvatura di Gauss è

$$K = \frac{\cos u}{r_1(r_1 \cos u + r_2)}.$$

- **Cono:**  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

e la curvatura di Gauss  $K = 0$ .

- **Paraboloide ellittico:**  $a, b > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2), \quad u \in (0, +\infty), v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nel caso in cui  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvaturei di Gauss

$$K = \frac{4}{(4u^2 + a^2)^2} > 0.$$

- **Paraboloide iperbolico:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con  $a, b > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

La curvatura di Gauss è  $K < 0$ .

- **Elicoide:** come già visto, con  $c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

La curvatura di Gauss è facilmente calcolabile (utilizzando la formula per le superfici rigate) ed è

$$K = -\frac{c^2}{(c^2 + v^2)^2} < 0.$$

- **Iperboloide ad una falda:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u), \quad u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

Quando  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 \sinh^2 u + c^2 \cosh^2 u)^2} < 0.$$

- **Iperboloide a due falde:**  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi_{\pm}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u), \quad u \in (0, +\infty), v \in (0, 2\pi),$$

dove  $\varphi_+$  parametrizza la falda contenuta nel semipiano  $z > 0$ , mentre  $\varphi_-$  parametrizza la falda contenuta nel semipiano  $z < 0$ . L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Quando  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cosh^2 u + c^2 \sinh^2 u)^2} > 0.$$

- **Cilindro:**  $a, b > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (a \cos v, b \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quando  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss  $K = 0$ .

- **Pseudosfera di Beltrami:**  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = \left( ae^{-u} \cos v, be^{-u} \sin v, c \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt \right), \quad u \in (0, +\infty), v \in (0, 2\pi).$$

Quando  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 e^{-2u} + c^2 (1 - e^{-2u}))^2} < 0.$$

Se  $a = b = c$  allora

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

- **Catenoide:**  $a, b, c > 0$ ,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in (0, 2\pi).$$

Quando  $a = b$  la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 \sinh^2 u + c^2)^2} < 0.$$

- **Sella di scimmia:**

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Tutti i punti di questa superficie sono iperbolici, ad eccezione dell'origine, unico punto piano isolato.

- **Grafici:** data  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione infinitamente differenziabile, si considera

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Si ha

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\partial f / \partial u \\ -\partial f / \partial v \\ 1 \end{bmatrix},$$

e, nella base usuale  $\partial\varphi/\partial u, \partial\varphi/\partial v$ :

- la prima forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

- la seconda forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{bmatrix}.$$

- la curvatura di Gauss è data da

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)^2}.$$

### Testi di riferimento:

- [1] P.Albano e A.Parmeggiani, *Elementi Introduttivi di Matematica*. Cesena 2002.
- [2] Santiago Calatrava, *Santiago Calatrava: Conversations with Students - The MIT Lectures*. Princeton Architectural Press 2002.
- [3] M.Emmer, *Mathland. Dal mondo piatto alle ipersuperfici*. Universale di Architettura, 143, 2003.
- [4] L.Molinari, *Santiago Calatrava*. 01 Biblioteca di Architettura, Skira 1998.
- [5] A. Parmeggiani, *Il concetto di Forma in Matematica: il corso di Matematica Applicata, Architettura 3*, Facoltà di Architettura dell'Università di Bologna, sede di Cesena 2002.
- [6] A.Parmeggiani, *Note del corso di Matematica Applicata (all'Architettura)*, in fase di preparazione.
- [7] G.Pizzetti e A.M.Zorgno Trisciuglio, *Principi Statici e Forme Strutturali*. UTET, 1980. (Capitolo III)
- [8] D.Schodek, *Strutture*. Patron Editore. Bologna 2004.
- [9] E.Sernesi, *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 2001.

### Letture utili.

- [HC] D.Hilbert e S.Cohn-Vossen, *Geometria Intuitiva*. Bollati Boringhieri, 2001.
- [SC] N.Sala, G.Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura* (Presentazione di Mario Botta). Serie di Architettura FrancoAngeli 2003.
- [Ka] W.Kandkinsky, *Punto Linea Superficie*. Biblioteca Adelphi 16. Adelphi Edizioni, Milano, 2006.

### Altri testi utili:

- [CRE] E.Cohen, R.F.Riesenfeld e G. Elber, *Geometric Modeling with Splines - An Introduction*. A.K. Peters, 2001.
- [dC] M.P.do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [F] W. Flugge, *Stresses in Shells*. Second edition. Springer Verlag, 1960.
- [K] W.Kühnel, *Differential Geometry (Curves-surfaces-manifolds)*. Student Mathematical Library, 16. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [S] D.J.Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry - 2nd Edition*. Dover, 1961.
- [G] A.Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*. CRC Press, 1998.