PROGRAMMA (E NOTE) DI MATEMATICA APPLICATA (ALL'ARCHITETTURA)

Corso di Laurea in ARCHITETTURA
A.A. 2010/2011 (Alberto PARMEGGIANI)

Indice

Avvertenza: Tutte le funzioni qui considerate sono *sufficientemente differenziabili*, cioè esse sono continue insieme alle loro derivate (ordinarie o parziali) fino ad un ordine sufficiente a giustificare rigorosamente tutte le definizioni e le formule date nel seguito (tale ordine di derivazione sarà sempre almeno 3).

1 Richiami di Algebra Lineare

Si veda anche il programma relativo al Corso di Istituzioni di Matematiche I, a.a. 2002/2003, nella pagina web http://www.dm.unibo.it/∼parmeggi.

1.1 Classificazione delle coniche a centro di $\mathbb{R}^2$

Data la forma quadratica $Q(x_1, x_2) := \langle A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rangle + c$, dove $A \neq 0$ è una matrice simmetrica e $c \in \mathbb{R}$, la *conica a centro* di $\mathbb{R}^2$ di equazione $Q(x_1, x_2) = 0$ è un insieme del tipo

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ Q(x_1, x_2) = 0\}.$$

La classificazione euclidea di C dice che *si può sempre trovare una* **rotazione degli assi** *R tale che nelle nuove coordinate (y_1, y_2), legate alle (x_1, x_2) tramite la relazione* $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = {}^tR \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, *l'insieme C è descritto da*

$$C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0\},$$

dove $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sono gli autovalori di A. Si hanno le seguenti possibilità:

- *Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c < 0$,* **oppure** *se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c > 0$, allora C è* **un'ellisse***;*
- *Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c > 0$,* **oppure** *se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c < 0$, allora $C = \emptyset$;*
- *Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c = 0$,* **oppure** *se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c = 0$, allora $C = \{(0, 0)\}$;*
- *Se $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ e $c < 0$,* **oppure** *se $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ e $c > 0$, allora C è* **l'unione di una coppia di rette parallele***;*
- *Se $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ e $c = 0$, allora C è* **l'asse** *y_1;*
- *Se $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ e $c = 0$, allora C è* **l'asse** *y_2;*
- *Se λ_1 e λ_2 hanno segno discorde e $c \neq 0$, allora C è* **un'iperbole***;*
- *Se λ_1 e λ_2 hanno segno discorde e $c = 0$, allora C è* **l'unione di una coppia di rette che si intersecano nell'origine***.*

2 Geometria delle curve di $\mathbb{R}^3$

Le curve sono funzioni sufficientemente differenziabili $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dove I è un intervallo. Una curva si dice *semplice* quando $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per ogni scelta di $t_1, t_2 \in I$ con almeno uno tra t_1 e t_2 interno ad I. Una curva $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. La *velocità* di una curva è il vettore $\dfrac{d\gamma}{dt} = \gamma'$. Una curva $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *regolare* quando $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in I$. Due curve $\gamma_j\colon I_j \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$, si dicono **equivalenti** quando esiste un cambiamento di parametro $p\colon I_1 \ni t \longmapsto p(t) = \tilde{t} \in I_2$, continuo con derivata continua sempre $\neq 0$ su I_1, tale che $\gamma_1(t) = (\gamma_2 \circ p)(t)$; in particolare si ha che $\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$. *Ascissa curvilinea* (detta anche *lunghezza d'arco*): essa è data dalla relazione $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$. Data la curva $\psi\colon s \longmapsto \psi(s)$, s ascissa curvilinea, si denoterà sempre con $\dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{ds}$ la sua velocità. *Ogni curva regolare γ è sempre equivalente ad una curva ψ parametrizzata ad arco* (cioè parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea)*; infatti la curva $\psi\colon s \longmapsto \psi(s) = \gamma(t(s))$, dove $t(s)$ è la funzione* **inversa** *della funzione $t \longmapsto s(t)$, è parametrizzata ad arco ed è equivalente a γ.*

2.1 Curve parametrizzate ad arco

Sia $\gamma\colon I \ni s \longmapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ parametrizzata ad arco e biregolare (cioè $\ddot{\gamma} \neq 0$ su tutto I).

- **Triedro fondamentale di Frénet nel punto $\gamma(s_0)$:**

$$T(s_0) = \dot{\gamma}(s_0), \quad N(s_0) = \frac{\dot{T}(s_0)}{\left\|\dot{T}(s_0)\right\|}, \quad B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0).$$

- **Curvatura $k(s_0)$ e Torsione $\tau(s_0)$ nel punto $\gamma(s_0)$:**

$$k(s) = \left\|\dot{T}(s_0)\right\|, \quad \tau(s) = \langle \dot{B}(s_0), N(s_0) \rangle.$$

- Formule di Frénet:

$$\begin{cases} \dot{T}(s) & = & & k(s)N(s) & \\ \dot{N}(s) & = & -k(s)T(s) & & -\tau(s)B(s) \\ \dot{B}(s) & = & & \tau(s)N(s). & \end{cases}$$

- Equazioni cartesiane del piano **rettificante** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{T, B\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle N(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **normale** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{N, B\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle T(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **osculatore** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{T, N\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle B(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazione parametrica della circonferenza **osculatrice** $C(\gamma; s_0)$ della curva nel punto $\gamma(s_0)$:

$$C(\gamma; s_0) = \left\{ \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \Big((\cos\theta) T(s_0) + (\sin\theta) N(s_0) \Big); \ \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

- **Osservazione.** *Se $k(s) = 0$, per tutti gli $s \in I$, allora γ è un segmento di retta.*

- *Se $k(s)$ è una costante $\neq 0$ (quindi > 0) e $\tau(s) = 0$ per tutti gli $s \in I$ allora γ è un arco di circonferenza.*

- Se $k(s_0), \tau(s_0) \neq 0$, la **sfera osculatrice** della curva nel punto $\gamma(s_0)$ è la sfera il cui centro $c(s_0)$ e raggio $r(s_0)$ sono rispettivamente

$$c(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0) + \frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0) k(s_0)^2} B(s_0), \quad r(s_0) = \frac{1}{k(s_0)^2} + \left(\frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0) k(s_0)^2} \right)^2.$$

- *Se $k(s), \tau(s) \neq 0$ per tutti gli $s \in I$, allora la curva γ è contenuta in una sfera (e quindi nella sua sfera osculatrice) se e solo se vale la relazione*

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{k}(s)}{\tau(s) k(s)^2} \right), \quad \forall s \in I.$$

- Fissato $s_0 \in I$, ed interno ad I, la formula di Taylor per s vicino ad s_0 dà

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \dot{\gamma}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2} \ddot{\gamma}(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\gamma}{ds^3}(s_0)(s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3).$$

  Usando le equazioni di Frénet in $\gamma(s_0)$ si ottiene allora che le curve proiezioni della curva $s \longmapsto \gamma(s)$ sui piani rettificante, osculatore e normale in $\gamma(s_0)$ sono date, per s vicino ad s_0, rispettivamente dalle curve

  - **sul piano rettificante** (T, B):

$$s \longmapsto \Big(\langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6} k(s_0) \tau(s_0)(s - s_0)^3 \Big);$$

  - **sul piano osculatore** (T, N):

$$s \longmapsto \Big(\langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2} k(s_0)(s - s_0)^2 \Big);$$

  - **sul piano normale** (N, B):

$$s \longmapsto \Big(\langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2} k(s_0)(s - s_0)^2, \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6} k(s_0) \tau(s_0)(s - s_0)^3 \Big).$$

- **Il Teorema di Frénet:** *Dato $s \in I$, intervallo aperto di $\mathbb{R}$, e date le funzioni sufficientemente differenziabili $k \colon I \ni s \longmapsto k(s) \in (0, +\infty)$ e $\tau \colon I \ni s \longmapsto \tau(s) \in \mathbb{R}$, esiste $\gamma \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, curva regolare, per la quale s è il parametro d'arco, k è la curvatura e τ è la torsione. Tale curva è* **unica** *a meno di* **rototraslazioni** *dello spazio $\mathbb{R}^3$ in sè.*

2.2 Formule per le curve non necessariamente parametrizzate ad arco

Le formule per il triedro fondamentale, la curvatura e la torsione in un punto $\gamma(t_0)$ per curve per le quali t non è la lunghezza d'arco sono (ponendo $s_0 = s(t_0)$)

$$T(s_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \quad B(s_0) = \frac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}, \quad N(s_0) = B(s_0) \times T(s_0),$$

$$k(s_0) = \tilde{k}(t_0) = \frac{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3},$$

$$\tau(s_0) = \tilde{\tau}(t_0) = \frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma''(t_0) \times \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2} = -\frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2}.$$

2.3 Curve Bézier

- Poligono di *controllo*: è un insieme $\{P_0, \dots, P_n\}$ di $n+1$ punti (distinti) di $\mathbb{R}^3$;
- algoritmo di construzione delle curve Bézier: dato il poligono di controllo $\{P_0, \dots, P_n\}$ e dato $t_0 \in [0,1]$, il punto $\gamma(t_0)$ della curva Bézier viene costruito nel modo seguente

[Passo 1] per $k = 0, \dots, n$ si pone $P_k^{(0)}(t_0) = P_k$ (punti di prima generazione)

[Passo 2] per $j = 1, \dots, n$ si costruisce ricorsivamente la generazione j-esima a partire dalla generazione $j-1$-esima tramite la formula

$$P_k^{(j)}(t_0) = (1-t_0)P_{k-1}^{(j-1)}(t_0) + t_0 P_k^{(j-1)}(t_0), \quad k = j, \dots, n$$

[Passo 3] si pone $\gamma(t_0) = P_n^{(n)}$.

Facendo variare t_0 in $[0,1]$ si ottiene l'intera curva $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata al poligono di controllo dato;

- forma analitica delle curve Bézier: *dato il poligono di controllo* $\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^3$*, la curva Bézier* $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ad esso associata è data da*

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k};$$

- la curva Bézier associata al poligono di controllo $\{P_0, \dots, P_n\}$ *è contenuta nell'inviluppo convesso di tale poligono*;
- poiché

$$\gamma'(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k \binom{n}{k} \Big(k t^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \Big) =,$$

si ha in particolare che

$$\gamma'(0) = n(P_1 - P_0), \quad \text{e} \quad \gamma'(1) = n(P_n - P_{n-1}),$$

cioè $\gamma'(0)$ è tangente al primo lato del poligono di controllo e $\gamma'(1)$ tangente all'ultimo lato del poligono di controllo;

- formule per le derivate successive in termini del poligono di riferimento: avendo definito le funzioni ("miscelatrici" di Bernstein) $\theta_{k,m}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$ con $k \leq m$, tramite la formula

$$\theta_{k,m}(t) := \frac{m!}{k!(m-k)!} t^k (1-t)^{m-k},$$

si ha

$$\gamma^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n-j} Q_{j,k} \theta_{k,n-j}(t)$$

(quindi $\gamma^{(j)}(t) = 0$ per tutti i $j \geq n+1$), dove

$$\begin{cases} Q_{0,k} = P_k, \\ \\ Q_{j,k} = (n-j+1)\Big(Q_{j-1,k+1} - Q_{j-1,k}\Big), \ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

3 Geometria delle superfici di $\mathbb{R}^3$

Nel seguito D è un sottoinsieme aperto e connesso (un dominio) di $\mathbb{R}^2$ che possiamo pensare essere o un rettangolo aperto della forma $(a,b)\times(c,d)$ oppure un cerchio della forma $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ (u-u_0)^2+(v-v_0)^2<r^2\}$. Con $\overline{D}$ si denoterà la **chiusura** (topologica) di D. Quindi $\overline{D}=[a,b]\times[c,d]$ nel primo caso, $\overline{D}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ (u-u_0)^2+(v-v_0)^2\le r^2\}$ nel secondo. Quando $D=\mathbb{R}^2$ allora $\overline{D}=\mathbb{R}^2$, e quando $D=(0,+\infty)\times(a,b)$ allora $\overline{D}=[0,+\infty)\times[a,b]$.

- Una *superficie regolare* dello spazio è *un insieme $S\subset\mathbb{R}^3$ per il quale esiste una funzione sufficientemente differenziabile, chiamata (una)* **parametrizzazione di** *S, $\varphi\colon D\ni(u,v)\longmapsto\varphi(u,v)\in\mathbb{R}^3$, tale che*
  - *φ è* **iniettiva** *su D, cioè $\varphi(u_1,v_1)=\varphi(u_2,v_2)$ implica $u_1=u_2$ e $v_1=v_2$;*
  - *vale*
  $$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\neq 0,\ \forall(u,v)\in D$$
  (questa condizione assicura che i vettori $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$ siano **linearmente indipendenti** *per ogni $(u,v)\in D$);*
  - *vale $\varphi(D)=S$.*
- Due superfici regolari $S_1,S_2\subset\mathbb{R}^3$, parametrizzate da $\varphi_j\colon D_j\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $j=1,2$, rispettivamente, si dicono essere **equivalenti** se esiste una funzione sufficientemente differenziabile ed invertibile con inversa sufficientemente differenziabile (cioè un *diffeomorfismo*), chiamato **cambiamento di parametri**, $f\colon D_1\ni(u,v)\longmapsto f(u,v)=(f_1(u,v),f_2(u,v))=(u',v')\in D_2$, tale che $\varphi_1(u,v)=(\varphi_2\circ f)(u,v)$. Si ha in particolare che $S_1=S_2$.
- Si dice inoltre che una funzione sufficientemente differenziabile $\varphi\colon D\longrightarrow\mathbb{R}^3$ è una *superficie parametrizzata* (in particolare non si richiede che φ sia iniettiva). I punti $p=\varphi(u,v)$ di $S=\varphi(D)$ nei quali $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\neq 0$ si dicono *punti regolari* di S, si dicono *punti singolari* altrimenti.
- **Osservazione.** Assumeremo tacitamente nel seguito che le parametrizzazioni considerate possano essere estese su tutto $\overline{D}$ come funzioni continue, insieme a tutte le loro derivate parziali di ordine sufficientemente grande.

Data la superficie regolare S e dato il punto $p=\varphi(u_0,v_0)\in S$,

- il **piano tangente (la superficie S) in** p è il sottospazio vettoriale bidimensionale di $\mathbb{R}^3$ (passante quindi per l'origine) definito da
$$T_pS=\left\{w=\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^3;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\};$$
- il **piano tangente affine in** p è il piano passante per p e **parallelo** a T_pS, e cioè
$$p+T_pS=\{\varphi(u_0,v_0)+w;\ w\in T_pS\}.$$

- Si ha quindi che il piano tangente affine $p+T_pS$ in $p=\varphi(u_0,v_0)$ ha equazione cartesiana

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \varphi(u_0,v_0)\right\rangle = 0.$$

Data la superficie regolare S,

- **definiamo** il *campo vettoriale normale* ad S essere il campo vettoriale

$$\nu_\varphi\colon (u,v)\longmapsto \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\|},\ (u,v)\in D$$

  (si noti che l'altra scelta possibile è $\nu_\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)/\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|$);

- se $\varphi_j\colon D_j\longrightarrow S$ sono due possibili parametrizzazioni di S (con $f\colon(u,v)\longmapsto(u',v')$ cambiamento di parametri) allora, indicati con ν_{φ_j}, $j=1,2$, i rispettivi campi normali, si ha la seguente legge di trasformazione

$$\nu_{\varphi_1}(u,v)=\frac{\det J_f(u,v)}{|\det J_f(u,v)|}\nu_{\varphi_2}(u',v'),\quad (u',v')=f(u,v),$$

  dove $\det J_f$ è il determinante della matrice jacobiana di f, $J_f=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\end{bmatrix}$;

- se si considerano quindi solo i cambiamenti di parametri f che abbiano $\det J_f>0$ si può definire la funzione

$$\nu\colon S\longrightarrow \mathbb{S}^2,\ \nu(p)=\nu_\varphi(u,v),$$

  dove $p=\varphi(u,v)$ e $\mathbb{S}^2$ è la sfera di centro l'origine e raggio 1 di $\mathbb{R}^3$. Tale funzione è chiamata **mappa di Gauss**.

- Una superficie regolare S la cui mappa di Gauss ν risulta essere **continua su tutta** S si dice *superficie orientabile.* (Il nastro di Möbius non è orientabile.)

Dato il punto $p=\varphi(u_0,v_0)$ della superficie regolare S, l'applicazione

$$\mathsf{i}_{\varphi,p}\colon T_pS\ni w = w_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)+w_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\longmapsto \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,$$

è un isomorphismo di spazi vettoriali. Ciò vuol dire che $\mathsf{i}_{\varphi,p}$ è lineare, cioè $\mathsf{i}_{\varphi,p}(\alpha w+\beta w')=\alpha\mathsf{i}_{\varphi,p}(w)+\beta\mathsf{i}_{\varphi,p}(w')$ per ogni $w,w'\in T_pS$ e per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, e che $\mathsf{i}_{\varphi,p}$ è invertibile con inversa anch'essa lineare. Identificheremo quindi il vettore $w\in T_pS$ con il vettore $\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Nel seguito $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ indicherà il prodotto scalare (euclideo) di $\mathbb{R}^2$ mentre quello di $\mathbb{R}^3$ rimarrà indicato con $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3.1 La prima forma fondamentale

Sia data la superficie regolare S e sia dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, e siano

$$w = w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \;\; w' = w_1' \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2' \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

due vettori di T_pS. Quindi

$$w = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}), \;\; w' = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}(\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix}).$$

- Si definiscono le funzioni di (u, v)

$$E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2, \; G = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2, \; F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle.$$

- La *prima forma fondamentale di S in p* è la **forma quadratica** $\mathsf{I}_p(w, w)$, $w \in T_pS$, dove $\mathsf{I}_p \colon T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ è la mappa bilineare (cioè simmetrica e lineare nel primo e nel secondo argomento) definita da

$$\mathsf{I}_p(w, w') = \langle w, w' \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_pS,$$

  dove

$$w = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}), \;\; w' = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}(\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix}).$$

  (La matrice che definisce I_p è quella indotta dall'isomorfismo $\mathsf{i}_{\varphi,p}$).

- Dalla relazione $\|w \times w'\|^2 = \|w\|^2 \|w'\|^2 - \langle w, w' \rangle^2$, si ottiene

$$EG - F^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

  (per ipotesi).

- I_p è **definita positiva**, cioè $\mathsf{I}_p(w, w) \geq 0$ per ogni $w \in T_pS$ e $\mathsf{I}_p(w, w) = 0$ se e solo se $w = 0$; ciò equivale a dire che per la relativa matrice si ha $EG - F^2 > 0$ (essendo $E > 0$ per costruzione).

- Quindi I_p è un prodotto scalare su ogni T_pS, chiamato anche *prodotto scalare intrinseco di S in p* o *metrica Riemanniana di S in p*. Si può perciò definire $\sqrt{\mathsf{I}_p(w, w)}$ essere la lunghezza **intrinseca** del vettore tangente $w \in T_pS$.

- Se φ_j, $j = 1, 2$, sono parametrizzazioni equivalenti di S, cioè $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, con f cambiamento di parametri, allora

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1} & F_{\varphi_1} \\ F_{\varphi_1} & G_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^tJ_f \begin{bmatrix} E_{\varphi_2} & F_{\varphi_2} \\ F_{\varphi_2} & G_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$

  In particolare, con $p = \varphi_1(u_0, v_0) = \varphi_2(u_0', v_0')$, la I_p **non dipende dalla parametrizzazione scelta** φ_j.

- Se $T = \varphi(K) \subset S$, K un sottoinsieme chiuso e limitato di D, allora si definisce *area della porzione T di superficie* l'integrale

$$\text{Area}(T) = \iint_K \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

  L'area **non dipende** dalla parametrizzazione scelta.

3.2 Curvatura normale e curvatura geodetica di una curva di S

Sia S una superficie regolare. Una curva regolare $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è **contenuta** in S (oppure è **su** S) se $\gamma(I) \subset S$. Scriveremo $\varphi\colon I \longrightarrow S$. In questo caso si può vedere che, almeno vicino ad ogni t_0 arbitrariamente fissato nella parte interna di I, $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, dove $t \longmapsto (u(t), v(t))$ è una curva regolare (piana) contenuta in D. Si ha che γ è parametrizzata ad arco se e solo se $\|\gamma'\| = 1$, e poiché $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$ ciò equivale a dire $\mathsf{I}_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)) = 1$.

Sia $\gamma\colon I \longrightarrow S$ **parametrizzata ad arco**.

- Si definisce *vettore normale intrinseco di* γ *in* S nel punto $\gamma(s)$ il vettore
$$N_S(s) = \nu(\gamma(s)) \times T(s).$$
- Si definisce *curvatura geodetica* di γ in $\gamma(s)$
$$k_g(s) = \langle \ddot\gamma(s), N_S(s)\rangle = \det\left[\ddot\gamma(s)\,|\nu(\gamma(s))|\,T(s)\right].$$
- Si definisce *curvatura normale* di γ in $\gamma(s)$
$$k_n(s) = \langle \ddot\gamma(s), \nu(\gamma(s))\rangle.$$
- Siccome $\dot\gamma(s) = T(s)$ e quindi $\ddot\gamma(s) = \dot T(s) = k(s)N(s)$, essendo i vettori $T(s)$ e $N_S(s)$ una base ortonormale di $T_{\gamma(s)}S$, si ottiene la relazione
$$k(s)N(s) = k_g(s)N_S(s) + k_n(s)\nu(\gamma(s)),$$
da cui
$$k(s) = \sqrt{k_n(s)^2 + k_g(s)^2}.$$
In particolare si ha anche che
$$k_n(s) = k(s)\cos\Big(\mathsf{angolo}(N(s), \nu(\gamma(s)))\Big).$$
- Poiché ogni curva regolare $\gamma\colon I \longrightarrow S$ può essere riparametrizzata ad arco, la curvatura geodetica di una curva regolare qualsiasi (cioè non necessariamente parametrizzata ad arco), è la curvatura geodetica della curva equivalente a γ parametrizzata ad arco. In particolare si ha, per la curvatura geodetica in ogni punto $\gamma(t)$, la formula
$$k_g = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\det[\gamma''(t)|\nu(\gamma(t))|\gamma'(t)].$$
La formula si verifica facilmente nella maniera seguente. Ricordando che
$$v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3\rangle v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_3, \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3,$$
che
$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|},\ N_S = \nu \times \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|},\ B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|},\ k = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3},$$
e quindi che
$$N = B \times T = \frac{-1}{\|\gamma'\|\,\|\gamma' \times \gamma''\|}\Big(\langle \gamma', \gamma''\rangle\gamma' - \|\gamma'\|^2\gamma''\Big),$$
la formula segue dalla definizione
$$k_g = \langle kN, \nu \times T\rangle.$$

- Una curva regolare $\gamma\colon I \longrightarrow S$ si dice essere una *geodetica* di S se $k_g = 0$ in tutti i punti $\gamma(t)$, $t \in I$.
  Le geodetiche hanno la proprietà di essere le curve di lunghezza minima tra due punti arbitrari $p_0, p_1 \in S$, ma "abbastanza vicini" relativamente alla distanza sulla superficie
  $$\mathrm{dist}_S(p_0,p_1) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_S(p_0,p_1)} \text{lunghezza}(\gamma),$$
  dove $\mathcal{C}_S(p_0,p_1)$ denota l'insieme delle curve regolari $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow S$ tali che $\gamma(a) = p_0$ e $\gamma(b) = p_1$, e lunghezza$(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt$.

- Quindi tutte le rette contenute nella superficie sono **geodetiche** della superficie, poiché $k = 0 \Rightarrow k_g = 0$.

- La condizione di geodeticità significa che il piano osculatore **vettoriale** della curva (cioè il traslato per l'origine, parallelo al piano osculatore) contiene, **in ogni punto** $\gamma(t)$ della curva, il vettore normale ν, essendo in questo caso $k = |k_n|$, e quindi, essendo $kN = k_n\nu$, nei punti della curva risulta $N = \pm\nu$.

- Risulta allora immediato dal punto precedente che i cerchi massimi su una sfera sono curve geodetiche, e sono tutte e le sole curve geodetiche della superficie della sfera.

3.3 La seconda forma fondamentale

Sia S regolare, $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, e siano $w, w' \in T_pS$.

- Si definiscono le funzioni di (u, v)
  $$\mathsf{e} = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right],$$
  $$\mathsf{g} = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right],$$
  $$\mathsf{f} = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \middle| \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right].$$
  (Dati i vettori w, w', w'' di $\mathbb{R}^3$, si indica con $[w|w'|w'']$ la matrice 3×3 le cui colonne sono i vettori w, w' e w'', rispettivamente.)

- La *seconda forma fondamentale di S in p* è la **forma quadratica** $\mathsf{II}_p(w,w)$, $w \in T_pS$, dove $\mathsf{II}_p\colon T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ è la mappa bilineare definita da
  $$\mathsf{II}_p(w,w') = \left\langle \begin{bmatrix} \mathsf{e}(u_0,v_0) & \mathsf{f}(u_0,v_0) \\ \mathsf{f}(u_0,v_0) & \mathsf{g}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_pS,$$
  dove
  $$w = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right), \quad w' = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}\left(\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix}\right).$$
  (La matrice che definisce II_p è quella indotta dall'isomorfismo $\mathsf{i}_{\varphi,p}$).

- Se φ_j, $j = 1, 2$, sono parametrizzazioni *positivamente equivalenti* di S, cioè $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, con f cambiamento di parametri tale det $J_f > 0$, allora
$$\begin{bmatrix} \mathsf{e}_{\varphi_1} & \mathsf{f}_{\varphi_1} \\ \mathsf{f}_{\varphi_1} & \mathsf{g}_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^tJ_f \begin{bmatrix} \mathsf{e}_{\varphi_2} & \mathsf{f}_{\varphi_2} \\ \mathsf{f}_{\varphi_2} & \mathsf{g}_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$
In particolare la II_p **dipende solamente dalla scelta di** ν (e cioè dall'aver scelto $\nu_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|$ invece di $\nu_\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|$).

- Se $\gamma\colon s \longmapsto \gamma(s) \in S$ è parametrizzata ad arco, cioè $\mathsf{I}_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)) = 1$, allora
$$\mathsf{II}_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)) = k_n(s).$$
Si noti allora che in generale per una curva regolare $\gamma\colon t \longmapsto \gamma(t) \in S$, **non** necessariamente parametrizzata ad arco, la curvatura normale k_n della curva γ nel punto $p = \gamma(t_0) \in S$ è data dalla formula
$$k_n = \frac{\mathsf{II}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}{\mathsf{I}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}.$$

- **Teorema.** (Meusnier) *Se* $\gamma_j\colon s_j \longmapsto \gamma_j(s_j) \in S$, s_j *parametro d'arco relativo a* γ_j, $j = 1, 2$ *rispettivamente, sono curve tali che* $\gamma_1(s_{1,0}) = \gamma_2(s_{2,0}) = p$ *e* $\dot\gamma_1(s_{1,0}) = \pm\dot\gamma_2(s_{2,0})$, *allora* $k_{n,\gamma_1}(s_{1,0}) = k_{n,\gamma_2}(s_{2,0})$.

- Poiché ogni curva regolare è riparametrizzabile ad ascissa d'arco, il teorema di Meusnier può essere anche enunciato dicendo che *due curve regolari* $\gamma_j\colon I_j \longrightarrow S$, $j = 1, 2$, *che passano per lo stesso punto* $p \in S$ *ed ivi hanno la stessa* **retta tangente**, *hanno in* p *la stessa curvatura normale.*

- Il teorema di Meusnier permette di selezionare tra tutte le curve regolari su S passanti per un punto $p \in S$ le *sezioni normali di* S *in* p *nella direzione* $v \in T_pS$ (si ricordi che una direzione è un vettore diverso da zero). Esse sono curve ottenute intersecando S con il piano per p di direzioni $\nu(p)$ e v (vicino a p tali sezioni sono sempre curve regolari). La curvatura di una sezione normale è quindi il valore assoluto della rispettiva curvatura normale. Il teorema di Meusnier può essere quindi riformulato dicendo che *il valore assoluto della curvatura normale nel punto* $p = \gamma(t_0) \in S$ *di una curva regolare* γ *su* S *passante per* p *eguaglia la curvatura in* p *della sezione normale di* S *in* p *nella direzione* $\pm\gamma'(t_0)$. In particolare, il piano osculatore di una sezione normale di S in un punto p nella direzione $v \in T_pS$ coincide con il piano per p e direzioni v e $\nu(p)$.

- Le *curvature principali* $k_-(p), k_+(p)$ *di* S *in* p sono
$$k_-(p) = \min_{w \in C_S(p)} \mathsf{II}_p(w, w), \quad k_+(p) = \max_{w \in C_S(p)} \mathsf{II}_p(w, w),$$
dove $C_S(p)$ è la conica a centro di T_pS definita da
$$C_S(p) = \{w \in T_pS;\ \mathsf{I}_p(w, w) = 1\}.$$

- La *mappa di Weingarten* (o *operatore forma*) di S in p è l'applicazione lineare
$$L_p\colon T_pS \longrightarrow T_pS$$
definita dalla relazione
$$\mathsf{II}_p(w, w') = \mathsf{I}_p(L_pw, w'), \quad \forall w, w' \in T_pS.$$

- La mappa di Weingarten L_p è **simmetrica rispetto ad** I_p, cioè

$$\mathsf{I}_p(L_p w, w') = \mathsf{I}_p(w, L_p w'), \quad \forall w, w' \in T_pS.$$

- La mappa di Weingarten L_p ammette la seguente rappresentazione matriciale L_p nella base di T_pS data da $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\}$ (cioè la matrice L_p che definisce L_p è quella indotta dall'isomorfismo $\mathsf{i}_{\varphi,p}$):

$$\mathsf{L}_p = \begin{bmatrix} E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0) \\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathsf{e}(u_0,v_0) & \mathsf{f}(u_0,v_0) \\ \mathsf{f}(u_0,v_0) & \mathsf{g}(u_0,v_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2} \begin{bmatrix} G(u_0,v_0) & -F(u_0,v_0) \\ -F(u_0,v_0) & E(u_0,v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{e}(u_0,v_0) & \mathsf{f}(u_0,v_0) \\ \mathsf{f}(u_0,v_0) & \mathsf{g}(u_0,v_0) \end{bmatrix}.$$

- **Teorema.** (Rodrigues) *Le curvature principali $k_\pm(p)$ di S in p sono gli autovalori della matrice L_p. Denotati con $\tilde{w}_\pm(p) \in \mathbb{R}^2$ i rispettivi autovettori, i vettori $w_\pm(p) = \mathsf{i}_{\varphi,p}^{-1}(\tilde{w}_\pm(p)) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ si chiamano* **direzioni principali**, *e possono essere* **sempre** *scelti ortonormali rispetto a I_p (sono automaticamente ortogonali rispetto a I_p quando $k_-(p) \neq k_+(p)$), cioè $\mathsf{I}_p(w_-(p), w_-(p)) = \mathsf{I}_p(w_+(p), w_+(p)) = 1$ e $\mathsf{I}_p(w_-(p), w_+(p)) = 0$. Si noti che quindi vale $L_p w_\pm(p) = k_\pm(p) w_\pm(p)$ e che i $w_\pm(p)$ sono ortonormali rispetto al prodotto scalare euclideo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.*

- Se $\gamma\colon s \longmapsto \gamma(s) \in S$ è una curva regolare parametrizzata ad arco sulla superficie S, e $p = \gamma(s_0)$, allora

  $$T(s_0) = \mathsf{I}_p(T(s_0), w_-(p))w_-(p) + \mathsf{I}_p(T(s_0), w_+(p))w_+(p) = (\cos\alpha)w_-(p) + (\sin\alpha)w_+(p).$$

  Si ottengono quindi, usando $L_p w_\pm(p) = k_\pm(p)w_\pm(p)$ e la bilinearità di II_p, le seguenti *formule di Eulero*:

  $$k_n(s_0) = \mathsf{II}_p(T(s_0), T(s_0)) = (\cos\alpha)^2 k_-(p) + (\sin\alpha)^2 k_+(p).$$

3.4 Curvatura di Gauss e Curvatura Media

Si definiscono le seguenti funzione su S, superficie regolare:

- **La curvatura di Gauss:** in ogni punto $p \in S$ essa è data da

  $$K(p) = k_-(p)k_+(p) = \frac{\mathsf{eg} - \mathsf{f}^2}{EG - F^2} = \det(\mathsf{L_p}).$$

- **La curvatura media:** in ogni punto $p \in S$ essa è data da

  $$H(p) = \frac{k_-(p) + k_+(p)}{2} = \frac{G\mathsf{e} + E\mathsf{g} - 2F\mathsf{f}}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathsf{L_p}).$$

- **Osservazione importante.** Date $K(p)$ e $H(p)$, le curvature principali sono le soluzioni dell'equazione

  $$\det(\mathsf{L_p} - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathsf{L_p})\lambda + \det(\mathsf{L_p}) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0.$$

  Quindi si ha

  $$k_\pm(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

- Ogni punto $p \in S$ è classificato nella seguente maniera:
  - p è **ellittico** se $K(p) > 0$;
  - p è **iperbolico** se $K(p) < 0$;
  - p è **parabolico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$;
  - p è **piano** se $K(p) = H(p) = 0$;
  - p è un **ombelico** se $k_-(p) = k_+(p)$.
- Dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, usando la funzione *altezza di S relativamente a T_pS*, definita da $h_S\colon (u,v) \longmapsto \langle \varphi(u,v) - \varphi(u_0,v_0), \nu(p)\rangle = \mathsf{pr}_{\nu(p)}\big(\varphi(u,v) - \varphi(u_0,v_0)\big)$, si vedono le seguenti cose:
  - se $K(p) > 0$ allora c'è un intorno del punto p in $\mathbb{R}^3$ nel quale tutti i punti di S giacciono dalla **stessa parte** rispetto al piano tangente affine $p + T_pS$;
  - se $K(p) < 0$ allora c'è un intorno del punto p in $\mathbb{R}^3$ nel quale i punti di S si distribuiscono da **ambo le parti** rispetto al piano tangente affine $p + T_pS$.
- Vale la cosa seguente: *se tutti i punti di S sono ombelichi, allora S è contenuta in una sfera o in un piano.*
- Sia $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$. Il *paraboloide osculatore di S in $p = \varphi(u_0, v_0)$* è il paraboloide dello spazio $\mathbb{R}^3_{(u,v,h_S)}$ di equazione

$$h_S = \frac{1}{2}\left\langle \begin{bmatrix} \mathsf{e}(u_0,v_0) & \mathsf{f}(u_0,v_0) \\ \mathsf{f}(u_0,v_0) & \mathsf{g}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

- **Osservazione importante.** I concetti di prima e seconda forma fondamentale, mappe di Gauss e Weingarten, curvature normali, geodetiche e principali, curvatura di Gauss e curvatura media **si estendono** anche al caso di **superfici parametrizzate** (cioè non necessariamente regolari) purché si restringa l'attenzione ai soli **punti regolari**.

3.5 Teoremi importanti

- **Teorema.** (Prima parte del Teorema fondamentale della teoria delle superfici, di Bonnet) *Date le superfici regolari S_j, di parametrizzazioni rispettive $\varphi_j\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$ (stesso insieme D) si supponga che, avendo scelto (come sempre) $\nu_{\varphi_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right\|$, $j = 1, 2$, si abbia*

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1}(u,v) & F_{\varphi_1}(u,v) \\ F_{\varphi_1}(u,v) & G_{\varphi_1}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\varphi_2}(u,v) & F_{\varphi_2}(u,v) \\ F_{\varphi_2}(u,v) & G_{\varphi_2}(u,v) \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathsf{e}_{\varphi_1}(u,v) & \mathsf{f}_{\varphi_1}(u,v) \\ \mathsf{f}_{\varphi_1}(u,v) & \mathsf{g}_{\varphi_1}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{e}_{\varphi_2}(u,v) & \mathsf{f}_{\varphi_2}(u,v) \\ \mathsf{f}_{\varphi_2}(u,v) & \mathsf{g}_{\varphi_2}(u,v) \end{bmatrix},$$

per tutti gli $(u,v) \in D$. Allora esiste una rototraslazione R dello spazio $\mathbb{R}^3$ in sè tale che $\varphi_1 = R \circ \varphi_2$. In particolare $S_1 = R(S_2)$.

- **Theorema Egregium.** (Gauss) *La curvatura di Gauss K è* **intrinseca**, *cioè dipende* **solamente** *dalla prima forma fondamentale.*
  Una delle dimostrazioni è data dalla seguente formula (dovuta a F.Brioschi)

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)(EG - F^2) + \right.$$

$$\left. + \det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{bmatrix}\right].$$

3.6 Superfici di rotazione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, sia $I_0 \subset I$, con $I = [a, b]$ se $a, b \in \mathbb{R}$ ovvero $(-\infty, b]$ o $[a, +\infty)$ se $a = -\infty$ o $b = +\infty$, rispettivamente. Siano $r, h \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni C^∞, con $r(u) \geq 0$ per $u \in I$ e $r(u) > 0$ per $u \in I_0$, e tali che $r'(u)^2 + h'(u)^2 \neq 0$ per $u \in I$. Una *superficie di rotazione* è una superficie **semplice e regolare** di $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare la curva regolare, chiamata *curva generatrice*, $u \longmapsto (r(u), h(u)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ (essa è regolare in quanto $(r')^2 + (h')^2 \neq 0$) del piano x, z intorno all'asse z. Si ottiene quindi una parametrizzazione

$$\varphi \colon (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = \Big(r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u)\Big), \quad (u, v) \in I_0 \times (0, 2\pi).$$

In questo caso

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}}\begin{bmatrix} -h'(u)\cos v \\ -h'(u)\sin v \\ r'(u) \end{bmatrix},$$

e, relativamente alla base $\partial\varphi/\partial u$, $\partial\varphi/\partial v$, si hanno le formule:

- la matrice della prima forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} r'(u)^2 + h'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{bmatrix};$$

- la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{r(u)h'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- la matrice della mappa di Weingarten è

$$\begin{bmatrix} \dfrac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{h'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- si noti che se si pone

$$k_1 = k_1(u) := \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}},$$

allora $|k_1|$ è la curvatura della curva generatrice $u \longmapsto (r(u), h(u))$;

- la curvatura di Gauss e la curvatura media sono date rispettivamente dalle funzioni

$$K = \frac{h'}{r}\frac{r'h'' - h'r''}{((r')^2 + (h')^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2\sqrt{(r')^2 + (h')^2}}\left(\frac{r'h'' - h'r''}{(r')^2 + (h')^2} + \frac{h'}{r}\right).$$

- I meridiani, per esempio parametrizzati ad arco, $s \longmapsto \gamma_{v_0}(s) = \varphi(u(s), v_0)$ (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale $\dot{u}(s) = 1/\sqrt{r'(u(s))^2 + h'(u(s))^2}$), sono **curve geodetiche**: $k_g(s) = 0$.

- I paralleli, per esempio parametrizzati ad arco, $s \longmapsto \gamma_{u_0}(s) = \varphi(u_0, v(s))$ (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale $\dot{v}(s) = 1/r(u_0)$), sono **curve geodetiche** se e solo se $r'(u_0) = 0$, cioè se e solo se il relativo vettore velocità della curva generatrice è nella direzione dell'asse z quando $u = u_0$. Infatti si ha

$$k_g(s) = \frac{r'(u_0)}{r(u_0)\sqrt{r'(u_0)^2 + h'(u_0)^2}} = 0 \iff r'(u_0) = 0.$$

- **Denfinizione.** *Data la superficie di rotazione S, definiamo S_c ("completamento" di S) la superficie ottenuta facendo ruotare la curva generatrice di un intero angolo 2π. Si ha quindi che S_c è ottenuta da S aggiungendo ad S il meridiano*

$$C_0 := \{(r(u), 0, h(u));\ u \in I_0\}.$$

- **Il Teorema di Clairaut.** *Sia S una superficie di rotazione parametrizzata dalla mappa $\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)u\sin v, h(u))$. Se una curva regolare $\psi\colon s \longmapsto \psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$ (con s parametro d'arco di ψ) è una geodetica allora, detto $\theta(s) \in [0,\pi]$ l'angolo formato dalla curva ed il parallelo $v \longmapsto \varphi(u(s), v)$ nel punto $\psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$, si ha*

$$s \longmapsto r(u(s))\cos\theta(s) = \text{costante}.$$

3.7 Superfici rigate

Siano $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva (non necessariamente regolare né semplice), e sia $X\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale, con $\|X(u)\| \neq 0$ per tutti gli $u \in I$. (Quando $I = [a,b]$ e γ è **chiusa** si richiede qui che sia $X(a) = X(b)$.)
Una *superficie rigata* è una *superficie parametrizzata dalla funzione*

$$\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \gamma(u) + vX(u), \quad (u,v) \in I \times \mathbb{R}.$$

La curva γ è chiamata una *direttrice* della superficie. La retta contenuta nella superficie passante per il punto $\varphi(u_0, v_0)$ è l'insieme $R(u_0) := \{\gamma(u_0) + vX(u_0);\ v \in \mathbb{R}\}$. Essa è chiamata una *retta generatrice.* La superficie si dice *non cilindrica* se $\|X'(u)\| \neq 0$ per tutti gli $u \in I$.

- **Definizione.** *Diciamo che una superficie S di* **rotazione** *è* rigata *se lo è la superficie* S_c.

Si hanno i seguenti esempi:

- **Cono sopra la curva γ:** presa γ regolare, fissato $P_0 \notin \gamma(I)$, si considera

$$\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \gamma(u) + v\Big(P_0 - \gamma(u)\Big), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Cilindro sopra la curva γ:** presa γ regolare, fissato il vettore (costante non nullo) $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, si considera

$$\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \gamma(u) + v\vec{w}, \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Iperboloide ad una falda:** si prendono $a, b, c > 0$, $\gamma\colon u \longmapsto (a\cos u, b\sin u, 0)$, e $X\colon u \longmapsto \gamma'(u) + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-a\sin u, b\cos u, c)$. Allora

$$\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \Big(a(\cos u - v\sin u), b(\sin u + v\cos u), cv\Big), \quad u \in [0, 2\pi], \ v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

- **L'elicoide:** si sceglie $c > 0$ e si considera $X(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$. In questo caso γ è la curva $u \longmapsto (0, 0, cu)$. Allora

$$\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, cu), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- **Il paraboloide iperbolico:** presi $a, b > 0$, si considerano varie possibilità:

  - si prende $\gamma\colon u \longmapsto (au, 0, u^2)$, $X_\pm\colon u \longmapsto \begin{bmatrix} a \\ \pm b \\ 2u \end{bmatrix}$, e $\varphi_\pm\colon (u,v) \longmapsto \varphi_\pm(u,v) = \gamma(u) + vX_\pm(u)$, $u, v \in \mathbb{R}$;

  - si prende $\sigma_\pm\colon u \longmapsto (au, \pm bu, 0)$, $Y_\pm\colon u \longmapsto \begin{bmatrix} a \\ \mp b \\ 4u \end{bmatrix}$, e $\psi_\pm\colon (u,v) \longmapsto \psi_\pm(u,v) = \sigma_\pm(u) + vY_\pm(u)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

  In tutti i casi l'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

- Per le superfici rigate si ha sempre

$$E = \left\|\gamma'(u) + vX'(u)\right\|^2, \; G = \|X(u)\|^2, \; F = \left\langle\gamma'(u) + vX'(u), X(u)\right\rangle,$$

per cui nei punti regolari (cioè i punti nei quali $EG - F^2 \neq 0$)

$$\mathsf{e} = \frac{\det\left[\gamma''(u) + vX''(u)\left|\gamma'(u) + vX'(u)\right| X(u)\right]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \mathsf{g} = 0,$$

$$\mathsf{f} = \frac{\det\left[X'(u)\left|\gamma'(u)\right| X(u)\right]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Perciò per le superfici rigate, nei punti regolari, vale sempre

$$K = -\frac{\mathsf{f}^2}{EG - F^2} = -\left(\frac{\det\left[X'(u)\left|\gamma'(u)\right| X(u)\right]}{EG - F^2}\right)^2 \leq 0,$$

e le rette contenute nella superficie (cioè che "rigano" la superficie) sono geodetiche.

- Si ha che *le uniche superfici di rotazione che sono anche rigate, ottenute facendo ruotare una retta dello spazio, sono quelle con $K = 0$ e l'iperboloide ad una falda $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ quando $K < 0$.*

- **La superficie tangente, normale e binormale ad una curva:** sia $\gamma\colon I \ni s \longmapsto \gamma(s)$ una curva regolare e biregolare parametrizzata ad arco.
  - La superficie **tangente** è la superficie parametrizzata da

    $$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vT(s), \quad s \in I, \; v \in \mathbb{R}.$$

  - La superficie **normale** è la superficie parametrizzata da

    $$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vN(s), \quad s \in I, \; v \in \mathbb{R}.$$

  - La superficie **binormale** è la superficie parametrizzata da

    $$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vB(s), \quad s \in I, \; v \in \mathbb{R}.$$

  È importante notare che la definizione si estende facilmente a curve non necessariamente parametrizzate ad arco.

- **Il nastro di Möbius** (non è orientabile): presi $R \geq 1$ e $0 < \varepsilon < R/2$, si considera

$$\varphi\colon [0, 2\pi] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto \Big((R + v\sin\frac{u}{2})\sin u, (R - v\sin\frac{u}{2})\cos u, v\cos\frac{u}{2}\Big).$$

Pertanto la curva direttrice γ ed il campo di direzioni X sono dati, rispettivamente, da

$$\gamma(u) = (R\sin u, R\cos u, 0), \quad X(u) = (\sin\frac{u}{2}\sin u, -\sin\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}).$$

3.8 Superfici sviluppabili

Una superficie rigata parametrizzata da $\varphi\colon (u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \gamma(u)+vX(u)$ (stesse notazioni della sezione precedente) con $\|X\| = 1$ si dice *sviluppabile* quando

$$\det\left[\gamma' \left| X' \right| X\right] = 0.$$

Nei punti regolari (cioè nei punti in cui $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0$) si ha che

$$\mathsf{g} = 0, \quad \mathsf{f} = -\frac{\det\left[\gamma' \left| X' \right| X\right]}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|} = 0,$$

e quindi $K = 0$ in tali punti. Di conseguenza per queste superfici nei punti regolari vale sempre

$$K = 0 \iff \det\left[\gamma' \left| X' \right| X\right] = 0.$$

Si hanno i fatti seguenti.

- Un utile criterio per riconoscere le superfici sviluppabili è dato dalla seguente proposizione.

  Proposizione. *Sia S una superficie rigata parametrizzata da $\varphi(u,v) = \gamma(u) + vX(u)$. Allora S è sviluppabile se e solo se, per ogni u, S ha lo stesso piano tangente (piano tangente vettoriale) in tutti i punti della retta generatrice $R(u)$.*

- **Proposizione.** *Sia $s \longmapsto \gamma(s)$ una curva (regolare e biregolare) parametrizzata ad arco. Allora la superficie tangente è sempre sviluppabile. Le superfici normale e binormale sono sviluppabili se e solo se la curva è planare.*

  Osservazione. *La proposizione vale anche per curve non necessariamente parametrizzate ad arco.*

- La direzione principale relativa alla curvatura principale 0 è $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = X$. (In questo caso essa è anche di lunghezza 1.)

- **Teorema.** *Una superficie rigata S è sviluppabile se e solo se una delle seguenti condizioni (equivalenti) è soddisfatta:*

  (i) $K = 0$;

  (ii) La superficie è localmente isometrica ad un piano (cioè localmente diffeomorfa in modo da conservare la prima forma fondamentale), e le rette generatrici $\{vX(u);\ v \in \mathbb{R}\}$ rimangono direzioni principali.

- **Osservazione.** Se non si suppone che $\|X\| = 1$, ma solo che $\|X\| \neq 0$, è ancora vero che $K = 0$ se e solo se $\det\left[\gamma' \left| X' \right| X\right] = 0$ nei punti regolari. In questo caso però la direzione principale di lunghezza 1 relativa alla curvatura principale 0 è data da $\dfrac{1}{\|X\|}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{X}{\|X\|}$.

3.9 Parametrizzazioni di alcune superfici notevoli

- **Ellissoide:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad u \in (0, \pi),\ v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nel caso in cui $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)^2} > 0.$$

- **Toro:** $0 < r_1 < r_2$,

$$\varphi(u,v) = \Big((r_1 \cos u + r_2) \cos v, (r_1 \cos u + r_2) \sin v, r_1 \sin u\Big), \quad u, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_2\right)^2 + z^2 = r_1^2.$$

La curvatura di Gauss è

$$K = \frac{\cos u}{r_1(r_1 \cos u + r_2)}.$$

- **Cono:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u,v) = (au \cos v, bu \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

e la curvatura di Gauss $K = 0$.

- **Paraboloide ellittico:** $a, b > 0$,

$$\varphi(u,v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2), \quad u \in (0, +\infty),\ v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nel caso in cui $a = b$ la superficie è di rotazione con curvature di Gauss

$$K = \frac{4}{(4u^2 + a^2)^2} > 0.$$

- **Paraboloide iperbolico:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con $a, b > 0$,

$$\varphi(u,v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

La curvatura di Gauss è $K < 0$.

- **Elicoide:** come già visto, con $c > 0$,

$$\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, cu), \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

La curvatura di Gauss è facilmente calcolabile (utilizzando la formula per le superfici rigate) ed è

$$K = -\frac{c^2}{(c^2+v^2)^2} < 0.$$

- **Iperboloide ad una falda:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con $a,b,c > 0$,

$$\varphi(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in (0,2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2\sinh^2 u + c^2\cosh^2 u)^2} < 0.$$

- **Iperboloide a due falde:** $a,b,c > 0$,

$$\varphi_\pm(u,v) = (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, \pm c\cosh u), \quad u \in (0,+\infty),\ v \in (0,2\pi),$$

dove φ_+ parametrizza la falda contenuta nel semipiano $z > 0$, mentre φ_- parametrizza la falda contenuta nel semipiano $z < 0$. L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2\cosh^2 u + c^2\sinh^2 u)^2} > 0.$$

- **Cilindro:** $a,b > 0$,

$$\varphi(u,v) = (a\cos v, b\sin v, u), \quad u \in \mathbb{R},\ v \in (0,2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss $K = 0$.

- **Pseudosfera di Beltrami:** $a,b,c > 0$,

$$\varphi(u,v) = \left(ae^{-u}\cos v, be^{-u}\sin v, c\int_0^u \sqrt{1-e^{-2t}}dt\right), \quad u \in (0,+\infty),\ v \in (0,2\pi).$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{\left(a^2e^{-2u} + c^2(1-e^{-2u})\right)^2} < 0.$$

Se $a = b = c$ allora

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

- **Catenoide:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R}, \ v \in (0, 2\pi).$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 \sinh^2 u + c^2)^2} < 0.$$

- **Sella di scimmia:**

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Tutti i punti di questa superficie sono iperbolici, ad eccezione dell'origine, unico punto piano isolato.

- **Grafici:** data $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione infinitamente differenziabile, si considera

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Si ha

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\partial f/\partial u \\ -\partial f/\partial v \\ 1 \end{bmatrix},$$

e, nella base usuale $\partial\varphi/\partial u$, $\partial\varphi/\partial v$:

  - la prima forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

  - la seconda forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{bmatrix}.$$

  - la curvatura di Gauss è data da

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)^2}.$$

Testi di riferimento:

[1] P.Albano e A.Parmeggiani, *Elementi Introduttivi di Matematica.* Cesena 2002.

[2] Santiago Calatrava, *Santiago Calatrava: Conversations with Students - The MIT Lectures.* Princeton Architectural Press 2002.

[3] M.Emmer, *Mathland. Dal mondo piatto alle ipersuperfici.* Universale di Architettura, 143, 2003.

[4] L.Molinari, *Santiago Calatrava.* 01 Biblioteca di Architettura, Skira 1998.

[5] A. Parmeggiani, *Il concetto di Forma in Matematica: il corso di Matematica Applicata*, Architettura **3**, Facoltà di Architettura dell'Università di Bologna, sede di Cesena 2002.

[6] A.Parmeggiani, *Note del corso di Matematica Applicata (all'Architettura)*, in fase di preparazione.

[7] G.Pizzetti e A.M.Zorgno Trisciuoglio, *Principi Statici e Forme Strutturali.* UTET, 1980. (Capitolo III)

[8] D.Schodek, *Strutture.* Patron Editore. Bologna 2004.

[9] E.Sernesi, *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, 2001.

Letture utili.

[HC] D.Hilbert e S.Cohn-Vossen, *Geometria Intuitiva.* Bollati Boringhieri, 2001.

[SC] N.Sala, G.Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura* (Presentazione di Mario Botta). Serie di Architettura FrancoAngeli 2003.

[Ka] W.Kandkinsky, *Punto Linea Superficie.* Biblioteca Adelphi 16. Adelphi Edizioni, Milano, 2006.

Altri testi utili:

[CRE] E.Cohen, R.F.Riesenfeld e G. Elber, *Geometric Modeling with Splines - An Introduction.* A.K. Peters, 2001.

[dC] M.P.do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, 1976.

[F] W. Flugge, *Stresses in Shells.* Second edition. Springer Verlag, 1960.

[K] W.Kühnel, *Differential Geometry (Curves-surfaces-manifolds).* Student Mathematical Library, 16. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[S] D.J.Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry - 2nd Edition.* Dover, 1961.

[G] A.Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica.* CRC Press, 1998.