

PROGRAMMA (E NOTE) DI MATEMATICA APPLICATA (ALL'ARCHITETTURA)

Corso di Laurea in ARCHITETTURA
A.A. 2011/2012 (Alberto PARMEGGIANI)

Indice

1	Richiami di Algebra Lineare	1
1.1	Classificazione delle coniche a centro di \mathbb{R}^2	1
2	Geometria delle curve di \mathbb{R}^3	2
2.1	Curve parametrizzate ad arco	2
2.2	Formule per le curve non necessariamente parametrizzate ad arco	4
2.3	Curve Bézier	4
3	Geometria delle superfici di \mathbb{R}^3	5
3.1	La prima forma fondamentale	7
3.2	Curvatura normale e curvatura geodetica di una curva di S	8
3.3	La seconda forma fondamentale	10
3.4	Curvatura di Gauss e Curvatura Media	12
3.5	Teoremi importanti	13
3.6	Superfici di rotazione	14
3.7	Superfici rigate	15
3.8	Superfici sviluppabili	17
3.9	Parametrizzazioni di alcune superfici notevoli	18

Avvertenza: Tutte le funzioni qui considerate sono *sufficientemente differenziabili*, cioè esse sono continue insieme alle loro derivate (ordinarie o parziali) fino ad un ordine sufficiente a giustificare rigorosamente tutte le definizioni e le formule date nel seguito (tale ordine di derivazione sarà sempre almeno 3).

1 Richiami di Algebra Lineare

Si veda anche il programma relativo al Corso di Istituzioni di Matematiche I, a.a. 2002/2003, nella pagina web <http://www.dm.unibo.it/~parmeggi>.

1.1 Classificazione delle coniche a centro di \mathbb{R}^2

Data la forma quadratica $Q(x_1, x_2) := \langle A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rangle + c$, dove $A \neq 0$ è una matrice simmetrica e $c \in \mathbb{R}$, la *conica a centro* di \mathbb{R}^2 di equazione $Q(x_1, x_2) = 0$ è un insieme del tipo

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; Q(x_1, x_2) = 0\}.$$

La classificazione euclidea di C dice che *si può sempre trovare una rotazione degli assi R tale che nelle nuove coordinate (y_1, y_2) , legate alle (x_1, x_2) tramite la relazione $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$*

${}^tR \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, l'insieme C è descritto da

$$C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0\},$$

dove $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sono gli autovalori di A . Si hanno le seguenti possibilità:

- Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c < 0$, oppure se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c > 0$, allora C è **un'ellisse**;
- Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c > 0$, oppure se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c < 0$, allora $C = \emptyset$;
- Se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ e $c = 0$, oppure se $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ e $c = 0$, allora $C = \{(0, 0)\}$;
- Se $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ e $c < 0$, oppure se $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ e $c > 0$, allora C è **l'unione di una coppia di rette parallele**;
- Se $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ e $c = 0$, allora C è **l'asse y_1** ;
- Se $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$ e $c = 0$, allora C è **l'asse y_2** ;
- Se λ_1 e λ_2 hanno segno discorde e $c \neq 0$, allora C è **un'iperbole**;
- Se λ_1 e λ_2 hanno segno discorde e $c = 0$, allora C è **l'unione di una coppia di rette che si intersecano nell'origine**.

2 Geometria delle curve di \mathbb{R}^3

Le curve sono funzioni sufficientemente differenziabili $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove I è un intervallo. Una curva si dice *semplice* quando $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per ogni scelta di $t_1, t_2 \in I$ con almeno uno tra t_1 e t_2 interno ad I . Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. La *velocità* di una curva è il vettore $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'$. Una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *regolare* quando $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in I$. Due curve $\gamma_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$, si dicono **equivalenti** quando esiste un cambiamento di parametro $p: I_1 \ni t \mapsto p(t) = \tilde{t} \in I_2$, continuo con derivata continua sempre $\neq 0$ su I_1 , tale che $\gamma_1(t) = (\gamma_2 \circ p)(t)$; in particolare si ha che $\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$. *Ascissa curvilinea* (detta anche *lunghezza d'arco*): essa è data dalla relazione $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$. Data la curva $\psi: s \mapsto \psi(s)$, s ascissa curvilinea, si denoterà sempre con $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{ds}$ la sua velocità. Ogni curva regolare γ è sempre equivalente ad una curva ψ parametrizzata ad arco (cioè parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea); infatti la curva $\psi: s \mapsto \psi(s) = \gamma(t(s))$, dove $t(s)$ è la funzione **inversa** della funzione $t \mapsto s(t)$, è parametrizzata ad arco ed è equivalente a γ .

2.1 Curve parametrizzate ad arco

Sia $\gamma: I \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ parametrizzata ad arco e biregolare (cioè $\ddot{\gamma} \neq 0$ su tutto I).

- **Triedro fondamentale di Frénet nel punto $\gamma(s_0)$:**

$$T(s_0) = \dot{\gamma}(s_0), \quad N(s_0) = \frac{\dot{T}(s_0)}{\|\dot{T}(s_0)\|}, \quad B(s_0) = T(s_0) \times N(s_0).$$

- **Curvatura $k(s_0)$ e Torsione $\tau(s_0)$ nel punto $\gamma(s_0)$:**

$$k(s) = \|\dot{T}(s)\|, \quad \tau(s) = \langle \dot{B}(s), N(s) \rangle.$$

- Formule di Frénet:

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = & k(s)N(s) \\ \dot{N}(s) = & -k(s)T(s) & -\tau(s)B(s) \\ \dot{B}(s) = & \tau(s)N(s). \end{cases}$$

- Equazioni cartesiane del piano **rettificante** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{T, B\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle N(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **normale** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{N, B\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle T(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazioni cartesiane del piano **osculatore** della curva (cioè il piano delle direzioni $\{T, N\}$) nel punto $\gamma(s_0)$:

$$\left\langle B(s_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \gamma(s_0) \right\rangle = 0.$$

- Equazione parametrica della circonferenza **osculatrice** $C(\gamma; s_0)$ della curva nel punto $\gamma(s_0)$:

$$C(\gamma; s_0) = \left\{ \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \left((\cos \theta)T(s_0) + (\sin \theta)N(s_0) \right); \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

- **Osservazione.** Se $k(s) = 0$, per tutti gli $s \in I$, allora γ è un segmento di retta.
- Se $k(s)$ è una costante $\neq 0$ (quindi > 0) e $\tau(s) = 0$ per tutti gli $s \in I$ allora γ è un arco di circonferenza.

- Se $k(s_0), \tau(s_0) \neq 0$, la **sfera osculatrice** della curva nel punto $\gamma(s_0)$ è la sfera il cui centro $c(s_0)$ e raggio $r(s_0)$ sono rispettivamente

$$c(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0)k(s_0)^2}B(s_0), \quad r(s_0) = \frac{1}{k(s_0)^2} + \left(\frac{\dot{k}(s_0)}{\tau(s_0)k(s_0)^2} \right)^2.$$

- Se $k(s), \tau(s) \neq 0$ per tutti gli $s \in I$, allora la curva γ è contenuta in una sfera (e quindi nella sua sfera osculatrice) se e solo se vale la relazione

$$\frac{\tau(s)}{k(s)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{k}(s)}{\tau(s)k(s)^2} \right), \quad \forall s \in I.$$

- Fissato $s_0 \in I$, ed interno ad I , la formula di Taylor per s vicino ad s_0 dà

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \dot{\gamma}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\gamma}{ds^3}(s_0)(s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3).$$

Usando le equazioni di Frénet in $\gamma(s_0)$ si ottiene allora che le curve proiezioni della curva $s \mapsto \gamma(s)$ sui piani rettificante, osculatore e normale in $\gamma(s_0)$ sono date, per s vicino ad s_0 , rispettivamente dalle curve

- **sul piano rettificante** (T, B):

$$s \mapsto \left(\langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)(s - s_0)^3 \right);$$

- **sul piano osculatore** (T, N):

$$s \mapsto \left(\langle \gamma(s_0), T(s_0) \rangle + (s - s_0), \langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2}k(s_0)(s - s_0)^2 \right);$$

- **sul piano normale** (N, B):

$$s \mapsto \left(\langle \gamma(s_0), N(s_0) \rangle + \frac{1}{2}k(s_0)(s - s_0)^2, \langle \gamma(s_0), B(s_0) \rangle - \frac{1}{6}k(s_0)\tau(s_0)(s - s_0)^3 \right).$$

- **Il Teorema di Frénet:** Dato $s \in I$, intervallo aperto di \mathbb{R} , e date le funzioni sufficientemente differenziabili $k: I \ni s \mapsto k(s) \in (0, +\infty)$ e $\tau: I \ni s \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}$, esiste $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, curva regolare, per la quale s è il parametro d'arco, k è la curvatura e τ è la torsione. Tale curva è **unica** a meno di **rototraslazioni** dello spazio \mathbb{R}^3 in sè.

2.2 Formule per le curve non necessariamente parametrizzate ad arco

Le formule per il triedro fondamentale, la curvatura e la torsione in un punto $\gamma(t_0)$ per curve per le quali t non è la lunghezza d'arco sono (ponendo $s_0 = s(t_0)$)

$$T(s_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \quad B(s_0) = \frac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}, \quad N(s_0) = B(s_0) \times T(s_0),$$

$$k(s_0) = \tilde{k}(t_0) = \frac{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3},$$

$$\tau(s_0) = \tilde{\tau}(t_0) = \frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma''(t_0) \times \gamma'(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2} = -\frac{\langle \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|^2}.$$

2.3 Curve Bézier

- Poligono di *controllo*: è un insieme $\{P_0, \dots, P_n\}$ di $n + 1$ punti (distinti) di \mathbb{R}^3 ;
- algoritmo di costruzione delle curve Bézier: dato il poligono di controllo $\{P_0, \dots, P_n\}$ e dato $t_0 \in [0, 1]$, il punto $\gamma(t_0)$ della curva Bézier viene costruito nel modo seguente

[Passo 1] per $k = 0, \dots, n$ si pone $P_k^{(0)}(t_0) = P_k$ (punti di prima generazione)

[Passo 2] per $j = 1, \dots, n$ si costruisce ricorsivamente la generazione j -esima a partire dalla generazione $j - 1$ -esima tramite la formula

$$P_k^{(j)}(t_0) = (1 - t_0)P_{k-1}^{(j-1)}(t_0) + t_0P_k^{(j-1)}(t_0), \quad k = j, \dots, n$$

[Passo 3] si pone $\gamma(t_0) = P_n^{(n)}$.

Facendo variare t_0 in $[0, 1]$ si ottiene l'intera curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata al poligono di controllo dato;

- forma analitica delle curve Bézier: *dato il poligono di controllo $\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^3$, la curva Bézier $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ad esso associata è data da*

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^n P_k \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k};$$

- la curva Bézier associata al poligono di controllo $\{P_0, \dots, P_n\}$ è *contenuta nell'involuppo convesso di tale poligono*;
- poiché

$$\gamma'(t) = \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} \left(k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \right) =,$$

si ha in particolare che

$$\gamma'(0) = n(P_1 - P_0), \quad \text{e} \quad \gamma'(1) = n(P_n - P_{n-1}),$$

cioè $\gamma'(0)$ è tangente al primo lato del poligono di controllo e $\gamma'(1)$ tangente all'ultimo lato del poligono di controllo;

- formule per le derivate successive in termini del poligono di riferimento: avendo definito le funzioni (“miscelatrici” di Bernstein) $\theta_{k,m}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$ con $k \leq m$, tramite la formula

$$\theta_{k,m}(t) := \frac{m!}{k!(m-k)!} t^k (1-t)^{m-k},$$

si ha

$$\gamma^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n-j} Q_{j,k} \theta_{k,n-j}(t)$$

(quindi $\gamma^{(j)}(t) = 0$ per tutti i $j \geq n + 1$), dove

$$\begin{cases} Q_{0,k} = P_k, \\ Q_{j,k} = (n-j+1) (Q_{j-1,k+1} - Q_{j-1,k}), \quad 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

3 Geometria delle superfici di \mathbb{R}^3

Nel seguito D è un sottoinsieme aperto e connesso (un dominio) di \mathbb{R}^2 che possiamo pensare essere o un rettangolo aperto della forma $(a, b) \times (c, d)$ oppure un cerchio della forma $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2\}$. Con \overline{D} si denoterà la **chiusura** (topologica) di D . Quindi $\overline{D} = [a, b] \times [c, d]$ nel primo caso, $\overline{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq r^2\}$ nel secondo. Quando $D = \mathbb{R}^2$ allora $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, e quando $D = (0, +\infty) \times (a, b)$ allora $\overline{D} = [0, +\infty) \times [a, b]$.

- Una *superficie regolare* dello spazio è un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ per il quale esiste una funzione sufficientemente differenziabile, chiamata (una) **parametrizzazione di S** , $\varphi: D \ni (u, v) \mapsto \varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$, tale che

- φ è **iniettiva** su D , cioè $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ implica $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$;
- vale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D$$

(questa condizione assicura che i vettori $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ siano **linearmente indipendenti** per ogni $(u, v) \in D$);

- vale $\varphi(D) = S$.
- Due superfici regolari $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, parametrizzate da $\varphi_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$, rispettivamente, si dicono essere **equivalenti** se esiste una funzione sufficientemente differenziabile ed invertibile con inversa sufficientemente differenziabile (cioè un *diffeomorfismo*), chiamato **cambiamento di parametri**, $f: D_1 \ni (u, v) \mapsto f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v)) = (u', v') \in D_2$, tale che $\varphi_1(u, v) = (\varphi_2 \circ f)(u, v)$. Si ha in particolare che $S_1 = S_2$.
- Si dice inoltre che una funzione sufficientemente differenziabile $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una *superficie parametrizzata* (in particolare non si richiede che φ sia iniettiva). I punti $p = \varphi(u, v)$ di $S = \varphi(D)$ nei quali $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0$ si dicono *punti regolari* di S , si dicono *punti singolari* altrimenti.
- **Osservazione.** Assumeremo tacitamente nel seguito che le parametrizzazioni considerate possano essere estese su tutto \overline{D} come funzioni continue, insieme a tutte le loro derivate parziali di ordine sufficientemente grande.

Data la superficie regolare S e dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$,

- il **piano tangente (la superficie S) in p** è il sottospazio vettoriale bidimensionale di \mathbb{R}^3 (passante quindi per l'origine) definito da

$$T_p S = \left\{ w = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\};$$

- il **piano tangente affine in p** è il piano passante per p e **parallelo** a $T_p S$, e cioè

$$p + T_p S = \{\varphi(u_0, v_0) + w; w \in T_p S\}.$$

- Si ha quindi che il piano tangente affine $p + T_p S$ in $p = \varphi(u_0, v_0)$ ha equazione cartesiana

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \varphi(u_0, v_0) \right\rangle = 0.$$

Data la superficie regolare S ,

- **definiamo** il *campo vettoriale normale* ad S essere il campo vettoriale

$$\nu_\varphi: (u, v) \mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}, \quad (u, v) \in D$$

(si noti che l'altra scelta possibile è $\nu_\varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$);

- se $\varphi_j: D_j \rightarrow S$ sono due possibili parametrizzazioni di S (con $f: (u, v) \mapsto (u', v')$ cambiamento di parametri) allora, indicati con ν_{φ_j} , $j = 1, 2$, i rispettivi campi normali, si ha la seguente legge di trasformazione

$$\nu_{\varphi_1}(u, v) = \frac{\det J_f(u, v)}{|\det J_f(u, v)|} \nu_{\varphi_2}(u', v'), \quad (u', v') = f(u, v),$$

dove $\det J_f$ è il determinante della matrice jacobiana di f , $J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}$;

- se si considerano quindi solo i cambiamenti di parametri f che abbiano $\det J_f > 0$ si può definire la funzione

$$\nu: S \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \nu(p) = \nu_\varphi(u, v),$$

dove $p = \varphi(u, v)$ e \mathbb{S}^2 è la sfera di centro l'origine e raggio 1 di \mathbb{R}^3 . Tale funzione è chiamata **mappa di Gauss**.

- Una superficie regolare S la cui mappa di Gauss ν risulta essere **continua su tutta** S si dice *superficie orientabile*. (Il nastro di Möbius non è orientabile.)

Dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0)$ della superficie regolare S , l'applicazione

$$i_{\varphi,p}: T_p S \ni w = w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \mapsto \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ciò vuol dire che $i_{\varphi,p}$ è lineare, cioè $i_{\varphi,p}(\alpha w + \beta w') = \alpha i_{\varphi,p}(w) + \beta i_{\varphi,p}(w')$ per ogni $w, w' \in T_p S$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e che $i_{\varphi,p}$ è invertibile con inversa anch'essa lineare. Identificheremo quindi il vettore $w \in T_p S$ con il vettore $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nel seguito $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ indicherà il prodotto scalare (euclideo) di \mathbb{R}^2 mentre quello di \mathbb{R}^3 rimarrà indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3.1 La prima forma fondamentale

Sia data la superficie regolare S e sia dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, e siano

$$w = w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad w' = w'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + w'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

due vettori di $T_p S$. Quindi

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

- Si definiscono le funzioni di (u, v)

$$E = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2, \quad G = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle.$$

- La *prima forma fondamentale di S in p* è la **forma quadratica** $l_p(w, w)$, $w \in T_p S$, dove $l_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ è la mappa bilineare (cioè simmetrica e lineare nel primo e nel secondo argomento) definita da

$$l_p(w, w') = \langle w, w' \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_p S,$$

dove

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

(La matrice che definisce l_p è quella indotta dall'isomorfismo $i_{\varphi, p}$).

- Dalla relazione $\|w \times w'\|^2 = \|w\|^2 \|w'\|^2 - \langle w, w' \rangle^2$, si ottiene

$$EG - F^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

(per ipotesi).

- l_p è **definita positiva**, cioè $l_p(w, w) \geq 0$ per ogni $w \in T_p S$ e $l_p(w, w) = 0$ se e solo se $w = 0$; ciò equivale a dire che per la relativa matrice si ha $EG - F^2 > 0$ (essendo $E > 0$ per costruzione).
- Quindi l_p è un prodotto scalare su ogni $T_p S$, chiamato anche *prodotto scalare intrinseco di S in p* o *metrica Riemanniana di S in p* . Si può perciò definire $\sqrt{l_p(w, w)}$ essere la lunghezza **intrinseca** del vettore tangente $w \in T_p S$.
- Se φ_j , $j = 1, 2$, sono parametrizzazioni equivalenti di S , cioè $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, con f cambiamento di parametri, allora

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1} & F_{\varphi_1} \\ F_{\varphi_1} & G_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^t J_f \begin{bmatrix} E_{\varphi_2} & F_{\varphi_2} \\ F_{\varphi_2} & G_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$

In particolare, con $p = \varphi_1(u_0, v_0) = \varphi_2(u'_0, v'_0)$, la l_p **non dipende dalla parametrizzazione scelta** φ_j .

- Se $T = \varphi(K) \subset S$, K un sottoinsieme chiuso e limitato di D , allora si definisce *area della porzione T di superficie* l'integrale

$$\text{Area}(T) = \iint_K \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

L'area **non dipende** dalla parametrizzazione scelta.

3.2 Curvatura normale e curvatura geodetica di una curva di S

Sia S una superficie regolare. Una curva regolare $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **contenuta** in S (oppure è **su** S) se $\gamma(I) \subset S$. Scriveremo $\varphi: I \rightarrow S$. In questo caso si può vedere che, almeno vicino ad ogni t_0 arbitrariamente fissato nella parte interna di I , $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, dove $t \mapsto (u(t), v(t))$ è una curva regolare (piana) contenuta in D . Si ha che γ è parametrizzata ad arco se e solo se $\|\gamma'\| = 1$, e poiché $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}S$ ciò equivale a dire $l_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1$.

Sia $\gamma: I \rightarrow S$ **parametrizzata ad arco**.

- Si definisce *vettore normale intrinseco* di γ in S nel punto $\gamma(s)$ il vettore

$$N_S(s) = \nu(\gamma(s)) \times T(s).$$

- Si definisce *curvatura geodetica* di γ in $\gamma(s)$

$$k_g(s) = \langle \ddot{\gamma}(s), N_S(s) \rangle = \det[\ddot{\gamma}(s) | \nu(\gamma(s)) | T(s)].$$

- Si definisce *curvatura normale* di γ in $\gamma(s)$

$$k_n(s) = \langle \ddot{\gamma}(s), \nu(\gamma(s)) \rangle.$$

- Siccome $\dot{\gamma}(s) = T(s)$ e quindi $\ddot{\gamma}(s) = \dot{T}(s) = k(s)N(s)$, essendo i vettori $T(s)$ e $N_S(s)$ una base ortonormale di $T_{\gamma(s)}S$, si ottiene la relazione

$$k(s)N(s) = k_g(s)N_S(s) + k_n(s)\nu(\gamma(s)),$$

da cui

$$k(s) = \sqrt{k_n(s)^2 + k_g(s)^2}.$$

In particolare si ha anche che

$$k_n(s) = k(s) \cos(\text{angolo}(N(s), \nu(\gamma(s)))).$$

- Poiché ogni curva regolare $\gamma: I \rightarrow S$ può essere riparametrizzata ad arco, la curvatura geodetica di una curva regolare qualsiasi (cioè non necessariamente parametrizzata ad arco), è la curvatura geodetica della curva equivalente a γ parametrizzata ad arco. In particolare si ha, per la curvatura geodetica in ogni punto $\gamma(t)$, la formula

$$k_g = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \times \gamma'(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det[\gamma''(t) | \nu(\gamma(t)) | \gamma'(t)].$$

La formula si verifica facilmente nella maniera seguente. Ricordando che

$$v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3, \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3,$$

che

$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad N_S = \nu \times \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}, \quad k = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3},$$

e quindi che

$$N = B \times T = \frac{-1}{\|\gamma'\| \|\gamma' \times \gamma''\|} \left(\langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma' - \|\gamma'\|^2 \gamma'' \right),$$

la formula segue dalla definizione

$$k_g = \langle kN, \nu \times T \rangle.$$

- Una curva regolare $\gamma: I \rightarrow S$ si dice essere una *geodetica* di S se $k_g = 0$ in tutti i punti $\gamma(t)$, $t \in I$.

Le geodetiche hanno la proprietà di essere le curve di lunghezza minima tra due punti arbitrari $p_0, p_1 \in S$, ma “abbastanza vicini” relativamente alla distanza sulla superficie

$$\text{dist}_S(p_0, p_1) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_S(p_0, p_1)} \text{lunghezza}(\gamma),$$

dove $\mathcal{C}_S(p_0, p_1)$ denota l'insieme delle curve regolari $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ tali che $\gamma(a) = p_0$ e $\gamma(b) = p_1$, e $\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

- Quindi tutte le rette contenute nella superficie sono **geodetiche** della superficie, poiché $k = 0 \Rightarrow k_g = 0$.
- La condizione di geodeticità significa che il piano osculatore **vettoriale** della curva (cioè il traslato per l'origine, parallelo al piano osculatore) contiene, **in ogni punto** $\gamma(t)$ della curva, il vettore normale ν , essendo in questo caso $k = |k_n|$, e quindi, essendo $kN = k_n\nu$, nei punti della curva risulta $N = \pm\nu$.
- Risulta allora immediato dal punto precedente che i cerchi massimi su una sfera sono curve geodetiche, e sono tutte e le sole curve geodetiche della superficie della sfera.

3.3 La seconda forma fondamentale

Sia S regolare, $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, e siano $w, w' \in T_p S$.

- Si definiscono le funzioni di (u, v)

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \\ \mathbf{g} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \\ \mathbf{f} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \nu \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mid \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

(Dati i vettori w, w', w'' di \mathbb{R}^3 , si indica con $[w|w'|w'']$ la matrice 3×3 le cui colonne sono i vettori w, w' e w'' , rispettivamente.)

- La *seconda forma fondamentale* di S in p è la **forma quadratica** $\mathbb{I}_p(w, w)$, $w \in T_p S$, dove $\mathbb{I}_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ è la mappa bilineare definita da

$$\mathbb{I}_p(w, w') = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall w, w' \in T_p S,$$

dove

$$w = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right), \quad w' = i_{\varphi, p}^{-1} \left(\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} \right).$$

(La matrice che definisce \mathbb{I}_p è quella indotta dall'isomorfismo $i_{\varphi, p}$).

- Se $\varphi_j, j = 1, 2$, sono parametrizzazioni *positivamente equivalenti* di S , cioè $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$, con f cambiamento di parametri tale $\det J_f > 0$, allora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_1} & \mathbf{f}_{\varphi_1} \\ \mathbf{f}_{\varphi_1} & \mathbf{g}_{\varphi_1} \end{bmatrix} = {}^t J_f \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_2} & \mathbf{f}_{\varphi_2} \\ \mathbf{f}_{\varphi_2} & \mathbf{g}_{\varphi_2} \end{bmatrix} J_f.$$

In particolare la \mathbb{I}_p **dipende solamente dalla scelta di ν** (e cioè dall'aver scelto $\nu_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$ invece di $\nu_\varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$).

- Se $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in S$ è parametrizzata ad arco, cioè $\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1$, allora

$$\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = k_n(s).$$

Si noti allora che in generale per una curva regolare $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in S$, **non** necessariamente parametrizzata ad arco, la curvatura normale k_n della curva γ nel punto $p = \gamma(t_0) \in S$ è data dalla formula

$$k_n = \frac{\mathbb{I}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}{\mathbb{I}_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}.$$

- **Teorema.** (Meusnier) *Se $\gamma_j: s_j \mapsto \gamma_j(s_j) \in S$, s_j parametro d'arco relativo a γ_j , $j = 1, 2$ rispettivamente, sono curve tali che $\gamma_1(s_{1,0}) = \gamma_2(s_{2,0}) = p$ e $\dot{\gamma}_1(s_{1,0}) = \pm \dot{\gamma}_2(s_{2,0})$, allora $k_{n,\gamma_1}(s_{1,0}) = k_{n,\gamma_2}(s_{2,0})$.*

- Poiché ogni curva regolare è riparametrizzabile ad ascissa d'arco, il teorema di Meusnier può essere anche enunciato dicendo che *due curve regolari $\gamma_j: I_j \rightarrow S$, $j = 1, 2$, che passano per lo stesso punto $p \in S$ ed ivi hanno la stessa **retta tangente**, hanno in p la stessa curvatura normale.*

- Il teorema di Meusnier permette di selezionare tra tutte le curve regolari su S passanti per un punto $p \in S$ le *sezioni normali di S in p nella direzione $v \in T_p S$* (si ricordi che una direzione è un vettore diverso da zero). Esse sono curve ottenute intersecando S con il piano per p di direzioni $\nu(p)$ e v (vicino a p tali sezioni sono sempre curve regolari). La curvatura di una sezione normale è quindi il valore assoluto della rispettiva curvatura normale. Il teorema di Meusnier può essere quindi riformulato dicendo che *il valore assoluto della curvatura normale nel punto $p = \gamma(t_0) \in S$ di una curva regolare γ su S passante per p eguaglia la curvatura in p della sezione normale di S in p nella direzione $\pm \gamma'(t_0)$* . In particolare, il piano osculatore di una sezione normale di S in un punto p nella direzione $v \in T_p S$ coincide con il piano per p e direzioni v e $\nu(p)$.

- Le *curvature principali* $k_-(p), k_+(p)$ di S in p sono

$$k_-(p) = \min_{w \in C_S(p)} \mathbb{I}_p(w, w), \quad k_+(p) = \max_{w \in C_S(p)} \mathbb{I}_p(w, w),$$

dove $C_S(p)$ è la conica a centro di $T_p S$ definita da

$$C_S(p) = \{w \in T_p S; \mathbb{I}_p(w, w) = 1\}.$$

- La *mappa di Weingarten* (o *operatore forma*) di S in p è l'applicazione lineare

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

definita dalla relazione

$$\mathbb{I}_p(w, w') = \mathbb{I}_p(L_p w, w'), \quad \forall w, w' \in T_p S.$$

- La mappa di Weingarten L_p è **simmetrica rispetto ad \mathbf{l}_p** , cioè

$$\mathbf{l}_p(L_p w, w') = \mathbf{l}_p(w, L_p w'), \quad \forall w, w' \in T_p S.$$

- La mappa di Weingarten L_p ammette la seguente rappresentazione matriciale \mathbf{L}_p nella base di $T_p S$ data da $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\}$ (cioè la matrice \mathbf{L}_p che definisce L_p è quella indotta dall'isomorfismo $i_{\varphi,p}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_p &= \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2} \begin{bmatrix} G(u_0, v_0) & -F(u_0, v_0) \\ -F(u_0, v_0) & E(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- **Teorema.** (Rodrigues) *Le curvatures principali $k_{\pm}(p)$ di S in p sono gli autovalori della matrice \mathbf{L}_p . Denotati con $\tilde{w}_{\pm}(p) \in \mathbb{R}^2$ i rispettivi autovettori, i vettori $w_{\pm}(p) = i_{\varphi,p}^{-1}(\tilde{w}_{\pm}(p)) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ si chiamano **direzioni principali**, e possono essere **sempre scelti ortonormali rispetto a \mathbf{l}_p** (sono automaticamente ortogonali rispetto a \mathbf{l}_p quando $k_-(p) \neq k_+(p)$), cioè $\mathbf{l}_p(w_-(p), w_-(p)) = \mathbf{l}_p(w_+(p), w_+(p)) = 1$ e $\mathbf{l}_p(w_-(p), w_+(p)) = 0$. Si noti che quindi vale $L_p w_{\pm}(p) = k_{\pm}(p)w_{\pm}(p)$ e che i $w_{\pm}(p)$ sono ortonormali rispetto al prodotto scalare euclideo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di \mathbb{R}^3 .*

- Se $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in S$ è una curva regolare parametrizzata ad arco sulla superficie S , e $p = \gamma(s_0)$, allora

$$T(s_0) = \mathbf{l}_p(T(s_0), w_-(p))w_-(p) + \mathbf{l}_p(T(s_0), w_+(p))w_+(p) = (\cos \alpha)w_-(p) + (\sin \alpha)w_+(p).$$

Si ottengono quindi, usando $L_p w_{\pm}(p) = k_{\pm}(p)w_{\pm}(p)$ e la bilinearità di \mathbf{l}_p , le seguenti formule di Eulero:

$$k_n(s_0) = \mathbf{l}_p(T(s_0), T(s_0)) = (\cos \alpha)^2 k_-(p) + (\sin \alpha)^2 k_+(p).$$

3.4 Curvatura di Gauss e Curvatura Media

Si definiscono le seguenti funzione su S , superficie regolare:

- **La curvatura di Gauss:** in ogni punto $p \in S$ essa è data da

$$K(p) = k_-(p)k_+(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \det(\mathbf{L}_p).$$

- **La curvatura media:** in ogni punto $p \in S$ essa è data da

$$H(p) = \frac{k_-(p) + k_+(p)}{2} = \frac{Ge + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{L}_p).$$

- **Osservazione importante.** Date $K(p)$ e $H(p)$, le curvatures principali sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathbf{L}_p - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{L}_p)\lambda + \det(\mathbf{L}_p) = \lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0.$$

Quindi si ha

$$k_{\pm}(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

- Ogni punto $p \in S$ è classificato nella seguente maniera:
 - p è **ellittico** se $K(p) > 0$;
 - p è **iperbolico** se $K(p) < 0$;
 - p è **parabolico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$;
 - p è **piano** se $K(p) = H(p) = 0$;
 - p è un **ombelico** se $k_-(p) = k_+(p)$.
- Dato il punto $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$, usando la funzione *altezza di S relativamente a $T_p S$* , definita da $h_S: (u, v) \mapsto \langle \varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0), \nu(p) \rangle = \text{pr}_{\nu(p)}(\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0))$, si vedono le seguenti cose:
 - se $K(p) > 0$ allora c'è un intorno del punto p in \mathbb{R}^3 nel quale tutti i punti di S giacciono dalla **stessa parte** rispetto al piano tangente affine $p + T_p S$;
 - se $K(p) < 0$ allora c'è un intorno del punto p in \mathbb{R}^3 nel quale i punti di S si distribuiscono da **ambo le parti** rispetto al piano tangente affine $p + T_p S$.
- Vale la cosa seguente: *se tutti i punti di S sono ombelichi, allora S è contenuta in una sfera o in un piano.*
- Sia $p = \varphi(u_0, v_0) \in S$. Il *paraboloide osculatore di S in $p = \varphi(u_0, v_0)$* è il paraboloide dello spazio $\mathbb{R}^3_{(u,v,h_S)}$ di equazione

$$h_S = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{e}(u_0, v_0) & \mathbf{f}(u_0, v_0) \\ \mathbf{f}(u_0, v_0) & \mathbf{g}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

- **Osservazione importante.** I concetti di prima e seconda forma fondamentale, mappe di Gauss e Weingarten, curvatures normali, geodetiche e principali, curvatura di Gauss e curvatura media **si estendono** anche al caso di **superfici parametrizzate** (cioè non necessariamente regolari) purché si restringa l'attenzione ai soli **punti regolari**.

3.5 Teoremi importanti

- **Teorema.** (Prima parte del Teorema fondamentale della teoria delle superfici, di Bonnet) *Date le superfici regolari S_j , di parametrizzazioni rispettive $\varphi_j: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$ (stesso insieme D) si supponga che, avendo scelto (come sempre) $\nu_{\varphi_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right\|$, $j = 1, 2$, si abbia*

$$\begin{bmatrix} E_{\varphi_1}(u, v) & F_{\varphi_1}(u, v) \\ F_{\varphi_1}(u, v) & G_{\varphi_1}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\varphi_2}(u, v) & F_{\varphi_2}(u, v) \\ F_{\varphi_2}(u, v) & G_{\varphi_2}(u, v) \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_1}(u, v) & \mathbf{f}_{\varphi_1}(u, v) \\ \mathbf{f}_{\varphi_1}(u, v) & \mathbf{g}_{\varphi_1}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\varphi_2}(u, v) & \mathbf{f}_{\varphi_2}(u, v) \\ \mathbf{f}_{\varphi_2}(u, v) & \mathbf{g}_{\varphi_2}(u, v) \end{bmatrix},$$

per tutti gli $(u, v) \in D$. Allora esiste una rototraslazione R dello spazio \mathbb{R}^3 in sè tale che $\varphi_1 = R \circ \varphi_2$. In particolare $S_1 = R(S_2)$.

- **Theorema Egregium.** (Gauss) *La curvatura di Gauss K è intrinseca, cioè dipende solamente dalla prima forma fondamentale.*

Una delle dimostrazioni è data dalla seguente formula (dovuta a F.Brioschi)

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) (EG - F^2) + \right. \\ \left. + \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{bmatrix} \right].$$

3.6 Superfici di rotazione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, sia $I_0 \subset I$, con $I = [a, b]$ se $a, b \in \mathbb{R}$ ovvero $(-\infty, b]$ o $[a, +\infty)$ se $a = -\infty$ o $b = +\infty$, rispettivamente. Siano $r, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni C^∞ , con $r(u) \geq 0$ per $u \in I$ e $r(u) > 0$ per $u \in I_0$, e tali che $r'(u)^2 + h'(u)^2 \neq 0$ per $u \in I$. Una *superficie di rotazione* è una superficie **semplice e regolare** di \mathbb{R}^3 ottenuta facendo ruotare la curva regolare, chiamata *curva generatrice*, $u \mapsto (r(u), h(u)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ (essa è regolare in quanto $(r')^2 + (h')^2 \neq 0$) del piano x, z intorno all'asse z . Si ottiene quindi una parametrizzazione

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)), \quad (u, v) \in I_0 \times (0, 2\pi).$$

In questo caso

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{bmatrix} -h'(u) \cos v \\ -h'(u) \sin v \\ r'(u) \end{bmatrix},$$

e, relativamente alla base $\partial\varphi/\partial u$, $\partial\varphi/\partial v$, si hanno le formule:

- la matrice della prima forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} r'(u)^2 + h'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{bmatrix};$$

- la matrice della seconda forma fondamentale è

$$\begin{bmatrix} \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r(u)h'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- la matrice della mappa di Weingarten è

$$\begin{bmatrix} \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{h'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2 + h'(u)^2}} \end{bmatrix};$$

- si noti che se si pone

$$k_1 = k_1(u) := \frac{r'(u)h''(u) - h'(u)r''(u)}{(r'(u)^2 + h'(u)^2)^{3/2}},$$

allora $|k_1|$ è la curvatura della curva generatrice $u \mapsto (r(u), h(u))$;

- la curvatura di Gauss e la curvatura media sono date rispettivamente dalle funzioni

$$K = \frac{h'}{r} \frac{r'h'' - h'r''}{((r')^2 + (h')^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \left(\frac{r'h'' - h'r''}{(r')^2 + (h')^2} + \frac{h'}{r} \right).$$

- I meridiani, per esempio parametrizzati ad arco, $s \mapsto \gamma_{v_0}(s) = \varphi(u(s), v_0)$ (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale $\dot{u}(s) = 1/\sqrt{r'(u(s))^2 + h'(u(s))^2}$), sono **curve geodetiche**: $k_g(s) = 0$.
- I paralleli, per esempio parametrizzati ad arco, $s \mapsto \gamma_{u_0}(s) = \varphi(u_0, v(s))$ (il parametro d'arco è definito dall'equazione differenziale $\dot{v}(s) = 1/r(u_0)$), sono **curve geodetiche** se e solo se $r'(u_0) = 0$, cioè se e solo se il relativo vettore velocità della curva generatrice è nella direzione dell'asse z quando $u = u_0$. Infatti si ha

$$k_g(s) = \frac{r'(u_0)}{r(u_0)\sqrt{r'(u_0)^2 + h'(u_0)^2}} = 0 \iff r'(u_0) = 0.$$

- **Definizione.** Data la superficie di rotazione S , definiamo S_c (“completamento” di S) la superficie ottenuta facendo ruotare la curva generatrice di un intero angolo 2π . Si ha quindi che S_c è ottenuta da S aggiungendo ad S il meridiano

$$C_0 := \{(r(u), 0, h(u)); u \in I_0\}.$$

- **Il Teorema di Clairaut.** Sia S una superficie di rotazione parametrizzata dalla mappa $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$. Se una curva regolare $\psi: s \mapsto \psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$ (con s parametro d'arco di ψ) è una geodetica allora, detto $\theta(s) \in [0, \pi]$ l'angolo formato dalla curva ed il parallelo $v \mapsto \varphi(u(s), v)$ nel punto $\psi(s) = \varphi(u(s), v(s)) \in S$, si ha

$$s \mapsto r(u(s)) \cos \theta(s) = \text{costante}.$$

3.7 Superfici rigate

Siano $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva (non necessariamente regolare né semplice), e sia $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale, con $\|X(u)\| \neq 0$ per tutti gli $u \in I$. (Quando $I = [a, b]$ e γ è chiusa si richiede qui che sia $X(a) = X(b)$.)

Una *superficie rigata* è una *superficie parametrizzata dalla funzione*

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

La curva γ è chiamata una *direttrice* della superficie. La retta contenuta nella superficie passante per il punto $\varphi(u_0, v_0)$ è l'insieme $R(u_0) := \{\gamma(u_0) + vX(u_0); v \in \mathbb{R}\}$. Essa è chiamata una *retta generatrice*. La superficie si dice *non cilindrica* se $\|X'(u)\| \neq 0$ per tutti gli $u \in I$.

- **Definizione.** Diciamo che una superficie S di **rotazione** è rigata se lo è la superficie S_c .

Si hanno i seguenti esempi:

- **Cono sopra la curva γ :** presa γ regolare, fissato $P_0 \notin \gamma(I)$, si considera

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + v(P_0 - \gamma(u)), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Cilindro sopra la curva γ :** presa γ regolare, fissato il vettore (costante non nullo) $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, si considera

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + v\vec{w}, \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

- **Iperboloide ad una falda:** si prendono $a, b, c > 0$, $\gamma: u \mapsto (a \cos u, b \sin u, 0)$, e

$$X: u \mapsto \gamma'(u) + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-a \sin u, b \cos u, c). \text{ Allora}$$

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

- **L'elicoide:** si sceglie $c > 0$ e si considera $X(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$. In questo caso γ è la curva $u \mapsto (0, 0, cu)$. Allora

$$\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- **Il paraboloido iperbolico:** presi $a, b > 0$, si considerano varie possibilità:

- si prende $\gamma: u \mapsto (au, 0, u^2)$, $X_{\pm}: u \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \pm b \\ 2u \end{bmatrix}$, e $\varphi_{\pm}: (u, v) \mapsto \varphi_{\pm}(u, v) = \gamma(u) + vX_{\pm}(u)$, $u, v \in \mathbb{R}$;

- si prende $\sigma_{\pm}: u \mapsto (au, \pm bu, 0)$, $Y_{\pm}: u \mapsto \begin{bmatrix} a \\ \mp b \\ 4u \end{bmatrix}$, e $\psi_{\pm}: (u, v) \mapsto \psi_{\pm}(u, v) = \sigma_{\pm}(u) + vY_{\pm}(u)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

In tutti i casi l'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

- Per le superfici rigate si ha sempre

$$E = \|\gamma'(u) + vX'(u)\|^2, \quad G = \|X(u)\|^2, \quad F = \langle \gamma'(u) + vX'(u), X(u) \rangle,$$

per cui nei punti regolari (cioè i punti nei quali $EG - F^2 \neq 0$)

$$e = \frac{\det [\gamma''(u) + vX''(u) \mid \gamma'(u) + vX'(u) \mid X(u)]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = 0,$$

$$f = \frac{\det [X'(u) \mid \gamma'(u) \mid X(u)]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Perciò per le superfici rigate, nei punti regolari, vale sempre

$$K = -\frac{f^2}{EG - F^2} = -\left(\frac{\det [X'(u) \mid \gamma'(u) \mid X(u)]}{EG - F^2}\right)^2 \leq 0,$$

e le rette contenute nella superficie (cioè che “rigano” la superficie) sono geodetiche.

- Si ha che *le uniche superfici di rotazione che sono anche rigate, ottenute facendo ruotare una retta dello spazio, sono quelle con $K = 0$ e l'iperboloide ad una falda $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ quando $K < 0$.*
- **La superficie tangente, normale e binormale ad una curva:** sia $\gamma: I \ni s \mapsto \gamma(s)$ una curva regolare e biregolare parametrizzata ad arco.

- La superficie **tangente** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vT(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

- La superficie **normale** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vN(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

- La superficie **binormale** è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vB(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

È importante notare che la definizione si estende facilmente a curve non necessariamente parametrizzate ad arco.

- **Il nastro di Möbius** (non è orientabile): presi $R \geq 1$ e $0 < \varepsilon < R/2$, si considera

$$\varphi: [0, 2\pi] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \left((R + v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (R - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right).$$

Pertanto la curva direttrice γ ed il campo di direzioni X sono dati, rispettivamente, da

$$\gamma(u) = (R \sin u, R \cos u, 0), \quad X(u) = \left(\sin \frac{u}{2} \sin u, -\sin \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \right).$$

3.8 Superfici sviluppabili

Una superficie rigata parametrizzata da $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u)$ (stesse notazioni della sezione precedente) con $\|X\| = 1$ si dice *svilupabile* quando

$$\det [\gamma' | X' | X] = 0.$$

Nei punti regolari (cioè nei punti in cui $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$) si ha che

$$g = 0, \quad f = -\frac{\det [\gamma' | X' | X]}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = 0,$$

e quindi $K = 0$ in tali punti. Di conseguenza per queste superfici nei punti regolari vale sempre

$$K = 0 \iff \det [\gamma' | X' | X] = 0.$$

Si hanno i fatti seguenti.

- Un utile criterio per riconoscere le superfici sviluppabili è dato dalla seguente proposizione.

Proposizione. *Sia S una superficie rigata parametrizzata da $\varphi(u, v) = \gamma(u) + vX(u)$. Allora S è sviluppabile se e solo se, per ogni u , S ha lo stesso piano tangente (piano tangente vettoriale) in tutti i punti della retta generatrice $R(u)$.*

- **Proposizione.** *Sia $s \mapsto \gamma(s)$ una curva (regolare e biregolare) parametrizzata ad arco. Allora la superficie tangente è sempre sviluppabile. Le superfici normale e binormale sono sviluppabili se e solo se la curva è planare.*

Osservazione. *La proposizione vale anche per curve non necessariamente parametrizzate ad arco.*

- La direzione principale relativa alla curvatura principale 0 è $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = X$. (In questo caso essa è anche di lunghezza 1.)

- **Teorema.** *Una superficie rigata S è sviluppabile se e solo se una delle seguenti condizioni (equivalenti) è soddisfatta:*

(i) $K = 0$;

(ii) *La superficie è localmente isometrica ad un piano (cioè localmente diffeomorfa in modo da conservare la prima forma fondamentale), e le rette generatrici $\{vX(u); v \in \mathbb{R}\}$ rimangono direzioni principali.*

- **Osservazione.** Se non si suppone che $\|X\| = 1$, ma solo che $\|X\| \neq 0$, è ancora vero che $K = 0$ se e solo se $\det [\gamma' | X' | X] = 0$ nei punti regolari. In questo caso però la direzione principale di lunghezza 1 relativa alla curvatura principale 0 è data da $\frac{1}{\|X\|} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{X}{\|X\|}$.

3.9 Parametrazioni di alcune superfici notevoli

- **Ellissoide:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad u \in (0, \pi), v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nel caso in cui $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)^2} > 0.$$

- **Toro:** $0 < r_1 < r_2$,

$$\varphi(u, v) = \left((r_1 \cos u + r_2) \cos v, (r_1 \cos u + r_2) \sin v, r_1 \sin u \right), \quad u, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_2 \right)^2 + z^2 = r_1^2.$$

La curvatura di Gauss è

$$K = \frac{\cos u}{r_1(r_1 \cos u + r_2)}.$$

- **Cono:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

e la curvatura di Gauss $K = 0$.

- **Paraboloide ellittico:** $a, b > 0$,

$$\varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2), \quad u \in (0, +\infty), v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nel caso in cui $a = b$ la superficie è di rotazione con curvature di Gauss

$$K = \frac{4}{(4u^2 + a^2)^2} > 0.$$

- **Paraboloide iperbolico:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con $a, b > 0$,

$$\varphi(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

L'equazione cartesiana è

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

La curvatura di Gauss è $K < 0$.

- **Elicoide:** come già visto, con $c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

La curvatura di Gauss è facilmente calcolabile (utilizzando la formula per le superfici rigate) ed è

$$K = -\frac{c^2}{(c^2 + v^2)^2} < 0.$$

- **Iperboloide ad una falda:** c'è la parametrizzazione vista nella sezione relativa alle superfici rigate. Un'altra è la seguente. Con $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 \sinh^2 u + c^2 \cosh^2 u)^2} < 0.$$

- **Iperboloide a due falde:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi_{\pm}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u), \quad u \in (0, +\infty), \quad v \in (0, 2\pi),$$

dove φ_+ parametrizza la falda contenuta nel semipiano $z > 0$, mentre φ_- parametrizza la falda contenuta nel semipiano $z < 0$. L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cosh^2 u + c^2 \sinh^2 u)^2} > 0.$$

- **Cilindro:** $a, b > 0$,

$$\varphi(u, v) = (a \cos v, b \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in (0, 2\pi).$$

L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss $K = 0$.

- **Pseudosfera di Beltrami:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = \left(a e^{-u} \cos v, b e^{-u} \sin v, c \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt \right), \quad u \in (0, +\infty), \quad v \in (0, 2\pi).$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 e^{-2u} + c^2 (1 - e^{-2u}))^2} < 0.$$

Se $a = b = c$ allora

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

- **Catenoide:** $a, b, c > 0$,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, cu), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in (0, 2\pi).$$

Quando $a = b$ la superficie è di rotazione con curvatura di Gauss

$$K = \frac{-c^2}{(a^2 \sinh^2 u + c^2)^2} < 0.$$

- **Sella di scimmia:**

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Tutti i punti di questa superficie sono iperbolici, ad eccezione dell'origine, unico punto piano isolato.

- **Grafici:** data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione infinitamente differenziabile, si considera

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Si ha

$$\nu_\varphi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\partial f / \partial u \\ -\partial f / \partial v \\ 1 \end{bmatrix},$$

e, nella base usuale $\partial\varphi/\partial u, \partial\varphi/\partial v$:

- la prima forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

- la seconda forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{bmatrix}.$$

- la curvatura di Gauss è data da

$$K = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)^2}.$$

Testi di riferimento:

- [1] P.Albano e A.Parmeggiani, *Elementi Introduttivi di Matematica*. Cesena 2002.
- [2] Santiago Calatrava, *Santiago Calatrava: Conversations with Students - The MIT Lectures*. Princeton Architectural Press 2002.
- [3] M.Emmer, *Mathland. Dal mondo piatto alle ipersuperfici*. Universale di Architettura, 143, 2003.
- [4] L.Molinari, *Santiago Calatrava*. 01 Biblioteca di Architettura, Skira 1998.
- [5] A. Parmeggiani, *Il concetto di Forma in Matematica: il corso di Matematica Applicata, Architettura 3*, Facoltà di Architettura dell'Università di Bologna, sede di Cesena 2002.
- [6] A.Parmeggiani, *Note del corso di Matematica Applicata (all'Architettura)*, in fase di preparazione.
- [7] G.Pizzetti e A.M.Zorgno Trisciungio, *Principi Statici e Forme Strutturali*. UTET, 1980. (Capitolo III)
- [8] D.Schodek, *Strutture*. Patron Editore. Bologna 2004.
- [9] E.Sernesi, *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 2001.

Letture utili.

- [HC] D.Hilbert e S.Cohn-Vossen, *Geometria Intuitiva*. Bollati Boringhieri, 2001.
- [SC] N.Sala, G.Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura* (Presentazione di Mario Botta). Serie di Architettura FrancoAngeli 2003.
- [Ka] W.Kandkinsky, *Punto Linea Superficie*. Biblioteca Adelphi 16. Adelphi Edizioni, Milano, 2006.

Altri testi utili:

- [CRE] E.Cohen, R.F.Riesenfeld e G. Elber, *Geometric Modeling with Splines - An Introduction*. A.K. Peters, 2001.
- [dC] M.P.do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [F] W. Flugge, *Stresses in Shells*. Second edition. Springer Verlag, 1960.
- [K] W.Kühnel, *Differential Geometry (Curves-surfaces-manifolds)*. Student Mathematical Library, 16. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [S] D.J.Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry - 2nd Edition*. Dover, 1961.
- [G] A.Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*. CRC Press, 1998.