PROGRAMMA di MATEMATICA

Corso di Laurea in ARCHITETTURA
A.A. 2001/2002 (Alberto PARMEGGIANI)

I Modulo - Introduzione alla Matematica (E.Bernardi)

• Rudimenti di Teoria degli Insiemi: sottoinsiemi, operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza), insieme delle parti, prodotto cartesiano di insiemi. L'insieme dei numeri interi non negativi $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
• Funzioni: dominio, grafico, immagine e controimmagine di un insieme tramite una funzione, e sue proprietà: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, funzioni iniettive, suriettive, biettive, funzione composta, funzioni invertibili, *una funzione è invertibile se e solo se essa è biettiva*, la funzione inversa è unica, funzioni monotone (crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti).
• Funzioni trigonometriche $x \longmapsto \sin x$ e $x \longmapsto \cos x$ e loro inverse; la funzione esponenziale $x \longmapsto e^x$ e la sua inversa (logaritmo naturale in base e) $x \longmapsto \ln x$, $x > 0$.
• Numeri complessi: definizione di numero complesso (forma algebrica), coniugato, modulo e principali proprietà.
• Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ ed il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (retta passante per un punto dato e direzione un vettore dato, retta per due punti, equazione generale della circonferenza di centro e raggio dati, coniche).

II Modulo - Fondamenti di Matematica (A.Parmeggiani)

1 L'insieme numerico $\mathbb{R}$

• La funzione $|x| = \max\{-x, x\}$, $x \in \mathbb{R}$, e sue proprietà, la disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x| + |y|$, la distanza euclidea $\mathrm{dist}_{\mathrm{e}}(x, y) = |x - y|$ in $\mathbb{R}$ e sue proprietà.
• Insiemi limitati, max, min di un insieme, sup ed inf di un insieme e loro caratterizzazione, l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$: *ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette* sup *(risp.* inf*)*.
• Il Principio di Induzione: *Sia $P(n)$ una proprietà definita su $\mathbb{N}$, allora se $P(1)$ è vera e $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ ne consegue che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.* La disuguaglianza di Bernoulli: *Se $x > -1$, allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.* La formula di sommazione della progressione geometrica di ragione $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. La formula di Newton del binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
• Esistenza di un'unica radice n-esima: *Dati $y > 0$ ed $n \geq 1$ naturale, allora esiste un unico $x > 0$ tale che $x^n = y$* (quindi $x = y^{1/n}$). Esistenza di un unico logaritmo in base $a > 0$: *Dati $a > 0$ e $y > 0$ (con $a, y \neq 1$) esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$* (quindi $x = \log_a y$).

2 Funzioni di una variabile, limiti e continuità

Funzioni limitate max, min, sup ed inf di una funzione. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo [1]: si dice che $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è di *accumulazione* per I se $x_0 \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$. Definizione di limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ dove $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 è di accumulazione per I. Limite per $x \to x_0 \pm$. *Il limite, quando esiste, è unico.* Il Teorema (dei due carabinieri): *se* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ *esiste, finito od infinito uguale a* λ, *e* $g(x) \le f(x) \le h(x)$, *allora anche il* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *esiste ed è uguale a* λ. Forme indeterminate.
Proprietà dei limiti: *Se esistono* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *(finiti od infiniti), allora*

- *Per ogni numero reale* c *vale* $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x) + g(x)\Big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x)g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x)/g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big)/\Big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big)$ *ogni volta che il membro a destra non costituisce forma indeterminata;*
- *Se* $f(x) < g(x)$ *ed i limiti di* f *e* g *esistono per* $x \to x_0$ *allora* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *allora esiste un* $r > 0$ *tale che* $f(x) < g(x)$ *per tutti gli* $x \in I$ *tali che* $|x - x_0| < r$ *se* $x_0 \in \mathbb{R}$, $x > r$ *se* $x_0 = +\infty$, $x < -r$ *se* $x_0 = -\infty$;
- *(Cambiamento di variabile nei limiti) Se* $g(t) \neq x_0$ *definitivamente e* $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ *allora* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{t\to t_0} f\Big(g(t)\Big)$.

Limiti di funzioni monotone: *Se* $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *è crescente allora esiste, finito o infinito, il* $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b)} f(x)$. *Analogamente, nel caso di* f *decrescente,* $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \inf\limits_{x\in[a,b)} f(x)$.
Simboli di Landau:

- Si dice che $f \sim g$ *per* $x \to x_0$ quando $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1$;
- Si dice che $f = o(g)$ *per* $x \to x_0$ quando $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$.

I limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Asintoti: Data $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ allora

- se $x_0 \in \mathbb{R}$, (con $x_0 \notin I$ e x_0 di accumulazione per I) e vale $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ allora si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un *asintoto verticale* per la funzione;

[1] In quanto segue I denoterà **sempre** un **intervallo** di $\mathbb{R}$.

- se vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ allora si dice che la retta di equazione $y = \lambda$ è un *asintoto orizzontale* a $+\infty$ per la funzione (e analogamente si definisce l'asintoto orizzontale a $-\infty$);
- se vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$) ed esistono numeri reali

  $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - mx\Big),$$

  allora si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è un *asintoto obliquo* per la funzione a $+\infty$ (e analogamente si definisce l'asintoto obliquo a $-\infty$).

Definizione di funzione *continua* in un punto e su un intervallo. Proprietà delle funzioni continue:

- Somme e prodotto di funzioni continue danno luogo a funzioni continue;
- *Se f, g sono continue in x_0 con $g(x_0) \neq 0$ allora $f(x)/g(x)$ è continua in x_0;*
- *Se $f\colon I \longrightarrow J$ e $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue allora $(g \circ f)\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua;*
- *Il Teorema di Bolzano: se $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(a)f(b) < 0$ allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$. In particolare l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è un intervallo;*
- *Il Teorema di Weierstrass: se $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua allora $f([a, b]) = [\min f, \max f]$, in particolare l'immagine di un intervallo chiuso e limitato tramite una funzione continua è un intervallo chiuso e limitato;*
- *Il Teorema: se $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente monotona sull'intervallo I allora f è iniettiva e la funzione inversa $f^{-1}\colon J = f(I) \longrightarrow I$ è continua.*

Continuità delle funzioni $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\ln x$.

3 Derivazione

Definizione di derivata, significato geometrico della derivata, retta tangente il grafico di una funzione in un punto. *Una funzione derivabile è sempre anche continua.* La derivata di una costante è zero. Regole di derivazione:

$$(f + g)' = f' + g', \ (fg)' = f'g + fg', \ (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\Big(g(x_0)\Big)g'(x_0), \ \ \frac{df^{-1}}{dx}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Derivate delle principali funzioni: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ se $\alpha \in \mathbb{Z}$ e per $x > 0$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$); $D(e^x) = e^x$, $D(\sin x) = \cos x$; $D(\cos x) = -\sin x$; $D(\arctan x) = 1/(1 + x^2)$; $D(\arcsin x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$; $D(\arccos x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$; $D(\ln x) = 1/x$.
Data una funzione $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ allora:

- La funzione ha una discontinuità di tipo *salto* in x_0 se esistono finiti il limite destro e sinistro per $x \to x_0$, ma essi sono diversi tra loro;

- Se f è continua in x_0 ma non è derivabile in x_0 in quanto il limite destro ed il limite sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma sono diversi tra loro, allora f ha un punto *angoloso* in x_0;

- Se f è continua in x_0 ma non è derivabile in x_0 in quanto il limite del rapporto incrementale per $x \to x_0$ vale $+\infty$ (o $-\infty$), allora f ha *tangente verticale* in x_0;

- Se f è continua in x_0 ma non è derivabile in x_0 in quanto il limite destro per $x \to x_0$ del rapporto incrementale vale $+\infty$ (risp. $-\infty$) e quello sinistro dello stesso vale $-\infty$ (risp. $+\infty$), allora f ha una *cuspide* in x_0.

Massimi e minimo locali,

- Il teorema (di Fermat): *Se $x_0 \in (a, b)$, $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e x_0 è un estremale relativo (cioè punto di* max *o* min *locale) allora $f'(x_0) = 0$*;

- Il teorema di Rolle;

- Il teorema di Lagrange (del valor medio);

- Il teorema di Cauchy: *se $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue, derivabili in (a, b), con $g'(x) \neq 0$ su (a, b), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$;

- Regola di De l'Hospital per il calcolo delle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞.

Applicazione della regola di De l'Hospital ad alcuni limiti importanti:

- Per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$ vale $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty$;

- Per tutti gli $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ vale $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(\ln x)^{\beta}} = +\infty$;

- Per tutti gli $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ vale $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{\alpha} |\ln x|^{\beta} = 0$, ed in particolare $x \ln x \longrightarrow 0-$ per $x \to 0+$.

Alcune conseguenze del Teorema del Valor Medio:

- *Se $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f'(x) = 0$ per tutti gli $x \in (a, b)$ allora f è constante*;

- *f è crescente se e solo se $f' \geq 0$ (risp. f è decrescente se e solo se $f' \leq 0$)*;

- *f è strettamente crescente se e solo se $f' \geq 0$ e l'insieme $\{x;\ f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli* (analogamente nel caso di stretta decrescenza).

La formula di Taylor con punto iniziale x_0: Se $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e f è derivabile k volte allora vale

- Formula di Taylor con resto secondo Peano

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^k);$$

- Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k;$$

  per un certo ξ dentro l'intervallo di estremi x e x_0;

- *Dalla formula di Taylor di f si può ottenere quella di f'.*

La formula di Taylor di e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ con punto iniziale 0:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Uso della formula di Taylor per determinare la natura dei punti critici: *sia $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile fino all'ordine k in $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Allora*

- *se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$, il punto x_0 è di minimo locale;*
- *se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$, il punto x_0 è di massimo locale;*
- *se k è dispari, il punto x_0 non è né di massimo né di minimo locale (è di flesso).*

Convessità: una funzione $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *convessa* se il suo epigrafico $E_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq f(x)\}$ è convesso, e cioè per ogni coppia di punti $P, Q \in E_f$ il segmento di estremi P e Q (l'insieme $\{P + t(Q-P);\ t \in [0,1]\}$) è interamente contenuto in E_f; condizioni necessarie e sufficienti: *Se $f\colon I(\subset \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nell'intervallo I, allora f è convessa se e solo una delle seguenti equivalenti condizioni (i), (ii), (iii) è soddisfatta: (i) per ogni $x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, per ogni $x \in I$; (ii) f' è crescente; (iii) Nel caso in cui f sia derivabile 2 volte: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.*

4 Integrale di Riemann

• Funzioni generalmente continue: data $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si dice che f è *generalmente continua* se f è continua su $[a,b]$ escludendo al più un insieme finito di punti, nei quali f ha singolarità di tipo salto.
• Funzione integrale: data $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua, si dice che una funzione **continua** $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è *una primitiva* di f se $F'(x) = f(x)$ per tutti gli $x \in [a,b]$, escludendo al più un insieme finito di punti.
• *Se $F_1, F_2\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono primitive di una data funzione f generalmente continua, allora esse differiscono per una costante.*
• Data una funzione $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, si definiscono la *parte positiva* e la *parte negativa*, rispettivamente, come

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Allora $f_+, f_- \geq 0$ e vale sempre $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$. Se f è generalmente continua, anche f_+ ed f_- lo sono.

• Funzione integrale: data $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua e dato $x_0 \in [a,b]$, si chiama *funzione integrale di punto iniziale* x_0 la funzione definita da

$$[a,b] \ni x \longmapsto \Phi_{x_0}(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt, \ \text{per} \ \ x \geq x_0 \\ \\ \displaystyle -\int_{x}^{x_0} f(t)dt, \ \text{per} \ \ x \leq x_0 \end{cases} \in \mathbb{R}.$$

Si noti che $\Phi_{x_0}(x_0) = 0$.
• Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: *Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è generalmente continua, allora, fissato comunque $x_0 \in [a,b]$, la funzione integrale Φ_{x_0} è sempre* **continua** *e risulta essere derivabile in ogni x nel quale f è continua con $\Phi'_{x_0}(x) = f(x)$ per tali x. Quindi una qualsiasi funzione integrale è anche una primitiva di f.*
• Proprietà dell'integrale: date $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continue, dati $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha \leq \beta$ allora:

- Si pone sempre $\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;
- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$,;
- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \Big(cf(x)\Big)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, per qualunque costante $c \in \mathbb{R}$;
- Se γ è un qualunque punto di $[a,b]$ allora vale sempre
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx;$$
- Se $f(x) \leq g(x)$ su $[a,b]$ allora $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$;
- Vale sempre $\displaystyle\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$, e quindi se $x_1, x_2 \in [a,b]$ sono **qualunque**, allora $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx\right|$.

• Calcolo effettivo dell'integrale: *Data $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ generalmente continua, allora si ha $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$, dove F è una qualunque primitiva di f.*

• Metodi di integrazione:

- Per sostituzione: *Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\varphi\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ è continua insieme alla sua derivata, allora*
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \ \ (\textit{quindi } x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt);$$

- Per parti: *Se* $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sono continue con derivata continua allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

• Alcune primitive notevoli:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C, \quad \int \ln x\, dx = x\ln x - x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \quad \int \Big(f(x)\Big)^\alpha f'(x)dx = \frac{\Big(f(x)\Big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \arctan f(x) + C, \quad \int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C.$$

Gli integrali $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \cos x\, dx$, $\int x^n \sin x\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$, si calcolano per parti.

• Metodo dei "fratti semplici":

- Data la funzione razionale $P(x)/Q(x)$, con P e Q polinomi, se il grado di P è superiore al grado di Q si opera la divisione e ci si riduce al caso in cui il grado di P è minore del grado di Q;
- Esempio di $Q(x) = (x-a)^n(x-b)^m$, grado$(P) \leq n+m-1$. Si scrive

  $$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}(x-b)^{m-1}}\right),$$

  dove $A, B \in \mathbb{R}$ e R, un polinomio di grado $(n-1)+(m-1)-1$ (quindi determinato da $(n-1)+(m-1)$ coefficienti) sono da determinarsi;
- Esempio di $Q(x) = (x-a)^n(x^2+\alpha x+\beta)^m$, dove $x^2+\alpha x+\beta$ non si annulla mai, e grado$(P) \leq n+2m-1$. Si scrive

  $$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{2Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}\right),$$

  dove $A, B, C \in \mathbb{R}$ e R, un polinomio di grado $(n-1)+2(m-1)-1$ (quindi determinato da $(n-1)+2(m-1)$ coefficienti) sono da determinarsi. Se $n = m = 1$ allora $R(x)$ è il polinomio identicamente uguale a 0.

• Volume di un solido di rotazione intorno all'asse x : se $f\colon [a,b] \longrightarrow [0,+\infty)$ è continua, allora il volume V del solido ottenuto facendo ruotare di 2π intorno all'asse x l'insieme $\{(x,y);\ x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ vale $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

• Lunghezza di un grafico: se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua con derivata continua allora la lunghezza L dell'insieme $\{(x, f(x));\ x \in [a,b]\}$ vale $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

4.1 Integrale generalizzato

(Motivazione importante: calcolo di aree di domini non limitati.)

- Se $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a, b \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $[a,b)$ se **esiste finito** il limite $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$;
- Se $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $[a,+\infty)$ se **esiste finito** il limite $\lim_{x\to +\infty} \int_a^x f(t)dt$;
- Se $f\colon (a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua (dove $a \in \mathbb{R}$), si dice che essa è *integrabile in senso generalizzato* su $(a,+\infty)$ se, fissato un qualunque $b \in (a,+\infty)$, **esistono finiti** i limiti

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)dt, \qquad \lim_{x\to +\infty} \int_b^x f(t)dt.$$

  Tale definizione **non dipende** dalla scelta di b;
- Una funzione f si dice *assolutamente integrabile in senso generalizzato* se la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato,
- Quando l'integrale generalizzato esiste ed è uguale a $+\infty$ o $-\infty$ allora si dice che la funzione ha *integrale generalizzato divergente.*

• **Osservazione:** *Se $f \geq 0$ allora l'integrale generalizzato di f esiste sempre, con valore finito o infinito* (in quanto la funzione integrale di f è monotona crescente, e le funzioni crescenti hanno sempre limite).
• Criteri di convergenza:

- Se $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lambda \in [-\infty, 0) \cup (0, +\infty]$ allora f ha integrale generalizzato su $[a,+\infty)$ divergente;
- Date le funzioni f, g, se $|f| \leq g$ allora l'integrabilità generalizzata di g forza l'integrabilità di f, quindi se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato allora è anche integrabile in senso generalizzato;
- Se $f \sim g$ per $x \to x_0$ (o per $x \to +\infty$) allora f è integrabile in senso generalizzato vicino a x_0 (o a $+\infty$) se e solo se g è integrabile in senso generalizzato vicino a x_0 (o a $+\infty$);
- Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha} dx < +\infty$ se e solo se $\alpha < 1$;
- Se $a > 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$ se e solo se $\alpha > 1$.

• **Osservazione.** Analogamente si ottengono tutti gli altri casi relativi a $(a,b]$, $(-\infty,b]$, (a,b), $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$.

5 Equazioni differenziali lineari del I ordine

Con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, le funzioni $a, b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ almeno continue, il tempo iniziale $x_0 \in I$, e

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

la soluzione, **unica**, $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ è data da

$$y(x) = e^{A(x;x_0)}\Big[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t;x_0)} b(t)dt\Big],$$

con $A(x;x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)dt.$

6 Equazioni a variabili separabili non lineari del I ordine

Con f, g funzioni continue, e

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

- se $g(y_0) = 0$, allora si prende $y(x) = y_0$;
- se $g(y_0) \neq 0$, allora il problema dato è equivalente al problema

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Testo consigliato:

Nel I Modulo si seguiranno le note (disponibili presso la Segreteria Didattica)

- P. Albano, A. Parmeggiani, Elementi introduttivi di matematica, 2002.

Libro di teoria (per il II modulo):

- M.Bramanti-C.D.Pagani-S.Salsa, Matematica, Zanichelli (Bologna), 2000.

Libro di esercizi:

- S. Abenda, S. Matarasso, A. Parmeggiani, Esercizi di Analisi Matematica, Parte I, Progetto Leonardo (Bologna), 2000.