

# Mercato a reddito fisso e Risk Management

---

## **Hedging dinamico**

# Agenda ed elementi chiave

---

- **Hedging : cosa e perché**
  - Idea di base
  - Rilevanza e le applicazioni
  - Rischio di tasso di interesse
- **Costruzione del portafoglio di hedging**
- **Fattori di rischio**
  - Un solo fattore
  - Tutta la curva zcb
  - Tecniche di raggruppamento
  - Analisi componenti principali

# Hedging: idea di base

---

- Dato un portafoglio di titoli, un insieme di attività e passività finanziarie vogliamo trovare una **strategia** che ci tuteli da **eventuali** variazioni di valore avverse, nelle componenti del portafoglio stesso.

*Faccio un investimento, mi voglio tutelare da andamenti sfavorevoli dell'economia*

- Le variabili in grado di ingenerare queste variazioni, vengono comunemente denominate **fattori di rischio**
- Il principio base dell'immunizzazione (hedging) è quello di costruire un altro portafoglio, detto appunto di copertura, che vari in maniera quantitativamente uguale, ma di segno opposto al nostro portafoglio di partenza.
- E' importante quindi
  - identificare i fattori di rischio
  - indagare come varia il valore dei vari strumenti finanziari al variare dei fattori di rischio

# Rilevanza e applicazioni

---

- **Risk Management**

- Matching delle passività hedging (Fondi pensione, Fondi assicurativi,..)
- Misure della *verosimiglianza* degli eventi estremi , tail events, (VaR,...)
- Allocazione del capitale di rischio

- **Ingegneria finanziaria**

- Replicazione statica e dinamica
- Sezionamento e ricomposizione dei rischi
- Sviluppo di nuovi prodotti finanziari piu' efficaci e centrati per i nuovi profili di rischio

- **Portafolio management**

- Identificazione di fonti di profitto in mercati efficienti
  - ✓ L'eccesso dei rendimenti medi sul tasso spot risk-free riflettono una compensazione per l'esposizione al rischio
  - ✓ Alcuni rischi risultano meno trasparenti di altri (Hedge funds)
- Assumere i rischi 'capiti' ed evitare i rischi non gestibili
- Eliminare i rischi per poter sfruttare dei temporanei mispricing (butterfly trade)
- Ottimizzazione (analisi media varianza...)

# Rischio di tasso di interesse

---

Nonostante ci stiamo occupando della valutazione di flussi di cassa  $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  **noti** nel loro ammontare e nelle date in cui sono disponibili  $\{t_i\}_{i=1,2,\dots,N}$

$$V_t(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^N F_i B(t, t_i)$$

il loro valore attuale è una quantità **incerta**, che varia in maniera aleatoria nel tempo.

**Quali variabili possono generare variazioni nel valore di  $V_t$ ?**

- Tutti i fattori di sconto coinvolti  $B(t, t_i)$  (prezzi estratti!)
- Tutti i prezzi  $P(t, t_i)$  di titoli coupon o zero coupon utilizzati per derivare i fattori di sconto stessi
- Tutti i parametri usati nella procedura di stima, etc.

⇒ **Quello che generalmente chiamiamo rischio di tasso di interesse (= rischio dato da variazioni del tasso di interesse) è in realtà intimamente legato al variare di numerosissimi fattori di rischio!**

- Considerare tutti i possibili fattori di rischio che influenzano la variazione dei tassi di interesse se teoricamente possibile diventa di fatto intrattabile (capiremo quantitativamente dopo perché)
- Dobbiamo **ridurre il numero di fattori di rischio comuni**, ovvero individuare il numero minimo di fattori in grado di descrivere l'intera struttura di rischio

# Portafoglio di Hedging: costruzione

---

- **Notazione**

- sia  $V_t$  il valore al tempo  $t$  del portafoglio che vogliamo coprire
- sia  $H_t$  il valore al tempo  $t$  del portafoglio di copertura
- sia  $h_t^j$  con  $j = 1, \dots, J$  il valore del  $j$ -esimo strumento di copertura utilizzato
- sia  $\phi_t^j$  la quantità investita al tempo  $t$  nel  $j$ -esimo strumento di copertura

$$H_t = \sum_{j=1}^J \phi_t^j h_t^j$$

- sia  $\beta_t = (\beta_t^1, \dots, \beta_t^k, \dots, \beta_t^K)'$  il valore al tempo  $t$  dei  $K$  fattori di rischio selezionati

- **Vogliamo determinare l'impatto dei singoli fattori sul valore del portafoglio**  
→ **espansione di Taylor** di  $V_t$  e  $H_t$  intorno a  $\beta_t$  fino al secondo ordine

Notiamo che sia  $V_t$  e  $H_t$  sono funzioni reali,  $C^2$ , del vettore  $\beta_t$  su dominio  $\mathbb{R}^K$

Sia  $d\beta_t = (d\beta_t^1, \dots, d\beta_t^K)'$  il vettore delle variazioni intorno a  $\beta_t$  da  $t$  a  $t + dt$  (incrementi istantanei)

$$dV(\beta_t) = V(\beta_t + d\beta_t) - V(\beta_t) = \nabla V(\beta_t)' \cdot d\beta_t + \frac{1}{2} d\beta_t' \cdot \nabla^2 V(\beta_t) \cdot d\beta_t + o(\|d\beta_t\|^2)$$

$$dh^j(\beta_t) = h^j(\beta_t + d\beta_t) - h^j(\beta_t) = \nabla h^j(\beta_t)' \cdot d\beta_t + \frac{1}{2} d\beta_t' \cdot \nabla^2 h^j(\beta_t) \cdot d\beta_t + o(\|d\beta_t\|^2)$$

$\nabla f$ ,  $\nabla^2 f$  e  $\cdot$  indicano rispettivamente il vettore gradiente, la matrice Hessiana e il prodotto scalare

# Portafoglio di Hedging: costruzione (cont)

---

Il nostro obiettivo è quello di ottenere

$$dH(\beta_t) = \sum_{j=1}^J \phi_t^j dh^j(\beta_t) + \underbrace{\sum_{j=1}^J d\phi_t^j h^j(\beta_t)}_{=0*} = -dV(\beta_t)$$

Se tronchiamo l'espansione di Taylor al primo ordine otteniamo il seguente sistema di  $K$  equazioni (dimensione del vettore  $\beta$ ) in  $J$  incognite  $\phi_t^j$  (i pesi del portafoglio di copertura)

$$\sum_{j=1}^J \phi_t^j \nabla h^j(\beta_t) = -\nabla V(\beta_t)$$

Affinche' la soluzione  $\exists!$  devo avere  $J = K$  (numero di fattori di rischio = numero di strumenti di copertura disponibili) strumenti linearmente indipendenti.

**condizione iniziale di autofinanziamento:**  $V_t = \sum_{j=1}^J \phi_t^j h_t^j$  il valore iniziale del portafoglio di copertura coincida con il valore iniziale del portafoglio da coprire. In realta' abbiamo bisogno di  $J = K + 1$  strumenti diversi di copertura

\* Condizione di autofinanziamento dinamica. Vedremo poi perché...

# Portafoglio di Hedging: costruzione (cont)

---

Possiamo procedere nello stesso modo, ma usando una migliore approssimazione delle variazioni di  $V_t$  e  $H_t$  troncando l'espansione di Taylor al secondo ordine

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J \phi_t^j \nabla h^j(\beta_t) &= -\nabla V(\beta_t) \\ \sum_{j=1}^J \phi_t^j \nabla^2 h^j(\beta_t) &= -\nabla^2 V(\beta_t) \end{cases}$$

$\Rightarrow J = 2K + 1$  per soddisfare anche la condizione iniziale di autofinanziamento

**Nota 1:** Il nostro portafoglio risulta così **istantaneamente** immunizzato, tra  $t$  e  $t+dt$ , al primo o secondo ordine. Affinche' il portafoglio risulti **continuamente** coperto, occorrerebbe implementare questa strategia dinamicamente, cioè risolvere i sistemi per ogni  $t$ , trovare la traiettoria ottima  $\{\phi_t^*\}_{t \geq 0}$  e **ribilanciare istantaneamente**.

**Problema:** Di fatto un ribilanciamento continuo, anche se fosse teoricamente possibile, genererebbe un ammontare infinito di **costi di transazione**  $\Rightarrow$  selezionare un numero finito di istanti di ribilanciamento/contrattazione: trade-off.

Minori costi di transazione  $\Leftarrow$  Frequenza di ribilanciamento minore  $\Rightarrow$  Errore di tracking maggiore

Chiamiamo tracking-error lo sfasamento tra  $V_t$  e  $H_t$  tra due istanti discreti di trading, tra i quali è lecito supporre i fattori di rischio siano variti ( in letteratura vengono proposte varie strategie: diversificazione nella scala temporale, etc...)



## Portafoglio di Hedging: costruzione (cont)

---

**Nota 2: La strategia dinamica di hedging deve essere auto-finanziante** non solo alla data iniziale  $t_0$ , ma vogliamo che bilanciamenti successivi siano finanziati solo dal valore generato internamente dal portafoglio negli istanti precedenti, senza afflussi o deflussi di fondi. Quindi in ogni generico istante  $t_i > t_0$  di ribilanciamento deve essere assicurato che:

$$\sum_{j=1}^J \phi_{t_i}^j h_{t_i+dt}^j = \sum_{j=1}^J \phi_{t_i+dt}^j h_{t_i+dt}^j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^J d\phi_t^j h_{t_i+dt}^j = 0$$

**Possiamo differenziare la funzione valore del portafoglio come se i pesi fossero costanti**

**Limiti:** Ricordiamo che abbiamo supposto che le variazioni di valore dei nostri portafogli, indotte dalle variazioni dei fattori di rischio siano ben approssimate da una serie di Taylor troncata ad un certo ordine ( $\rightarrow$  all'aumentare dell'ordine aumentano gli strumenti di copertura richiesti!). Minore la variazione  $d\beta_t$  migliore l'approssimazione  $\Rightarrow$  possiamo aumentare la frequenza di ribilanciamento...(vedi problemi sopra)

Un'ordine di  $2K + 1$  strumenti di copertura richiesti  $\Rightarrow$  ridurre parsimoniosamente i fattori di rischio

# Un solo fattore di rischio

---

Assumiamo come **unico fattore di rischio** il tasso interno di rendimento dei flussi di cassa generati dal portafoglio che vogliamo immunizzare:  $\beta_t = y_t$  (YTM del bond con gli stessi flussi di cassa)



Assumere una **struttura per scadenza dei tassi di interesse piatta**, tutti i flussi di cassa indipendentemente dall'istante di esigibilità vengono scontati con lo stesso tasso di interesse

L'espansione in serie di Taylor di  $V_t$  diventa unidimensionale

$$dV(y_t) = V'(y_t)dy_t + \frac{1}{2}V''(y_t)(dy_t)^2 + o((dy_t)^2)$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} V' &= -\frac{V}{(1+y)}\mathcal{D}(V) = -V\mathcal{M}\mathcal{D}(V) \\ V'' &= V\mathcal{C}(V) \end{aligned}$$

**Per una copertura al primo ordine** abbiamo bisogno di  $K = 2$  strumenti di copertura (ricorda C.I. autofinanziamento) affinché'  $\phi_t H'(y_t) = -V'(y_t)$

$$\begin{cases} \phi_t^1 h_t^1 + \phi_t^2 h_t^2 &= V_t \\ \phi_t^1 h_t^1 \mathcal{M}\mathcal{D}(h_t^1) + \phi_t^2 h_t^2 \mathcal{M}\mathcal{D}(h_t^2) &= -V_t \mathcal{M}\mathcal{D}(V_t) \end{cases}$$

Il che equivale a richiedere **l'uguaglianza delle modified duration** (o equivalentemente delle duration) nei due portafogli

# Un solo fattore di rischio (cont)

---

L'ammontare ottimo da investire nel portafoglio di copertura é semplicemente uguale all'opposto del rapporto tra le sensitività (modified duration) rispetto allo YTM

$$\phi_t = -V'(y_t)/H'(y_t)$$

*Se il portafoglio di hedging risulta avere una sensitività doppia a variazioni dello YTM, rispetto al portafoglio che vogliamo coprire, se in quest'ultimo abbiamo investito €100 nel portafoglio di hedging investiremo €50 e non certo €100*

**Per una copertura al secondo ordine (+ C.I.)** abbiamo bisogno di  $K = 3$  strumenti

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j & = V_t \\ \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j \mathcal{MD}(h_t^j) & = -V_t \mathcal{MD}(V_t) \\ \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j \mathcal{C}(h_t^j) & = -V_t \mathcal{C}(V_t) \end{cases}$$

Da qui il nome di **duration/ convexity hedging strategy**

**Limiti:**

- L'ipotesi di una struttura per scadenza piatta  $\Rightarrow$  che tutti gli strumenti di copertura usati abbiano lo stesso YTM (molto restrittivo)
- Vengono considerati solo spostamenti paralleli della curva

# Un solo fattore di rischio (cont)

---

## Possibili soluzioni

- 1 Aggiungiamo al sistema una equazione (e quindi un titolo) che stabilisca che il tasso interno del **portafoglio** sia effettivamente  $y_t$ :

$$\sum_{j=1}^4 \phi_t^j h_t^j = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^4 \phi_t^j c_{t_i}^j (1 + y_t)^{-(t_i-t)}$$

dove  $c_{t_i}^j$  é la posta che il titolo  $h^j$  paga in  $t_i \geq t$ ,  $i = 1, \dots, M$

- 2 Assumiamo una **curva dei tassi interni di rendimento non piatta**, per cui ogni  $h^j$ , ha il proprio tasso interno  $y_t^j$ , tuttavia manteniamo l' ipotesi di shifts paralleli (sempre un solo fattore di rischio), cioè non ammettiamo trasformazioni non-lineari della struttura a termine (quindi consideriamo solo variazioni del livello generale dei tassi) ovvero  $dy_t^1 = dy_t^2 = \dots = dy_t^J = dy_t$  ed il sistema da risolvere subirá modifiche solo marginali (ciascuna Duration e Convexity é calcolata al proprio tasso interno):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j & = V_t \\ \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j(y_t^j) \mathcal{MD}(h_t^j(y_t^j)) & = -V_t \mathcal{MD}(V_t) \\ \sum_{j=1}^3 \phi_t^j h_t^j(y_t^j) \mathcal{C}(h_t^j(y_t^j)) & = -V_t \mathcal{C}(V_t) \end{cases}$$

## Un solo fattore di rischio (cont)

---

Osserviamo:

Flussi che scadono nello stesso istante dovrebbero essere attualizzati con tassi (interni) diversi solo in virtù della loro appartenenza a titoli diversi ( $h^j$ )



non ha molto senso economicamente parlare di una struttura per scadenza dei tassi interni di rendimento (YTM).

Il metodo della **duration/convexity hedging** che abbiamo appena illustrato, oltre a trattare il rischio di tasso come un rischio sul *livello generale* dei tassi di interesse (per l'ipotesi di shifts paralleli), non é pienamente consistente. **Occorre considerare una curva dei tassi z.c.b. come fonte di rischio** se vogliamo rimuovere l'ipotesi di struttura a termine piatta e shifts solo paralleli.

# Fattore di rischio: tutta la curva dei tassi z.c.b.

---

Consideriamo  $\beta_t = (r_t^1, \dots, r_t^N)'$  e quindi  $V_t = V(r_t^1, \dots, r_t^N)$  funzione di tutti i tassi zcb da cui dipende la valutazione dei suoi flussi di cassa.

Sappiamo che la strategia é costruire un portafoglio  $H_t$  tale che  $dH_t = -dV_t$  o equivalentemente  $dV_t^* = dH_t + dV_t = 0$ , dove spesso in *risk management*  $V_t^* = H_t + V_t$  viene denominato **portafoglio di global hedging**

Con un' approssimazione al 1° ordine infatti otteniamo che  $dV_t^* = 0$ , poiché

$$dV_t^* \approx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial V_t}{\partial r_t^i} + \sum_{j=1}^N \phi_t^j \frac{\partial h_t^j}{\partial r_t^i} \right] dr_t^i$$

richiede che l'argomento tra quadre sia nullo  $\forall i$ , che in notazione vettoriale implica la soluzione del sistema di equazioni che gia' abbiamo visto

$$\sum_{j=1}^N \phi_t^j \nabla h^j(\beta_t) = -\nabla V(\beta_t)$$

che in forma matriciale compatta puo' essere scritto come  $H_t' \cdot \Phi_t = V_t'$  dove

$$H_t' = \left( \frac{\partial h_t^j}{\partial r_t^i} \right)_{i,j=1,\dots,N} \quad \Phi_t = (\phi_t^1, \dots, \phi_t^N)' \quad V_t' = \left( -\frac{\partial V_t}{\partial r_t^1}, \dots, -\frac{\partial V_t}{\partial r_t^N} \right)'$$

la cui soluzione é appunto

$$\Phi_t = (H_t')^{-1} \cdot V_t'$$

# Raggruppare i fattori di rischio

---

La necessità di avere  $N$  linearmente indipendenti strumenti di copertura per poterci coprire dal variare di tutti i fattori di sconto che sono coinvolti nella valutazione del nostro portafoglio ci porta a sviluppare delle **tecniche di raggruppamento** più o meno arbitrarie per poter risolvere ugualmente il sistema con un numero di strumenti  $M \ll N$

$$dV_t^* \approx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial V_t}{\partial r_t^i} + \sum_{j=1}^M \phi_t^j \frac{\partial h_t^j}{\partial r_t^i} \right] dr_t^i$$

- Assumere che tutti i tassi siano uguali (**struttura per scadenza piatta**)
- Assumere una curva di forma generica, ma considerare solo **spostamenti paralleli** di questa  $\Rightarrow dr_t^i = dr_t, \forall i$

- **Raggruppare in maniera ‘arbitraria’ per scadenza**

E' lecito supporre che tassi adiacenti per scadenze subiscano variazioni pressoché uguali. In base al numero di strumenti di copertura disponibili possiamo frazionare la curva dei tassi in due o più settori, tipicamente breve e lungo termine, breve medio e lungo termine, etc... ed imporre all'interno di ciascun blocco variazioni uniformi. Ad esempio

$$dr_t^k = dr_t^{\text{breve}} \quad k = 1, \dots, 5 \quad dr_t^k = dr_t^{\text{lungo}} \quad k = 6, \dots, 10$$

- **Analisi delle componenti principali (PCA)**

# Raggruppare i fattori di rischio (cont)

Il processo di raggruppamento é ovviamente vincolato dalla numerosita'  $M$  degli strumenti di hedging disponibili.

- Non dobbiamo pero' dimenticare che potrebbe essere piu' appropriato in certe situazioni adottare un raggruppamento ancora piu' esteso ed adottare un'approssimazione non al primo ma al secondo ordine.

$$dV_t^* \approx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial V_t}{\partial r_t^i} + \sum_{j=1}^M \phi_t^j \frac{\partial h_t^j}{\partial r_t^i} \right] dr_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^N \left[ \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^i \partial r_t^l} + \sum_{j=1}^M \phi_t^j \frac{\partial^2 h_t^j}{\partial r_t^i \partial r_t^l} \right] dr_t^i dr_t^l$$

La quale richiede un numero  $M$  di strumenti esattamente doppio!

- *Esempio: Dati due strumenti possiamo scegliere se immunizzare il nostro portafoglio da **due fattori di rischio al primo ordine**, o da **un solo fattore ma al secondo ordine**. Quale delle due alternative sceglieremmo se prevedessimo:*
  - *uno shift ampio e parallelo della curva ?*
  - *due shifts limitati ma su scadenze diverse della curva (modificazione dell'inclinazione della curva)?*

La tecnica di raggruppare i fattori di rischio coinvolti in finanza viene chiamata **key rate analysis**. Le sensitività degli strumenti di hedging rispetto ai vari fattori coinvolti (vedi le derivate prime) vengono denominati key rate **deltas**, mentre le corrispondenti derivate seconde, key rate **gammas**



# Analisi componenti principali

---

## Intuizione:

- La **PCA** é un metodo che studia la matrice di correlazione di successive variazioni di una qualche variabile. L'idea é quella di **spiegare il comportamento delle variabili osservate usando un'insieme molto piu' piccolo di variabili implicite non osservate**
- Matematicamente si tratta di trasformare un insieme di variabili correlate in un insieme di variabili ortogonali in grado di riprodurre le stesse informazioni presenti nella struttura di correlazione

## Metodo Generale:

- sia  $x(1), \dots, x(N)$  un campione di  $N$  osservazioni di un vettore  $x$   $n \times 1$  di  $n$  variabili
- costruiamo la matrice empirica di varianza e covarianza  $n \times n$   $\hat{\Sigma}$  con generico elemento

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_i(k) - \mu[x_i])(x_j(k) - \mu[x_j])}{N - 1}$$

dove  $\mu[x_i] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i(k)$  sia la media di  $x_i$ . Assumiamo  $\hat{\Sigma}$  non-degenerata (indipendenza lineare delle componenti  $x$ )

## Analisi componenti principali (cont)

---

- $\exists!$  la matrice ortogonale\*  $A = (p_1, \dots, p_n)$  costituita dagli autovettori ortonormali di dimensioni  $n \times 1$   $p_i$  di  $\hat{\Sigma}$  tale che:

$$\hat{\Sigma} = ALA'$$

dove  $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  con  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  gli autovalori di  $\hat{\Sigma}$

- definiamo  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) := A'x$ . Allora

$$\text{Cov}[z_i, z_j] = \sum_{k,l=1}^n A'_{ik} \text{Cov}[x_k, x_l] A'_{jl} = (A' \hat{\Sigma} A)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}^\dagger$$

e le  $z_i$  sono incorrelate. Si usa dire che la matrice degli autovettori  $\acute{e}$  la matrice che diagonalizza  $\hat{\Sigma}$ .  $A' \hat{\Sigma} A = \Lambda$  matrice diagonale, che  $\acute{e}$  appunto la matrice di covarianza delle  $z_i$  (nota che ovviamente  $\Lambda = L$ )

\*ovvero  $AA' = I$  e  $A^{-1} = A'$

$^\dagger \delta_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  per  $i = j$  ( Notazione molto usata derivante dalla teoria della  $\delta$ -Dirac)

# Analisi componenti principali (cont)

---

- tecnicamente le **componenti principali** sono gli autovettori  $n \times 1$   $p_1, \dots, p_n$  :

$$x = Az$$

, anche se di fatto sono le  $z_i$  le nuove variabili indipendenti!(a volte la terminologia confonde le due variabili..) l'importanza della componente  $i$ -esima é determinata dal valore del corrispondente autovalore  $\lambda_i$ , che indica l'ammontare di varianza spiegata appunto dall'  $i$ -esima componente. La statistica chiave é il rapporto

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

- Normalizzazione: sia  $\tilde{\omega} := (L^{1/2})^{-1}z$  \* e  $\omega = \tilde{\omega} - \mu[\tilde{\omega}]$ . Allora

$$\mu[\omega] = 0 \quad \text{Cov}[\omega_i \omega_j] = \text{Cov}[\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j] = \delta_{ij}$$

e

$$x = \mu[x] + AL^{1/2}\omega = \mu[x] + \sum_{j=1}^n p_j \sqrt{\lambda_j} \omega_j$$

la  $i$ -esima componente quindi

$$x_i = \mu[x_i] + \sum_{j=1}^n A_{ij} \sqrt{\lambda_j} \omega_j$$

\*Si ricordi che  $(\text{diag}(a_i))^{-1} = \text{diag}(1/a_i)$

## Analisi componenti principali (cont)

---

- spesso in finanza viene usato ridefinire le variabili come segue:

$$\sigma_i = \text{Var}[x_i]^{1/2} = (\hat{\Sigma}_{ii})^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^n A_{ij}^2 \lambda_j \right)^{1/2}$$

$$v_i = \frac{x_i - \mu[x_i]}{\sigma_i} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ij} \sqrt{\lambda_j} \omega_j}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Abbiamo quindi che  $\mu[v_i] = 0$  e che  $\mu[v_i^2] = 1$  che implica

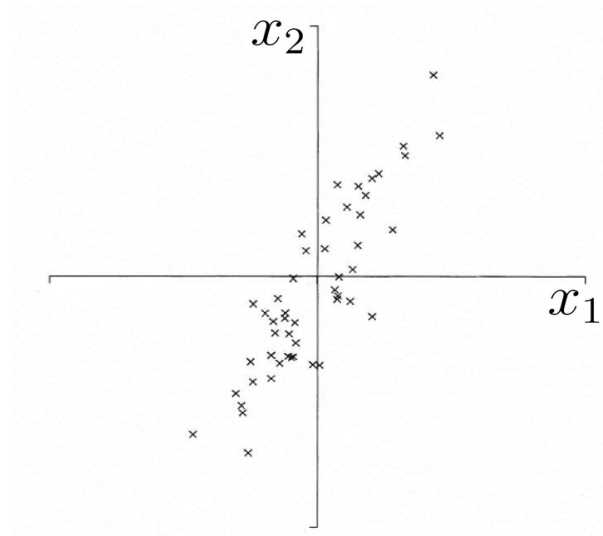
$$x_i = \mu[x_i] + \sigma_i v_i$$

(vedi matrice di correlazione!)

# Analisi componenti principali: visione geometrica

---

Consideriamo un campione di  $n$  osservazioni nello spazio bidimensionale  $x = (x_1, x_2)$



L'obiettivo é tenere conto della **maggior parte delle variazioni** del campione con il minor numero possibile di variabili **incorrelate** (ortogonali)

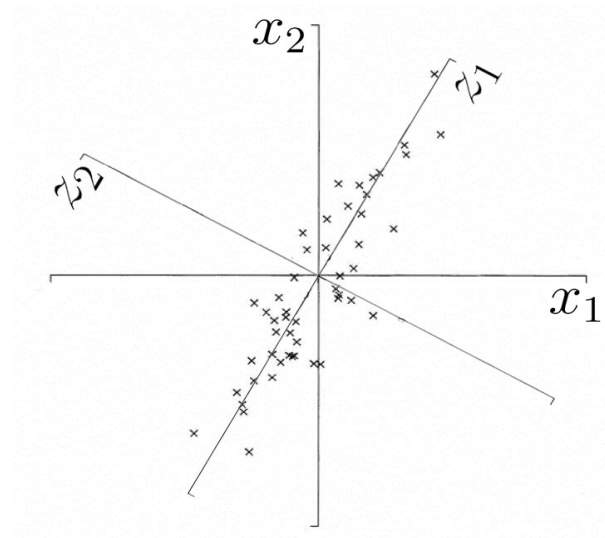


criterio di determinazione delle componenti (ovvero degli autovettori, che ne definiscono la trasformazione lineare a partire dai dati): **massimizzare la varianza dato il vincolo di ortogonalita'** (covarianza = 0) piu' una normalizzazione. \*

\*Tipicamente si richiede che gli autovettori abbiano lunghezza unitaria in  $L^2$ ,  $\|A_k\| = 1$

# Analisi componenti principali: visione geometrica (cont)

---



La prima componente  $z_1$  é una stima di minima distanza di una linea nel piano  $X$

La seconda componente  $z_2$  é una stima di minima distanza di una linea nel piano perpendicolare alla prima componente

**Le varie componenti non sono altro che una successione di stime OLS su di un certo campione, ognuna di queste ortogonali a tutte le precedenti**

# Analisi componenti principali : esempio

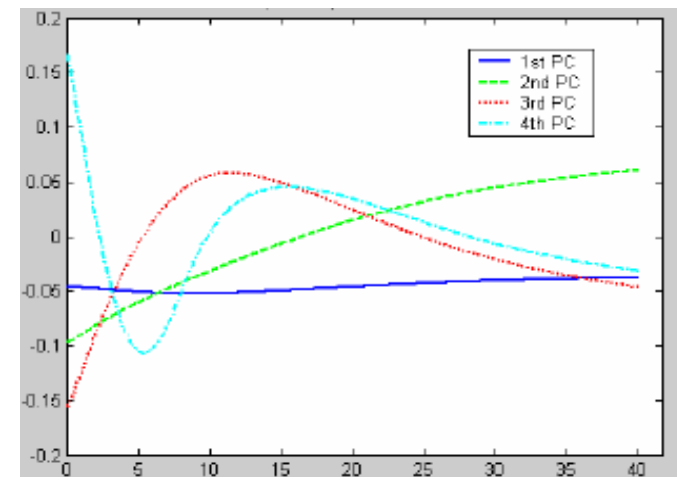
Vediamo una tipica PCA applicata ad un dataset di tassi spot zero-coupon che risultati ci da.

- Mercato americano, zero-coupon yield 1997 – 2001, scaricabili <http://econ.ohio-state.edu/jhm/ts/ts.html>, incrementi mensili ( $N = 60$ ) dal tasso istantaneo fino a 40 anni di orizzonte temporale  $\Rightarrow n = 481$  variabili

$$r_{t_i}(\tau_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, n$$

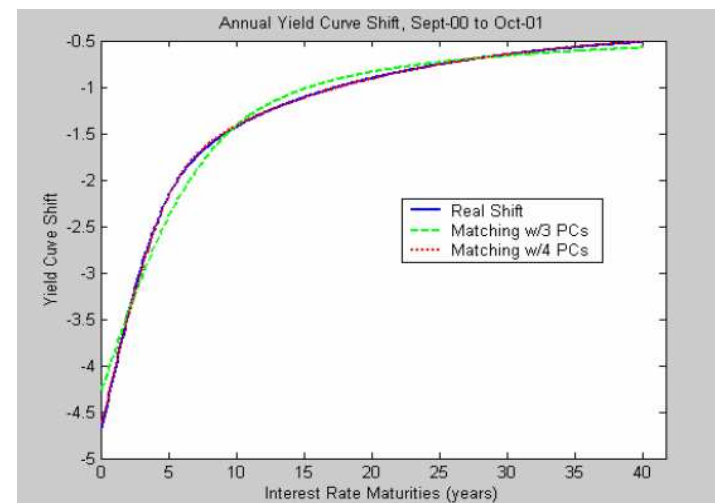
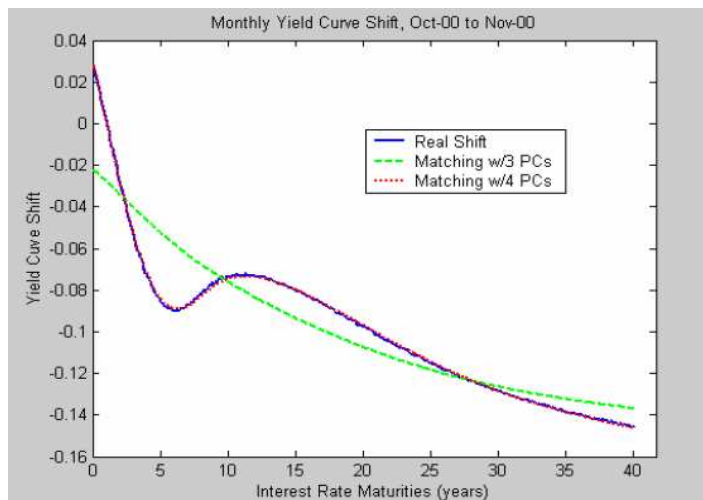
- definiamo la variabile aleatoria  $d_j$  e le sue osservazioni  $d_{ij} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j)$  quale misura delle variazioni successive nella struttura a scadenza e  $\Sigma = \{\Sigma_{ij}\}$ ,  $\Sigma_{ij} = \text{cov}(d_i, d_j)$

Fattori	Autovalori	%Spiegata	%Cumulata
1	16.38	75.824	75.824
2	4.41	20.432	96.257
3	0.72	3.335	99.592
4	0.087	0.40	99.995
5	0.00088	0.0041	99.999
6	8.67E-05	0.00040	99.9996
7	1.59E-05	7.4E-05	99.99966
8	4.20E-06	1.9E-05	99.99968
9	4.03E-06	1.9E-05	99.99970
10	3.67E-06	1.7E-05	99.99972



# Analisi componenti principali : esempio (cont)

- L'effettiva variazione nella curva zero osservata puo' essere ottenuta come una combinazione di shift **differenti, indipendenti e fondamentali** della curva stessa.
  - La prima componente é di fatto piatta (shift parallelo → tasso medio)
  - La seconda componente é crescente (tilt → inclinazione) shifts differneti sulle brevi e sulle lunghe scadenze
  - La terza componente é humped-shaped (flex → curvatura ) denota una curvatura accentuata per le medie maturity
  - La quarta componente é U & humped-shaped (differenziazione della curvatura piu' articolata nei vari segmenti della struttura a scadenza)





## Analisi componenti principali : hedging

---

Siamo riusciti in una maniera non arbitraria a raggruppare significativamente (spiegando la quasi totalita' delle variazioni osservate) con due, tre, massimo quattro fattori. Ovvero siamo in grado di scrivere le variazioni  $dr_t^i$  come una combinazione lineare di nuove variabili indipendenti

$$dr_t^i \approx \sum_{l=1}^K \alpha_{li} \Pi_t^l$$

Si tratta semplicemente di sostituire queste variazioni così ridefinite nell'equazione di  $dV^*$  una volta scelto il numero di fattori  $K$  e di risolvere il solito sistema

$$H'_t \cdot \Phi_t = V'_t$$

Notiamo che i coefficienti  $\alpha_{li}$  misurano la sensitività di  $dr_t^i$  a variazioni nella componente  $\Pi_l$