

Mercato a reddito fisso e Risk Management

Indici di sensitività

Bond pricing: i cinque teoremi fondamentali

- I prezzi dei bonds e i tassi di interesse variano in modo inversamente proporzionale.

Non si tratta però, di una relazione lineare



- Tenuta fissa la maturity, una diminuzione nei tassi porta, in termini percentuali, un aumento nei prezzi maggiore della corrispondente diminuzione a fronte di un equivalente aumento dei tassi
- **Ceteris paribus, la volatilità di prezzo è una funzione crescente della maturity.** I Prezzi dei bonds a lungo termine fluttuano più dei prezzi dei corrispondenti bonds a breve
- **Effetto maturity** La variazione di prezzo percentuale dovuta all'aumento del time to maturity, aumenta, ma ad un tasso decrescente. Raddoppiare il time to maturity non comporta una variazione percentuale di prezzo raddoppiata a seguito della conseguente variazione dei rendimenti di mercato.
- **Effetto coupon.** Ceteris paribus, le fluttuazioni di prezzo percentuali (volatilità) e i tassi cedolari sono inversamente proporzionali.

Conclusione: Le due variabili più importanti per la comprensione delle variazioni di prezzo a seguito di movimenti del tasso di interesse, sono il coupon e la maturity.

Una diminuzione (aumento) nei tassi di interesse causerà un aumento (diminuzione) dei prezzi con il massimo effetto sui bonds a lungo termine e con bassi coupons

Indici temporali

Sia dato un bond o un portafoglio di bonds, in generale un flusso di cassa $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1,2,\dots,K}$ costituito da K pagamenti noti, disponibili in $\{t_i\}_{i=1,2,\dots,K}$

Il fattore tempo rappresenta un rischio a cui il nostro portafoglio è sottoposto in quanto non sappiamo nel frattempo come si possono evolvere le condizioni di mercato (di redditività) \rightarrow ci chiediamo come dare **un'indicazione sintetica delle caratteristiche temporali di un generico flusso di cassa**

1. **Maturity t_K e time to maturity $(t_K - t)$** : non considerano l'effetto finanziario della distribuzione dei pagamenti nel tempo (a meno che il flusso di cassa sia costituito da un unico importo).

2. **Scadenza media:**

$$\bar{t} = \left(\sum_{i=1}^K (t_i - t) F_i \right) / \left(\sum_{i=1}^K F_i \right)$$

considera il solo valore monetario delle poste ma non la loro importanza relativa alla distribuzione temporale.

Abbiamo bisogno di qualcosa di piu' sofisticato e informativo ...

Indici temporali: duration

Macaulay Duration (o semplicemente Duration):

$$\mathcal{D}(t, \mathcal{F}) = \frac{\sum_{i=1}^K (t_i - t) F_i B(t, t_i)}{\sum_{i=1}^K F_i B(t, t_i)}$$

E' una media dei singoli **time to maturity** ponderata con il valore attuale delle corrispettive poste in rapporto al valore attuale dell'intero flusso di cassa \mathcal{F} . *L'importanza relativa di ogni scadenza é quindi proporzionale al valore finanziario dell'importo associato.*

- Ha dimensione tempo
- E' la distanza da t del baricentro della distribuzione normalizzata dei valori attuali delle poste sull' asse dei tempi.
- $(t_1 - t) \leq \mathcal{D}(t, \mathcal{F}) \leq (t_K - t)$ (quando vale una delle due uguaglianze?)

Esempio: Duration di un coupon-bond, valore di rimborso C , cedola I , struttura di interesse piatta y (come possiamo interpretare y ?)

$$\mathcal{D}(0, \mathcal{F}) = \frac{\left[I \sum_{i=1}^K i(1+y)^{-i} + KC(1+y)^{-K} \right]}{\left[I \sum_{i=1}^K (1+y)^{-i} + C(1+y)^{-K} \right]}$$

Fissata la maturity, come varia \mathcal{D} al variare di y e di I ?

Indici temporali: duration (cont)

Duration = Orizzonte di investimento neutrale

La duration di un bond o di un portafoglio di bond rappresenta quell'orizzonte temporale tale che un investitore che abbia esattamente quell'orizzonte di investimento risulterà indifferente ad eventuali aumenti o diminuzioni (fintanto che risultino contenuti) del tasso di interesse.

Il rischio in conto capitale é compensato dal rischio di reinvestimento

Esempio: Si consideri un bond a 3 anni, YTM 5%, valore nominale 100, coupon del 5%. Frequenza cedolare e di capitalizzazione annuale. Prezzo €100, duration 2.86 anni. Assumiamo che lo YTM cambi istantaneamente e resti costante poi per tutta la vita del bond.

Comunque vari lo YTM, la somma del prezzo del bond e dei coupon reinvestiti dopo 2.86 anni e di fatto sempre uguale

YTM (%)	Prezzo Bond	Coupons reinvestiti	Totale
4	104,422	10,550	114,972
4,5	104,352	10,619	114,971
5	104,282	10,689	114,971
5,5	104,212	10,759	114,971
6	104,143	10,829	114,972

Indici temporali: modified duration

Sia $P_t := P(t, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^K F_i B(t, t_i)$ il prezzo del flusso di cassa \mathcal{F} . E sia la struttura per scadenza dei tassi di interesse **piatta**

Modified Duration :

$$\mathcal{MD}(t, \mathcal{F}) = \mathcal{D}(t, \mathcal{F}) / (1 + y) = -\frac{\partial P_t / \partial y}{P_t}$$

E' una *misura della sensitività del prezzo rispetto allo YTM*, mi da appunto una misura della variazione percentuale del prezzo di un flusso di cassa (bond) per una data variazione dello YTM \Rightarrow **approssimazione al primo ordine** (*regola del pollice*): prezzo del bond e YTM hanno una relazione non lineare che io approssimo osservando la variazione della tangente alla curva (derivata prima)

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\mathcal{MD} \Delta y$$

DV01 *dollar value 1bp* (anche se la valuta non é il dollaro): la variazione monetaria di prezzo di un bond per la variazione di 1bp nello YTM

$$DV01 = -\frac{1}{10,000} \frac{dP}{dy} \approx \frac{\mathcal{MD} P}{10,000}$$

dove spesso $\$D = -\mathcal{MD} P$ é detta *dollar duration*

Proprietà delle misure di duration

- Si consideri un bond con maturity 10 anni, coupon al 6% annuale, YTM 6% (frequenza di capitalizzazione annuale) e valore nominale €100. Tenendo fissi YTM e maturity vediamo come variano le varie misure di duration in corrispondenza di diversi valori del tasso cedolare

Tasso Coupon (%)	Duration	\$Duration	Modified Duration
3	8,59	-631,40	8,1
4	8,28	-666,27	7,81
5	8,02	-701,14	7,57
6	7,80	-736,01	7,36
7	7,61	-770,88	7,18
8	7,45	-805,75	7,02
9	7,30	-840,62	6,89

Tenendo costante il time to maturity e YTM

Tassi cedolari piu' bassi \Rightarrow duration maggiore

- Stesso bond. Facciamo variare la maturity e teniamo tasso coupon e YTM costanti

Maturity (anni)	Duration	\$Duration	Modified Duration
7	5,92	-558,24	5,58
8	6,58	-620,98	6,21
9	7,21	-680,17	6,80
10	7,80	-736,01	7,36
11	8,36	-788,69	7,89
12	8,89	-838,38	8,38
13	9,38	-885,27	8,85

Tenendo costante il tasso cedolare

Time to maturity piu' lunghi \Rightarrow duration maggiore

Proprietà delle misure di duration (cont)

- Stesso bond. Siano fissi maturity e tasso cedolare.

YTM (%)	Duration	\$Duration	Modified Duration
3	8,07	-983,62	7,83
4	7,98	-891,84	7,67
5	7,89	-809,67	7,52
6	7,80	-736,01	7,36
7	7,71	-669,89	7,20
8	7,62	-610,48	7,05
9	7,52	-557,02	6,90

Tenendo costanti tutti gli altri fattori

YTM piu' basso \Rightarrow duration maggiore

- **Una misura di duration maggiore indica un rischio maggiore:**
piu' lontani nel tempo sono i flussi di cassa, piu' risultano influenzati dal tasso di interesse
- **Misure di duration di un portafoglio di bond**
 - media ponderata delle corrispondenti durations dei singoli bonds
 - i pesi sono le quote di ogni bond rispetto al valore di mercato dell'intero portafoglio

Esempio

6% coupon bond a 5 anni, cedole semestrali

- $YTM = 9\% \Rightarrow P = \text{€}88.13$
- $YTM = 9.01\% \Rightarrow P = \text{€}88.09$
- $DV01@9\% = \text{€}0.04$
- $\mathcal{D} = 4.345$
- $\mathcal{MD} = \mathcal{D}/(1 + YTM/2) = 4.158$
- $\$D = -\mathcal{MD}P = -366.435$
- Una variazione dello YTM di 10bps, $\Delta YTM = 0.1\%$ otteniamo

$$\text{P\&L Assoluto} = \$D \Delta YTM = - \text{€} 0.3664$$

$$\text{P\&L Relativo} = -\mathcal{MD} \Delta YTM = - 0.4158\%$$

Approssimazioni di ordine superiore: convexity

Convexity :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, \mathcal{F}) &= \frac{\partial^2 P_t / \partial y^2}{P_t} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^K (t_i - t)(t_i - t + 1) F_i (1 + y)^{-(t_i - t + 2)}}{\sum_{i=1}^K F_i (1 + y)^{-(t_i - t)}} \end{aligned}$$

Dipende dal quadrato del time to maturity

Si tratta sempre di una misura di sensitività del prezzo, ma di secondo ordine → **curvatura** del prezzo in funzione dello YTM (es. bond con stessa duration, ma con diversa convexity sono maggiormente esposti al rischio di variazione tassi)

Mi da un'indicazione di come varia la duration (o la modified duration) al variare dello YTM

$$\Delta \mathcal{MD} \approx -\mathcal{C} \Delta y$$

Ci fornisce un'approssimazione piu' accurata della variazione percentuale di prezzo (formula di Taylor troncata al secondo ordine)

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\mathcal{MD} \Delta y + \frac{1}{2} \mathcal{C} (\Delta y)^2$$

Tanto piu' la variazione di y è rilevante tanto piu' risulta evidente una variazione del prezzo piu' accentuata per variazioni di segno negativo che di segno positivo di y

Convexity: esempio

- Due bonds o portafogli di bonds
 - Bond A: $MD = 5$ e $C = 30$
 - Bond B: $MD = 5.1$ e $C = 50$
- ⇒ **Il bond B ha delle caratteristiche migliori**

	Bond A	Bond B
$\Delta y = + 100 \text{ bp}$	$\Delta P/P \approx - 4.85\%$	$\Delta P/P \approx - 4.85\%$
$\Delta y = - 100 \text{ bp}$	$\Delta P/P \approx + 5.15\%$	$\Delta P/P \approx + 5.35\%$