

Mercato a reddito fisso e Risk Management

---

**Strutture per scadenza dei tassi di interesse**

# Agenda ed elementi chiave

---

- **Struttura dei tassi di interesse**
  - 3 tipi
  - Forme
  - Importanza
- **Curva dei tassi spot da STRIPs**
  - Dati ed emissioni
  - Interpolazioni
  - Regressione Yield
  - Regressione fattori sconto
- **Curva dei tassi spot dai coupon bonds**

- Metodo diretto: bootstrap
- Metodo indiretto

- **Curva dei tassi forward**

- **Tassi istantanei**

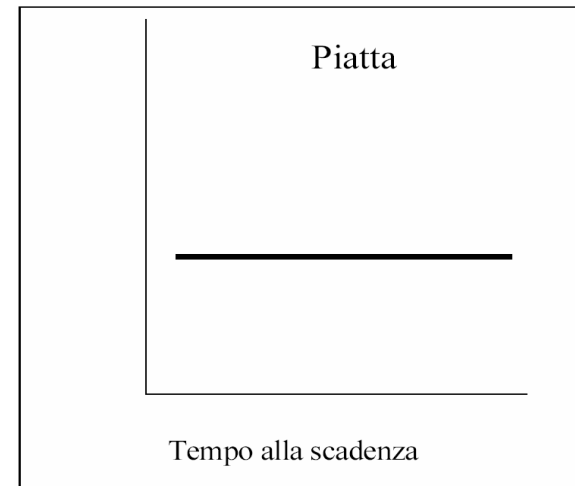
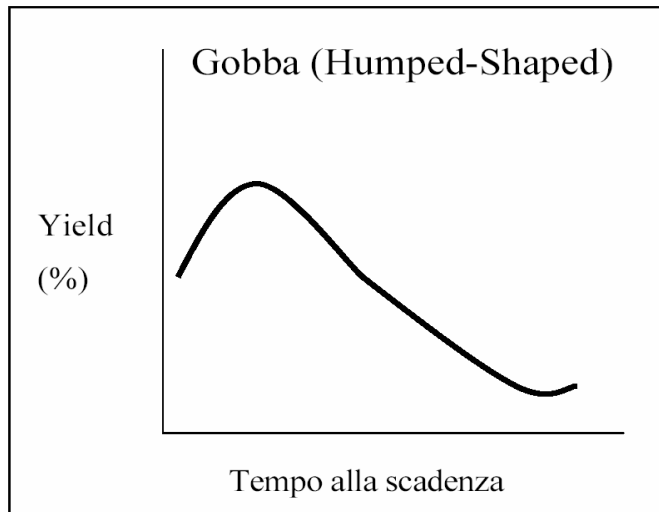
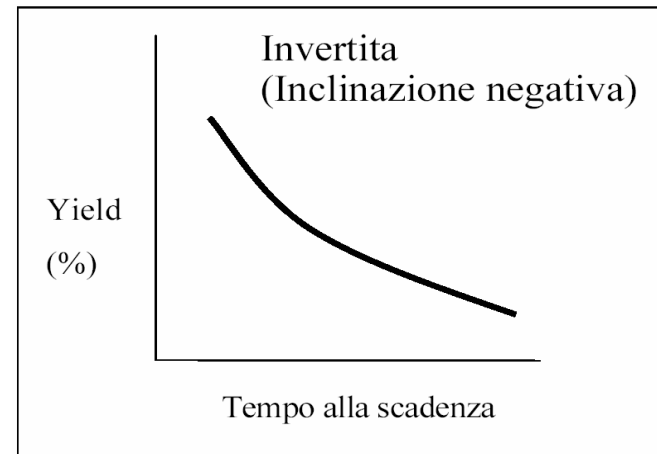
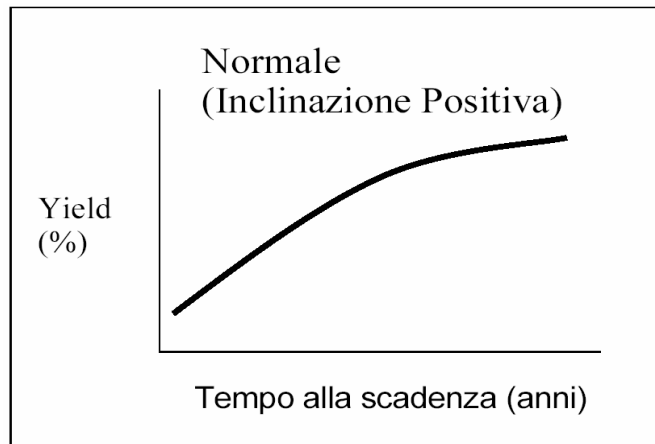
# Tipologie

---

- Con il termine **struttura dei tassi di interesse** ci si riferisce alla relazione intrinseca che sussiste tra i rendimenti dei bond presenti nel mercato al variare della corrispondente scadenza
- Spesso in finanza con questo termine, ci si può riferire indistintamente ad oggetti di fatto diversi, ma che si propongono tutti di studiare, da angolazioni differenti, la relazione tra tassi di interesse e tempo.
- Osserviamo principalmente **3 tipi di strutture a termine diverse**
  - YTM dei coupon bonds  
⇒ **coupon-yield curve**
  - Tassi di sconto degli zero-coupon bonds  
⇒ **spot rate curve** curva dei rendimenti zero-coupon
  - Tassi forward impliciti nei tassi di sconto zero-coupon  
⇒ **curva dei tassi forward**
- Nella sua determinazione ci si riferisce a bonds con un **profilo di rischio simile** il benchmark è ovviamente rappresentato dai tassi *risk free*, estrapolati da bonds con rischio di default prossimo a zero (→ bonds governativi)

# Forme tipiche

- Nei mercati finanziari sono state riscontrate con una certa frequenza quattro forme tipiche sia per la *coupon* che la *zero-coupon yield curve*



# Forme tipiche

---

- Le diverse curve dei rendimenti sono determinate non solo dai tassi di interesse correnti, ma anche dalle aspettative future su gli stessi
- **Inclinazione positiva** È la situazione considerata normale; i maggiori rendimenti nel medio lungo termine compensano il fatto che il capitale è sottoposto a rischio per più tempo. Tanto più è ripida tanto maggiore è la percezione rischio inflazione  
Ci si attende un'aumento dei tassi d'interesse in futuro  $\Rightarrow$  si cerca di anticipare la diminuzione dei prezzi dei bond a medio-lungo termine vendendo tali bonds e reinvestendo sulle scadenze a breve
- **Curva invertita** Siamo nella situazione opposta, ci si attende una diminuzione futura dei tassi. Curve di questo tipo precorrono tipicamente periodi di rallentamento nell'economia (recessioni). Si cerca di anticipare l'aumento nel prezzo dei bond di lungo termine investendovi i proventi delle vendite sul mercato a breve per bloccare i rendimenti
- **Curva piatta e curva a gobba** Sono tipicamente situazioni intermedie di passaggio da una curva normale ad una invertita e viceversa
- Gli interventi governativi di politica monetaria possono influenzare la forma della curva dei rendimenti (Es. Finanziamento debito pubblico con nuova emissione bond ad un tasso più alto  $\Rightarrow$  spinge verso l'alto i rendimenti su gli altri bond con stessa maturity)

# Rilevanza e differenze

---

- **I rendimenti estrapolati dai coupon bond (YTM della yield curve), sono fondamentalmente diversi dai tassi spot e dai tassi forward**
  - Gli YTM si applicano solo alle specifiche strutture di flussi di cassa da cui sono stati ricavati (È valido per un bond specifico)
  - I tassi spot e forward si possono applicare a qualsiasi flusso di cassa, purchè sia rispecchiato il profilo di rischio (default-free)
- **I tassi di interesse non rischiosi sia spot e che forward servono:**
  - come base per la valutazione di tutti i titoli a reddito fisso considerati default-free
  - Come punto di riferimento per la determinazione dei tassi spot e forward utilizzati per il pricing di titoli con un rating di credito più basso
- **Il primo passo nel mondo del fixed-income consiste sempre nel ricavare la struttura temporale, default-free, dei tassi spot o forward che siano**

# Notazione grandezze spot : riepilogo

---

- Sia  $B(t, T)$  il prezzo in  $t$  di uno *zero-coupon bond* (titolo di puro sconto) che scade in  $T$ . Se esistono zero coupon-bond per ogni scadenza  $T$ , allora

$$B(t, \cdot) : [t, \infty] \rightarrow [0, 1]$$

rappresenta il valore di una unità monetaria in  $T$  misurato in 'unità monetarie al tempo  $t$ ', cioè definisce una *legge di equivalenza temporale*, ovvero una *funzione di sconto*.

$$B(t, T_1) \geq B(t, T_2), \quad t \leq T_1 \leq T_2 \quad \text{e} \quad B(T, T) = 1$$

- Sia  $j(t, T)$  il *tasso di rendimento periodale* sull'arco di tempo  $T - t$  derivante dalla detenzione del titolo fino a scadenza

$$j(t, T) = \frac{1 - B(t, T)}{B(t, T)} = \frac{1}{B(t, T)} - 1$$

**Nota:** Questo è un tasso che poi a seconda delle caratteristiche del titolo va **convertito** → tipo di capitalizzazione, base annuale, semestrale,...

- **TASSI EQUIVALENTI.** Sia  $j_m(t, T)$  il tasso  $m$ -periodale con  $m$  capitalizzazioni nel periodo unitario (es. anno)

$$1 + j(t, T) = (1 + j_m(t, T))^{(T-t)m}$$



## Notazione grandezze spot : riepilogo (cont)

---

- Sia  $r(t, T)$  indica il tasso **annuale** *zero-coupon* per l'istante di valutazione  $t$  e vita residua  $T - t$  (tempo espresso in frazioni d'anno) in regime di interesse composto ( $m = 1$ ):

$$r(t, T) = B(t, T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

$$B(t, T) [1 + r(t, T)]^{T-t} = 1$$

- Per scadenze brevi ( $T - t \leq 1$  anno) in genere il tasso di rendimento viene definito in regime di interesse semplice:

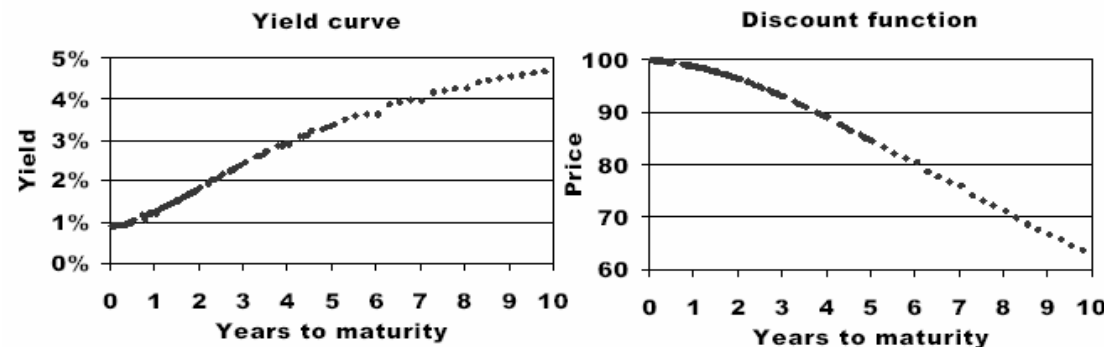
$$l(t, T) = \left( \frac{1}{B(t, T)} - 1 \right) \frac{1}{T - t}$$

$$B(t, T) [1 + l(t, T)(T - t)] = 1$$

- E' questo il caso dei tassi interbancari (LIBOR, EURIBOR), che rivestono importanza particolare perché, come vedremo, sono i 'sottostanti' dei più diffusi contratti derivati (CAPS, FLOORS...)
- E' questo anche il tasso usato nel calcolo dei dietimi di interessi maturati nei titoli con cedola negoziati nel mercato secondario

# Curva spot

- Come prima cosa raccogliamo tutti i dati di mercato disponibili riferiti a titoli di puro sconto, con lo stesso profilo di rischio (default-free). Di fatto BOT, CTZ, STRIPS (T-bill e STRIP in US)
- Si determinano i relativi rendimenti su base annua (attenzione: convenzioni → frazione d'anno appropriata)
- Tracciamo sia la curva dei rendimenti che la funzione di sconto, rimuovendo eventuali outliers (situazioni anomale..)

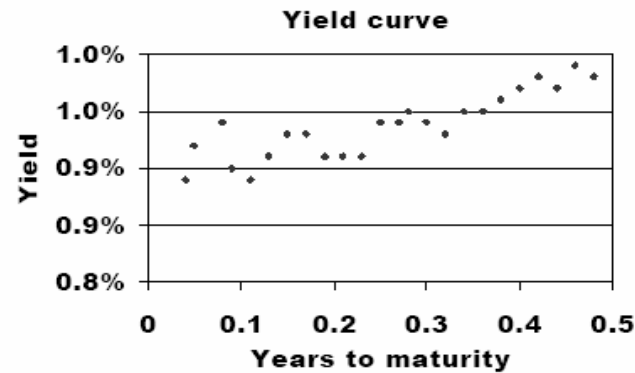


- Notiamo che i fattori di sconto sono molto meno variabili dei rendimenti zero-coupon  
⇒ Può convenire modellare la funzione di sconto invece della curva dei rendimenti direttamente

# Curva spot: problemi

---

- I dati sugli zero-coupon non sono così smooth come vorremmo

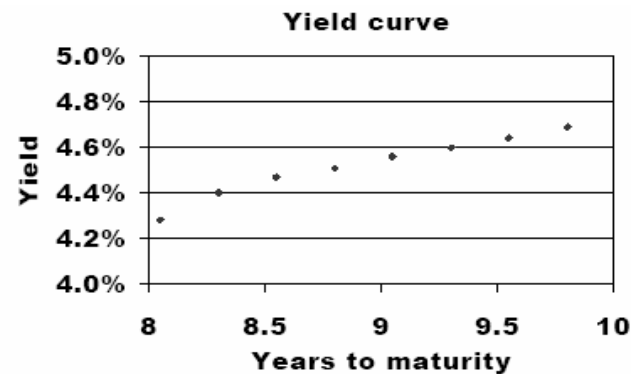


- **Motivazioni**
  - Differenze di liquidità
  - Quotazioni vecchie
  - Approssimazioni

## Curva spot: problemi (cont)

---

- Sul lungo termine abbiamo pochi dati estremamente sparsi



- **Motivazioni**

- Le scadenze del mercato STRIPS sono strettamente legate alla cadenza dei pagamenti cedolari dei coupon bond *strippati*  $\Rightarrow$  pochi dati
- Problema: potremmo aver bisogno di valutare un portafoglio con flussi di cassa in scadenze intermedie, quale tasso prendo?

# Soluzione 1: Interpolazione

---

- **Interpolazione lineare**

- La determinazione di valori intermedi è immediata

Sia  $t < i < s$

$$r_i = r_t + (r_s - r_t)(T_i - T_t)/(T_s - T_t)$$

- Non è un metodo accurato per calibrare forme curvilinee (hump-shaped)
- Otteniamo dei risultati diversi sui fattori di sconto
- Produce discontinuità sulla curva dei tassi forward
- È un metodo estremamente sensibile agli outliers

# Soluzione 1: Interpolazione (cont)

---

- **Spline cubiche**

- Un polinomio terzo grado viene stimato per ogni coppia di punti.

$$f_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(-t_i)^2 + c_i(t - t_i) + r_i \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad i = 1, \dots, n$$

- Siano  $n$  i dati di mercato che si vogliono interpolare, si hanno  $3(n-1)$  coefficienti da stimare. Perchè il sistema sia risolvibile e perchè la stima presenti delle condizioni di regolarità si impongono delle restrizioni:

1. i punti di contatto(knot point) di due spline adiacenti devono essere uguali (dati di mercato)  $(n-1)$
2. Derivata prima e seconda coincidenti per spline equivalenti  $(2(n-1))$
3. derivata prima e seconda nei punti finali siano zero  $(2)$

- Si ottiene una buona interpolazione, due volte differenziabile per ogni dato osservato
- fa un buon lavoro con curve ondulate
- non facilissimo da calcolare (routine)
- soffre in caso di oscillazioni

- **Sono possibili anche interpolazioni di ordine superiore, sfruttando così maggiori informazioni. In ogni caso tutti questi metodi puntano a stimare tutti i dati esattamente e questo in economia non è sempre desiderabile.**  
⇒ **smoothing**

## Soluzione 2: Regressione dei rendimenti

---

- Possiamo specificare un modello per il tasso di interesse spot in funzione del tempo a scadenza (sempre espresso in anni)

$$r = f(t; \mathbf{a})$$

e stimarla

- Due comuni specificazioni

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \ln t + \varepsilon(t)$$

oppure

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{1}{t} + \varepsilon(t)$$

- Entrambe le specificazioni hanno problemi per le scadenze a breve termine ( $t \approx 0$ )
- Una specificazione migliore

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \ln(1 + t) + a_3 \left( \frac{1}{1 + t} - 1 \right) + \varepsilon(t)$$

- L'intercetta = tasso spot istantaneo

## Soluzione 2: Regressione dei rendimenti(cont)

---

Regression Statistics			
Multiple R	0.9995	Instantaneous spot rate	
R Square	0.9991		
Adjusted R Square	0.9990		
Standard Error	0.0004		
Observations	104		
	Coefficients	Standard Error	t Stat
Intercept	0.009967	0.000136	73.4363
$t$	-0.000577	0.000121	-4.7594
$\ln(1+t)$	0.033658	0.000911	36.9371
$1/(1+t)-1$	0.040845	0.001315	31.0533



## Soluzione 2: Regressione dei rendimenti (cont)

- I rendimenti stimati



- Ora i rendimenti zero-coupon per qualsiasi scadenza, possono essere calcolati dal valore stimato della regressione

$$\hat{r}(t) = 0.01 - 0.00058t + 0.03366 \ln(1 + t) + 0.04085 \left( \frac{1}{1 + t} - 1 \right)$$

- Nota: l'estrapolazione al di là del range dei dati è pericolosa, quanto più il modello è calibrato solo sulle scadenze a breve ( $t < 5$  anni)

## Soluzione 3: Regressione dei fattori di sconto

---

- Si tratta di specificare un modello per i fattori di sconto sempre in funzione del tempo a scadenza

$$B = f(t; \mathbf{b})$$

e stimarla

- una specificazione realistica

$$B(t) = 100e^{b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \varepsilon(t)}$$

o in termini logaritmici ( $\rightarrow$  linearizzazione dei coefficienti)

$$\ln B(t) - \ln 100 = b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \varepsilon(t)$$

# Soluzione 3: Regressione dei fattori di sconto (cont)

Regression Statistics			
Multiple R	0.9999		
R Square	0.9999		
Adjusted R Square	0.9900		
Standard Error	0.0014		
Observations	104		

	Coefficients	Standard Error	t Stat
Intercept	na	na	na
$t$	0.00609	0.00023	-26.37868
$t^2$	-0.00670	0.00008	-84.93288
$t^3$	0.00027	0.00001	43.34130



- Il valore attuale di un flusso di cassa di €100 ad una qualsiasi scadenza puo' ora essere calcolato semplicemente calcolando il valore stimato dalla regressione

$$\hat{B}(t) = 100e^{-0.00609t - 0.00670t^2 + 0.00027t^3}$$

- Notiamo che questa equazione stimata mi fornisce il valore atteso solo relativamente alla data relativamente alla quale abbiamo espresso i prezzi e i tempi a scadenza, non un giorno prima non un giorno dopo!
- Sempre attenzione nell'estrapolazione di valori stimati fuori dal range dei dati campionari

# Regressione: metodologie

---

- Diverse funzioni obiettivo trattano diversamente gli outliers
  - **Regressione OLS:** minimizzazione della somma dei quadrati delle deviazioni

$$\min \sum_{j=1}^N [\ln B(t_j) - \ln \hat{B}(t_j)]^2$$

Enfatizza gli outliers

- **Regressione MAD:** minimizzazione della somma delle deviazioni in valore assoluto:

$$\min \sum_{j=1}^N |\ln B(t_j) - \ln \hat{B}(t_j)|$$

Limita l'influenza degli outliers

## Tassi spot dai coupon-bond

---

- Volendo calcolare la curva dei tassi spot è naturale partire dai prezzi zero-coupon che troviamo nel mercato.
- Ora ci chiediamo: qualita' dei dati usati? grado di liquidità dei diversi titoli? possiamo sfruttare altre informazioni forniteci dal mercato?

# Bootstrap

---

- **La pratica di *bootstrappare* i prezzi coupon bonds nasce dalle considerazioni di non arbitraggio e dalla legge del prezzo unico.** Poichè i dati di mercato sugli zcb sono limitati, l'idea è quella di sfruttare anche le informazioni fornite dai prezzi coupon bonds
- Ricordiamo che un coupon bond è una somma di zero-coupon bonds  
⇒ Prezzo coupon bond (dato di mercato) = somma dei flussi di cassa scontati con l'appropriato fattore di sconto zero-coupon (incognita cercata)

## Bootstrap: esempio

---

- Consideriamo la seguente struttura di zeros e coupon-bond con pagamenti semestrali:

Titolo	Vita residua	Tasso cedolare	Cedola	Prezzo
A	0.5	-	-	99.4902
B	1.0	$2\frac{1}{8}$	1.0625	100.8906
C	1.5	$1\frac{5}{8}$	0.8125	100.8906
D	2.0	$1\frac{5}{8}$	0.8125	99.6406

- Titolo A:**

- Si tratta già di uno zero-coupon e ricaviamo immediatamente il tasso spot a 6 mesi su base annuale

$$100 = 99.4902(1 + r)^{0.5} \Rightarrow r(0.5) = 1.03\%$$

## Bootstrap: esempio (cont)

---

- **Titolo B:**

- Si tratta della somma di due zeros  $B^B = Z(0.5) + Z(1)$ :

$$Z(0.5) = 1.0625(1 + 0.0103/2)^{-1} = 1.0571$$

$$Z(1) = B^B - Z(0.5) = 100.8906 - 1.0571 = 99.8335$$

- il relativo tasso spot implicito sarà

$$r(1) = \left[ \left( \frac{101.0625}{99.8335} \right)^{0.5} - 1 \right] 2 = 1.23\%$$

- **Titolo C:**

- Ora abbiamo la somma di tre zeros  $B^C = Z(0.5) + Z(1) + Z(1.5)$ :

$$\text{Dopo 6 mesi } 0.8125 \text{ al tasso } r(0.5) \Rightarrow Z(0.5) = 0.8083$$

$$\text{Dopo 1 anno } 0.8125 \text{ al tasso } r(1) \Rightarrow Z(1) = 0.8026$$

$$\text{Dopo 18 mesi } 100.8125 \text{ al tasso } r(1.5) = ? \Rightarrow Z(1.5) = B^C - Z(0.5) - Z(1)$$

$$Z(1.5) = 98.5766 \Rightarrow r(1.5) = 1.50\%$$



## Bootstrap: esempio (cont)

---

- **Titolo D:**

- Ora abbiamo la somma di quattro zeros  $B^D = Z(0.5) + Z(1) + Z(1.5) + Z(2)$ :

- Dopo 6 mesi 0.8125 al tasso  $r(0.5) \Rightarrow Z(0.5) = 0.8083$

- Dopo 1 anno 0.8125 al tasso  $r(1) \Rightarrow Z(1) = 0.8026$

- Dopo 18 mesi 0.8125 al tasso  $r(1.5) \Rightarrow Z(1.5) = 0.7945$

- Dopo 2 anni 100.8125 al tasso  $r(2) = ? \Rightarrow Z(2) = B^C - Z(0.5) - Z(1) - Z(1.5)$

- $Z(2) = 97.2352 \Rightarrow r(2) = 1.81\%$

- **La curva spot implicita nei prezzi coupon bonds quindi:**

- $r(0.5) = 1.03\% \quad r(1) = 1.23\% \quad r(1.5) = 1.50\% \quad r(2) = 1.81\%$

# Metodo Diretto: Bootstrap

Vediamo di generalizzare la metodologia del bootstrap ora esaminata

- Sia  $\mathbf{P}_t = (P_t^1 \dots P_t^j \dots P_t^N)'$  il vettore  $N$ -dimensionale dei prezzi coupon e zero-coupon bonds di mercato
- Sia  $\mathbf{F} = \{F_{t_i}^{(j)}\}_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}$  la matrice  $N \times N$  dei relativi flussi di cassa  
 $\Rightarrow$  stiamo assumendo che **i diversi bond abbiano le stesse date di pagamento**
- e sia  $\mathbf{B}_t = (B(t, t_1), \dots, B(t, t_N))'$  il vettore  $N$ -dimensionale dei prezzi zero-coupon bonds cercati al tempo  $t$  (oggi, data di valutazione) per un'unità di valuta disponibile in  $(t_1, \dots, t_N)'$
- Per l'ipotesi di non arbitraggio possiamo scrivere che

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{F}\mathbf{B}_t$$

- Si tratta di risolvere un sistema lineare di  $N$  equazioni in  $N$  incognite. Affinchè esista un' unica soluzione la matrice  $\mathbf{F}$  deve essere a rango pieno (ovvero il determinante  $\neq 0$ , ovvero **non deve esserci dipendenza lineare nei payoffs** , ovvero l'informazione apportata da ciascun titolo non è ridondante)  $\Rightarrow$  la matrice  $\mathbf{F}$  è invertibile

# Metodo Diretto: Bootstrap (cont)

---

- La soluzione sarà quindi

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_t$$

da cui possiamo immediatamente inferire i relativi tassi spot. In capitalizzazione esponenziale ad esempio abbiamo che l' $i$ -esimo tasso è

$$R(t, t_i - t) = -\frac{1}{t_i - t} \ln B(t, t_i)$$

- Notiamo che i prezzi  $\mathbf{B}_t$  trovati, non sono dei prezzi di mercato, ma dei prezzi **impliciti** consistenti con l'insieme dei prezzi di mercato

## E' un metodo semplice ma con delle grosse limitazioni pratiche

- È difficile trovare così tanti bonds linearmente indipendenti con le stesse date di pagamento
- All'aumentare del numero delle scadenze diminuirà il numero delle entrate significative nella matrice  $\mathbf{F}$  (matrici sparse, problemi di invertibilità dipendenza lineare...)
- Il metodo non è robusto in senso statistico rispetto a cambiamenti nel set di bonds usati
- Questo metodo ci fornisce i fattori di sconto (o tassi) in corrispondenza di uno scadenziario discreto  $\Rightarrow$  per scadenze intermedie dobbiamo ricorrere a tecniche di interpolazione (lineare, spline...)

# Metodo Indiretto

---

Qualora il metodo diretto non possa essere applicato, dobbiamo sviluppare delle tecniche alternative, che se non sono in grado di fornirci una soluzione esatta ci forniscano una buona approssimazione

Come abbiamo visto prima dobbiamo ipotizzare una forma funzionale o per i prezzi zeros o per i tassi spot direttamente e cercare la stima dei parametri che minimizza l'errore di stima (modello parametrico  $\rightarrow$  rischio di mis-specificazione).

- Selezionato un set di  $N$  prezzi  $P_t^j$  e di pagamenti  $F_s^j$  con  $s \geq t$
- Sia  $B_t := f(s - t, \mathbf{b})$  la specificazione adottata, con vincolo  $B(t, t) = 1$
- il vettore dei coefficienti ottimo sara'  $\mathbf{b}^* = \arg \min_{\mathbf{b}} \sum_{j=1}^N (P_t^j - \hat{P}_t^j)$   
dove  $\hat{P}_t^i = \sum_s F_s^{(j)} f(s - t; \mathbf{b}^*)$  sono i prezzi teorici del modello
- ricordiamo che sono valide le classiche assunzioni sui residui del modello  $\varepsilon = P_t - \hat{P}_t$

$$\forall (j, i) \in \{1, \dots, N\}^2$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_j) = 0$$

$$\mathbb{V}(\varepsilon_j) = \sigma^2 \omega_j^2$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0, i \neq j^*$$

\*Stiamo assumendo assenza di cross-correlazione tra gli errori, ipotesi ragionevole se consideriamo il nostro campione affetto solo da rischio tasso d'interesse

# Metodo Indiretto (cont)

---

Ne consegue che la matrice di varianza-covarianza dei residui sia  $\sigma^2\Omega$ , con  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N^2 \end{pmatrix}$$

La specificazione degli  $\omega_j^2$  è cruciale nella procedura  $\Rightarrow$  sottopesare o sovrapesare alcuni bonds rispetto ad altri.

- **Omoschedasticità**  $\Rightarrow \omega_j^2 = 1, \forall j \in \{1, \dots, N\}$   
la risoluzione del programma di minimizzazione  $\rightarrow$  OLS  
tipicamente la porzione di curva [1giorno-6mesi] è stimata approssimativamente
- **Eteroschedasticità**: assumiamo che la funzione  $\omega(t, \cdot) : s \rightarrow (0, \infty)$  sia monotona crescente. È ragionevole aspettarsi che per scadenze più lunghe il modello generi residui con varianza maggiore\* Alcuni esempi possibili:

$$\omega_j^2 = T_j^2 \quad \omega_j^2 = \left( \frac{dP_t^j}{dr_j(t)} \right)^2 = \frac{D_j^2(t) P_t^j}{(1 + r_j(t))^2}$$

Per la risoluzione del programma di minimizzazione  $\rightarrow$  GLS vincolato

\*maggiori sono i cash flows del bond, maggiori i fattori di sconto teorici necessari a valutarlo

# Metodo Indiretto: specificazione funzione $B(t, s)$

- **Splines Polinomiali di ordine  $p$ .** Quello che prima avevamo visto come metodo di interpolazione tra punti successivi ora lo sfruttiamo come forma funzionale nella procedura di stima (il concetto e l'utilizzo delle spline é lo stesso) Per chiarezza riprendiamo passo passo ...

$$B(t, s) = \begin{cases} B_0(t, s) = \sum_{j=0}^p \alpha_0^j (s - t)^j & s \in [0, 3] \\ B_3(t, s) = \sum_{j=0}^p \alpha_3^j (s - t)^j & s \in [3, 10] \\ B_{10}(t, s) = \sum_{j=0}^p \alpha_{10}^j (s - t)^j & s \in [10, 20] \end{cases} \quad *$$

Avremo quindi un totale di  $3 \times (p + 1)$  parametri da stimare ; tuttavia affinché il modello sia ben posto dobbiamo imporre le seguenti restrizioni (perché ?)

$$B_0(t, t) = 1$$

$$B_0(t, 3) = B_3(t, 3) \quad B_3(t, 10) = B_{10}(t, 10)$$

$$\left. \frac{\partial^i B_0(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=3} = \left. \frac{\partial^i B_3(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=3}$$

$$\left. \frac{\partial^i B_3(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=10} = \left. \frac{\partial^i B_{10}(t, s)}{\partial s^i} \right|_{s=10} \quad i = 1, 2 \dots n - 1$$

Esplicitando questi vincoli riduciamo il numero di parametri indipendenti (Es.  $p = 3$ ,  $i = \{1, 2\}$ , 12 parametri totali, 5 indipendenti).

\*La suddivisione delle tre spline nasce dall'idea di stimare separatamente la curva a breve a media e a lunga scadenza

# Metodo Indiretto: procedura di stima

---

Procedura di stima. Esplicitiamo i vincoli ed otteniamo delle restrizioni sui parametri che, sostituite nell'espressione di  $B(t, s; \mathbf{b})$  ci riconducono ad un problema non vincolato.

Se  $\hat{\mathbf{b}}$  é il vettore dei parametri indipendenti, allora possiamo sempre scrivere

$$B(t, t_j; \hat{\mathbf{b}}) = x_j \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

dove  $x_j$  é un vettore di osservazioni con generico elemento  $\gamma(s - t)^k$ , con  $\gamma$  costante e  $k$  intero minore di  $p$ . Indichiamo con  $X$  la matrice delle osservazioni per tutti gli z.c.b. di cui ci interessa il valore teorico \*; allora

$$B_t(\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{X} \hat{\mathbf{b}}$$

e

$$P_t(\hat{\mathbf{b}}) = \overset{N \times N}{\mathbf{F}} \cdot \overset{N \times \dim(\hat{\mathbf{b}})}{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$$

sarà il prezzo teorico dei nostri coupon bonds, per cui il modello (vedi sopra) é lineare nei parametri da stimare ed il metodo dei minimi quadrati generalizzati fornisce lo stimatore:

$$\hat{\mathbf{b}}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{F}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{F}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{P}_t$$

*Osservazione.* In alternativa potremmo evitare di sostituire i vincoli e stimare i parametri originari  $\mathbf{b}$  con i minimi quadrati generalizzati vincolati.

\*cioé, lo ricordiamo, quelli con scadenza in  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$

## Tassi forward: Intuizione e definizione

---

- I tassi spot si applicano per esempio, ad un prestito zero-coupon che inizia oggi e che si estingue in una specifica data futura
- **i tassi forward** si applicano, nella fattispecie, ad un prestito zero-coupon che inizierà in un determinato istante futuro e che si estinguerà in una data futura successiva
- **I tassi forward sono legati ai tassi spot dalla legge del prezzo unico**



## Tassi forward: esempio

---

- Abbiamo 2 modi di investire oggi €100 per 3 periodi
  - **A:** investire direttamente per l'intero arco temporale (3 periodi) usando l'appropriato tasso spot tri-periodale
  - **B:** investire per i primi due periodi usando il relativo tasso spot bi-periodale e bloccare l'attuale investimento per il terzo periodo al tasso forward vigente oggi

**Per la legge del prezzo unico il rendimento di entrambi gli investimenti deve essere uguale**

## Tassi forward: esempio (cont)

---

- $m = 2 \Rightarrow$  periodi = semestri, struttura tassi spot bootstrappata prima
$$r(0.5) = 1.03\% \quad r(1) = 1.23\% \quad r(1.5) = 1.50\% \quad r(2) = 1.81\%$$
- **Payoff A:**  
in  $t = 1.5$  abbiamo  $\text{€}100(1 + r(1.5)/2)^{1.5 \cdot 2} = \text{€}102.2669$
- **Payoff B:**  
in  $t = 1$  abbiamo  $\text{€}100(1 + r(1)/2)^2 = \text{€}101.2338$   
  
in  $t = 1.5$  abbiamo  $\text{€}101.2338(1 + f(0, 1, 1.5)/2)$
- **Per escludere arbitraggi**
$$\text{€}102.2669 = 101.2338(1 + f(0, 1, 1.5)/2) \Rightarrow f(0, 1, 1.5) = 2.04\%$$
  - Se  $f(0, 1, 1.5) > 2.04\%$  l'investimento **B** sarebbe migliore
  - Se  $f(0, 1, 1.5) < 2.04\%$  l'investimento **A** sarebbe miglioreCome costruireste un arbitraggio?

## Tassi forward impliciti

---

- $t = 0$  l'istante di valutazione corrente, e sia data la struttura temporale espressa in frazioni d'anno  $\{T_n > \dots > T_i > \dots > t\}_{i=\{1,\dots,n\}}$
- siano dati i tassi spot annuali con capitalizzazione  $m$  volte l'anno  $r(t, T_i)$
- i corrispondenti tassi forward impliciti  $f(t, T_i, T_{i+1})$  (uniperiodali espressi su base annuale) sono:

$$f(t, t, T_1) = r(t, T_1)$$

$$f(t, T_1, T_2) = m \left[ \frac{(1 + r(t, T_2)/m)^{(T_2-t)m}}{(1 + r(t, T_1)/m)^{(T_1-t)m}} - 1 \right]$$

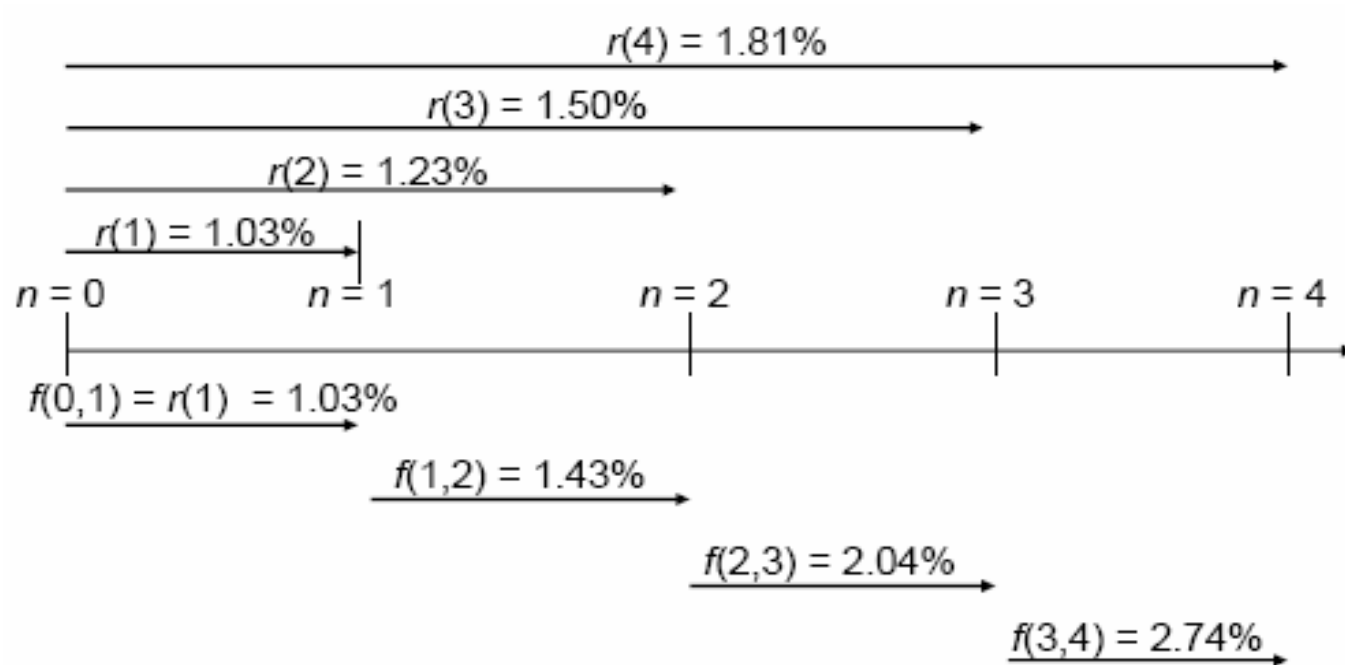
...

$$f(t, T_{n-1}, T_n) = m \left[ \frac{(1 + r(t, T_n)/m)^{(T_n-t)m}}{(1 + r(t, T_{n-1})/m)^{(T_{n-1}-t)m}} - 1 \right]$$

## Tassi forward impliciti (cont)

---

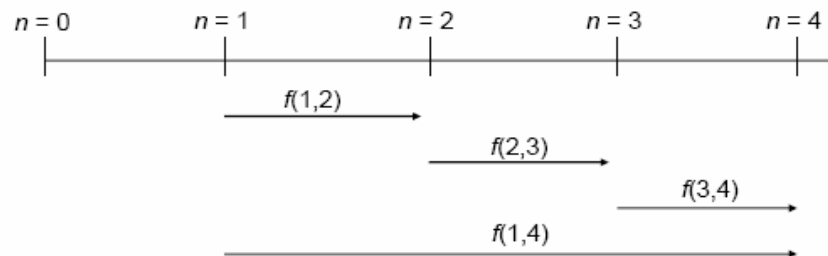
Ad esempio i tassi forward uniperiodali impliciti nella struttura dei tassi spot bootstrappata è



# Tassi forward m-periodali

---

Ad esempio



$$(1 + f(1, 4)/m)^3 = (1 + f(1, 2)/m)(1 + f(2, 3)/m)(1 + f(3, 4)/m)$$

In generale

$$f(t, T_i, T_j) = m \left\{ \left[ \prod_{s=1}^{j-1} \left( 1 + \frac{f(t, T_s, T_{s+1})}{m} \right)^{(T_{s+1}-T_s)m} \right]^{\frac{1}{m(T_j-T_i)}} - 1 \right\}$$

oppure

$$f(t, T_i, T_j) = m \left[ \left( \frac{(1 + r(t, T_j)/m)^{(T_j-t)m}}{(1 + r(t, T_i)/m)^{(T_i-t)m}} \right)^{\frac{1}{m(T_j-T_i)}} - 1 \right]$$

# Grandezze forward:riepilogo

---

Dati istanti temporali  $(t, T, s)$ , con  $t \leq T \leq s$

- Sia  $B(t, T, s)$  il prezzo a termine di uno zero-coupon, osservato in  $t$ , con consegna nell'istante  $T$  e vita residua  $s - T$ .

E' il prezzo pattuito in  $t$  per l'acquisto (o la vendita) di  $B(T, s)$  in  $T$ . E' anche il valore in  $T$ , osservato al tempo  $t$ , di una unità monetaria disponibile in  $s$

Per  $t \leq T_1 < T_2 \leq s$

$$B(t, T_1, s) \leq B(t, T_2, s) \quad B(t, s, s) = 1 \quad B(t, t, s) = B(t, s)$$

Per garantire l'assenza di arbitraggio deve valere (**legge dei prezzi impliciti**)

$$B(t, s) = B(t, T)B(t, T, s)$$

- Sia  $f(t, T, s)$  il *tasso forward zero-coupon* annuale per la scadenza  $T$  e durata  $s - T$  in regime di capitalizzazione composta ( $m = 1$ )

$$f(t, T, s) = B(t, T, s)^{-\frac{1}{s-T}} - 1$$

## Relazioni tra le strutture a termine

---

- I rendimenti (yield to maturity) sono dei tassi medi, mentre i tassi forward sono dei tassi marginali
- Se la curva dei tassi forward è crescente
  - La curva dei tassi spot è ugualmente crescente ma meno meno *ripida*
  - La curva dei coupon yield è sempre crescente ma ancora meno ripida
- Se la curva dei tassi forward è decrescente
  - La curva dei tassi spot è ugualmente decrescente ma meno meno *ripida*
  - La curva dei coupon yield è sempre decrescente ma ancora meno ripida

# Tassi istantanei

---

- Sia  $f(t, T)$  il *tasso forward istantaneo* osservato al tempo  $t$  per la scadenza  $T$ . E' il tasso di rendimento in capitalizzazione continua di uno z.c.b. comprato forward e con vita residua infinitesima (cioé scadenza  $T + dT$ ).

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \lim_{s \rightarrow T} f(t, T, s) \\ &= \lim_{(s-T) \rightarrow 0} \frac{\log B(t, T) - \log B(t, T + (s-T))}{s-T} \\ &= - \frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

Integrando ambo i membri di rispetto alla scadenza  $T$ :

$$- \int_t^T f(t, u) du = \log B(t, T)$$

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du} = e^{-y(t, T)(T-t)}$$

dove  $y(t, T)$  rappresenta l'equivalente di  $r(t, T)$  in capitalizzazione continua

$$y(t, T) = \frac{\int_t^T f(t, u) du}{T - t}$$

**Osservazione.** In testi di lingua italiana spesso  $f(t, T)$  viene definita *intensità istantanea di interesse*.



## Tassi istantanei (cont)

---

- Sia  $r(t)$  il *tasso spot istantaneo* ( *short rate*) osservato al tempo  $t$ .  
E' il tasso di rendimento in capitalizzazione continua di uno z.c.b. con vita residua infinitesima (cioé scadenza  $t + dt$ )

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} y(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T)$$

cioé

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T \rightarrow t} - \frac{\partial \log B(t, T)}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow t} - \frac{B_T(t, T)}{B(t, T)} \\ &= \lim_{T \rightarrow t} - \frac{B(t, T+dt) - B(t, T)}{dT B(t, T)} = \frac{1 - B(t, t+dt)}{dt} \end{aligned}$$

Quindi investendo una unità in 0 e reiterando fino all'istante  $t$  l'acquisto di z.c.b. con vita residua infinitesima, accumuleremo un saldo  $B(t)$  che soddisfa:

$$dB(t) = B(t)r(t)dt \quad ; \quad B(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$$

- Quindi  $B(t)$  rappresenta il valore al tempo  $t$  di un titolo (istantaneamente non rischioso) che si capitalizza istantaneamente al tasso  $r(t)$ .

## Metodo indiretto: specificazione funzione $f(t, T)$ (estensione)

---

Molte banche centrali europee nella determinazione della curva dei tassi spot usano invece che una parametrizzazione diretta dei fattori di sconto  $B(t, T)$  una specificazione esplicita del tasso forward istantaneo  $f(t, T)$  secondo la nota formulazione di **Nelson-Siegel** (1987)

$$f(t, T; \beta, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \exp \left\{ -\frac{T-t}{\tau} \right\} + \beta_2 \frac{T-t}{\tau} \exp \left\{ -\frac{T-t}{\tau} \right\}$$

da cio direttamente ricaviamo il tasso in capitalizzazione continua

$$\begin{aligned} y(t, T; \beta, \tau) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, u; \beta, \tau) du \\ &= \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{T-t} (1 - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \}) + \beta_2 \left[ \frac{\tau}{T-t} (1 - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \}) - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \} \right] \end{aligned}$$

Per poter una maggiore flessibilit  nel calibrare anche la porzione di curva a breve termine (U- e hump-shaped inverted) gli stessi autori hanno introdotto la **famiglia Nelson-Siegel estesa**

$$\begin{aligned} y(t, T) &= \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{T-t} (1 - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \}) + \\ &\quad \beta_2 \left[ \frac{\tau}{T-t} (1 - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \}) - \exp \{ -\frac{T-t}{\tau} \} \right] + \\ &\quad \beta_3 \left[ \frac{\bar{\tau}}{T-t} (1 - \exp \{ -\frac{T-t}{\bar{\tau}} \}) - \exp \{ -\frac{T-t}{\bar{\tau}} \} \right] \end{aligned}$$

## Modelli di tasso

---

Invece di specificare delle forme funzionali per  $B(t, T)$ ,  $r(t, T)$  o per  $f(t, T)$ , che di fatto cercano solo di mimare le forme osservate **senza una precisa guida economica**, possono essere usati dei modelli di non arbitraggio.

Ovvero i prezzi o i tassi possono essere generati con dei **modelli stocastici della struttura per scadenza dei tassi di interesse**

Il diretto vantaggio di usare un modello di tasso è che al tempo stesso ci fornisce una metodologia 'agevole' per valutare contratti derivati *interest rate sensitive* piu' o meno complessi che quindi possono essere usati direttamente nella procedura di stima della curva dei rendimenti

Li esamineremo piu' avanti!