

Mercato a reddito fisso e Risk Management

Valutazione dei Bonds

Agenda ed elementi chiave

- **Legge del prezzo unico (Principio di non arbitraggio)**
 - Definizione
 - Ipotesi
- **Il fattore tempo : leggi di capitalizzazione**
- **Valutazione bonds**
 - Formula generale
 - Casi Specifici
 - * Bond zero-coupon
 - * Bond irredimibili
 - * Annualità
 - * Coupon bond
- **Rendimento a scadenza (YTM)**
 - Definizione
 - YTM vs profitto
 - YTM vs coupon

Definizione

- Si assume che gli individui preferiscano piu' che meno ricchezza
- Le attivita' finanziarie vengono valutate secondo il principio di non arbitraggio
- Arbitraggio = profitto non rischioso (non si possono fare soldi gratis)
- Se due titoli identici fossero negoziati a prezzi diversi
 - Tutti comprerebbero il piu' economico e venderebbero il piu' caro
 - Assisteremmo ad una convergenza dei prezzi

- Legge del prezzo unico (NO-A)

Perfetti sostituti devono avere lo stesso prezzo

- In Finanza sono perfetti sostituti titoli che generano gli stessi flussi di cassa
- Arbitraggio Puro \neq Arbitraggio Statistico

Si cerca di sfruttare i disallineamenti di prezzo, ovvero di ricavare profitti dal pricing di inefficienze identificate attraverso l'uso di modelli matematici (attivita' rischiosa → vedi Hedge funds)

Esempio

- **BTP a due anni, $t = 23/10/03$**

- emissione: 30/9/03
- scadenza: 30/9/05
- Cedole: 1.625% nominale annuo
- data prima cedola: 31/3/04
- flussi di cassa per €100 di valore nominale

Data	Pagamenti
31/3/04	€0.8125
30/9/04	€0.8125
31/3/05	€0.8125
30/9/05	€100.8125

- corso secco: 99.8125
- dietimi: (28/183 giorni) 0.1243
- **corso tel quel: 99.9368**

Esempio (cont)

- **Portafoglio di STRIPS**, ognuna con valore nominale €100

Scadenza	Quantità	FC a scadenza
31/3/04	0.008125	€0.8125
30/9/04	0.008125	€0.8125
31/3/05	0.008125	€0.8125
30/9/05	1.008125	€100.8125

- **Abbiamo replicato esattamente gli stessi flussi di cassa \Rightarrow per il principio di non arbitraggio, trattandosi di perfetti sostituti, devono avere lo stesso prezzo**

Esempio (cont)

- **Portafoglio di STRIPS ($t = 23/10/2003$)**

Scadenza	Quantit�	Prezzo per �100	Prezzo
31/3/04	0.008125	�99.54	�0.8088
30/9/04	0.008125	�98.86	�0.8032
31/3/05	0.008125	�97.93	�0.7957
30/9/05	1.008125	�96.75	�97.5361

- **Prezzo totale =  99.9438 (vs  99.9368)**

- **Ragioni per la differenza di 0.7 centesimi ($\approx 0.007\%$)**

- Arrotondamenti
- Costi di transazione
- Non perfetti sostituti

Ipotesi

- **Assenza di frizioni nel mercato**

- ◇ Differenziale denaro-lettera nullo (bid-ask spread)
- ◇ Assenza di costi di transazione (commissioni)
- ◇ Assenza di tasse sulle rendite finanziarie (riducono gli eventuali profitti di arbitraggio)
- ◇ I titoli sono infinitamente divisibili , sempre contrattabili in quantità illimitata al prezzo prevalente
 - Il trading elettronico e la pratica del cross-listing aumentano le ore di contrattazione
 - In mercati altamente liquidi (deep) è possibile eseguire transazioni per grossi importi senza influenzare il prezzo
 - L'impatto sul prezzo è di fatto un costo di transazione

Ipotesi (cont)

- ◇ Sono ammesse vendite allo scoperto (short sell) con pieno uso dei profitti
 - Le vendite allo scoperto sono ammesse in quasi tutti i mercati finanziari
 - Un uso limitato dei profitti equivarrebbe ad un costo di transazione
- ◇ Possibilità di dare e prendere a prestito al tasso di interesse risk-free
 - Tipicamente il tasso debitore è maggiore del tasso creditore

● Mercati competitivi

- ◇ Gli agenti massimizzano il profitto, preferiscono piu' a meno (principio di non sazietà)
- ◇ Gli agenti sono price-takers (non influenzano il prezzo)

Si tratta di un ipotesi conveniente, che ci permette di focalizzarci direttamente sulla valutazione economica degli strumenti finanziari.

La presenza di fizioni possono essere modellate e la legge del prezzo unico risulta ancora valida

Il valore del denaro : fattore tempo

- Il fattore tempo ha un valore monetario
 - Denaro ricevuto in istanti diversi di tempo ha valore diverso
 - Principio del costo-opportunità
- Valore futuro di una somma di denaro disponibile oggi (capitalizzazione)
- Valore attuale di una somma di denaro garantita in un istante futuro (sconto)

Es: Avete vinto ad una lotteria che vi offre due possibilità: 100€ oggi o 120€ tra un anno. Cosa scegliete?

Valore futuro e valore attuale: Notazione e formule

- **Capitalizzazione lineare semplice**

V_0 = Valore al tempo 0 (i.e. oggi)

V_T = Valore in T

T = numero di anni

y = Tasso di interesse nominale annuale

$$V_T = V_0(1 + yT)$$

$$V_0 = V_T(1 + yT)^{-1}$$

- **Capitalizzazione composta annuale**

$$V_T = V_0(1 + y)^T$$

$$V_0 = V_T(1 + y)^{-T}$$

- **Capitalizzazione composta arbitraria (discreta)**

m = periodi di capitalizzazione in un anno

N = numero totale di periodi = Tm

$i = y/m$ tasso di interesse periodico effettivo

$$V_N = V_0(1 + y/m)^{Tm} = V_0(1 + i)^N$$

$$V_T = V_N(1 + i)^{-N}$$

- **Capitalizzazione continua (legge esponenziale)**

La frequenza di capitalizzazione va ad infinito $\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + y/m)^{Tm} = e^{Ty}$

Tasso percentuale annuale nominale ed effettivo

- La maggior parte dei tassi a reddito fisso sono quotati come tassi percentuali annuali (APR)
 - Es. Se una banca paga semestralmente il 3% di interessi, si intende che i clienti ricevano l' 1.5% dei loro depositi ogni 6 mesi

- L'APR non è un tasso di rendimento in quanto ignora il processo di capitalizzazione

- Con m periodi di capitalizzazione annuali, il tasso di rendimento annuale effettivo (AER) è

$$AER = (1 + i)^m - 1$$

- Es. Il deposito bancario rende effettivamente $(1 + 0.03/2)^2 - 1 = 3.0225\%$
- Parlare di APR senza la frequenza di capitalizzazione non ha alcun valore informativo
- Se da un lato la capitalizzazione continua è un comune punto di riferimento, spesso (vedi titoli di stato) si usa una frequenza semestrale per l'APR, che in questo caso viene anche chiamato rendimento bond equivalente

Bonds: pricing formula

- Il prezzo di un bond con pagamenti fissi è semplicemente **la somma di tutti i futuri flussi di cassa scontati alla data di valutazione**. La somma dei valori attuali di tutti i pagamenti previsti fino alla scadenza
- Dato un generico bond che in T anni genera $N = Tm$ flussi di cassa e sia il tasso di sconto periodale d , il suo prezzo sarà semplicemente

$$P_0 = \sum_{j=1}^N \frac{FC_j}{(1+d)^j}$$

- È prassi dichiarare i tassi di sconto in termini di APR, di conseguenza nella nostra formula

$$d = y/m = i$$

Zero-coupon bond

- Uno zero-coupon bond paga in un'unica soluzione alla scadenza ($T = N/m$) il suo valore facciale di rimborso $\text{€}F$, il suo prezzo sarà

$$P = \frac{F}{(1 + y/m)^{Tm}}$$

- Notiamo che $P > 0$ e $P < F$

- Per $y \rightarrow 0$, $P \rightarrow F$

- Per $y \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$

- Dato il prezzo di uno zero-coupon bond il suo rendimento (yield) è

$$y = m \left[\left(\frac{F}{P} \right)^{1/Tm} - 1 \right]$$

- Notiamo che all'aumentare della frequenza di capitalizzazione ($\uparrow m$) il rendimento corrispondente diminuisce. La capitalizzazione continua rappresenta il limite inferiore ($y = \frac{1}{T} \ln(F/P)$)

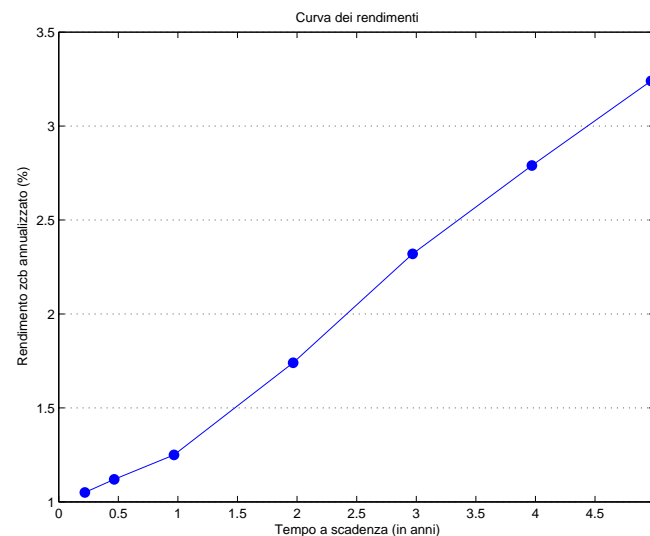
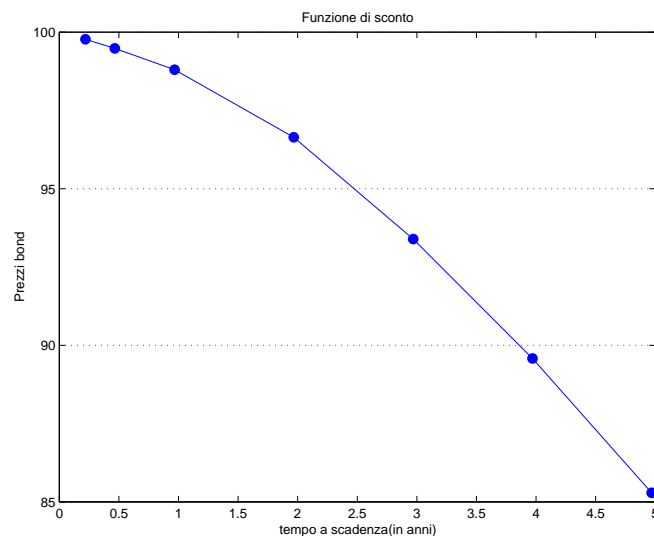
Zero-coupon bond: esempio

Mercato americano, STRIPS (27-OTT-05), $F = 100\$$

Scadenza	Price	Tasso annualizzato
15/01/06	\$99.7	1.05%
15/04/06	\$99.48	1.12%
15/10/06	\$98.80	1.25%
15/10/07	\$96.64	1.74%
15/10/08	\$93.39	2.32%
15/10/09	\$89.58	2.79%
15/10/10	\$85.29	3.24%

I prezzi dei bond in funzione del tempo a scadenza \Rightarrow funzione di sconto

I tassi annualizzati in funzione del tempo a scadenza \Rightarrow curva dei rendimenti



Bond irredimibili

- Si tratta di **rendite perpetue** che pagano $\text{€ } c/m$ con una frequenza di m volte all'anno per sempre $N = \infty$ (es. British consol)

- Il prezzo è dato da

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c/m}{(1 + y/m)^j} = \frac{c}{y}$$

- Noto il prezzo il suo rendimento sarà

$$y = \frac{c}{P}$$

- Uso

- Approssimazione di coupon bond con scadenze molto lunghe
- Valutazione dei fondi pensione
- Valutazione delle annualità

Annualità

- Un annualità assicura un flusso di pagamenti costanti per un determinato numero di periodi N (o $T = N/m$ anni). Generalmente ha una scadenza molto lunga e per la sua valutazione si osserva che **un annualità è equivalente ad un portafoglio di due bond irredimibili**.

Periodo	Ann.	Bond irr.	Bond irr. differito
1	c/m	c/m	0
2	c/m	c/m	0
3	c/m	c/m	0
...
n	c/m	c/m	0
$n+1$	0	c/m	c/m
$n+2$	0	c/m	c/m
...

- **Un annualità = Bond irredimibile - Bond irredimibile differito**
Acquisto oggi un B. Irr. e lo vendo dopo N periodi

Annualità (cont)

- Per il principio di non arbitraggio, poiché l'annualità e il portafoglio dei due bond irr. generano gli stessi flussi di cassa dovranno avere lo stesso prezzo

$$P = \underbrace{\frac{c}{y}}_{\text{Bond irr.}} - \underbrace{\frac{1}{(1 + y/m)^N}}_{\text{f. sconto}} + \underbrace{\frac{c}{y}}_{\text{Bond irr.}} = \underbrace{\frac{c}{y} \left[1 - \frac{1}{(1 + y/m)^N} \right]}_{\text{Annualità}}$$

- **Usi principali:**
 - calcolo dei piani pensionistici
 - Ipoteche
 - Finanziamenti al consumo (automobili,..)

Coupon bond

- Un coupon bond paga sia una cedola di € c/m per N periodi che una somma finale di € F all' N -esimo periodo (scadenza del bond)
- Detenere un coupon bond equivale ad avere un portafoglio di zcb

Periodo	Pagamenti	Valore Attuale
1	c/m	$(c/m)/(1 + y/m)^1$
2	c/m	$(c/m)/(1 + y/m)^2$
3	c/m	$(c/m)/(1 + y/m)^3$
...
$n - 1$	c/m	$(c/m)/(1 + y/m)^{n-1}$
n	$c/m + F$	$(c/m + F)/(1 + y/m)^n$

$$P = \frac{\frac{c}{m}}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^1} + \frac{\frac{c}{m}}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^2} + \dots + \frac{\frac{c}{m}}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{n-1}} + \frac{\frac{c}{m} + F}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^n}$$

Coupon bond (cont)

- Un coupon bond è equivalente anche ad un'annualità piu' uno zcb

Periodo	coupon bond	annualit'a	zcb
1	c/m	c/m	0
2	c/m	c/m	0
3	c/m	c/m	0
...
$n - 1$	c/m	c/m	0
n	$c/m + F$	c/m	F

$$P = \frac{c}{y} \left[1 - \frac{1}{(1 + y/m)^N} \right] + \frac{F}{(1 + y/m)^N}$$

Notiamo che $P > 0$ e che $P < F + N \frac{c}{m}$

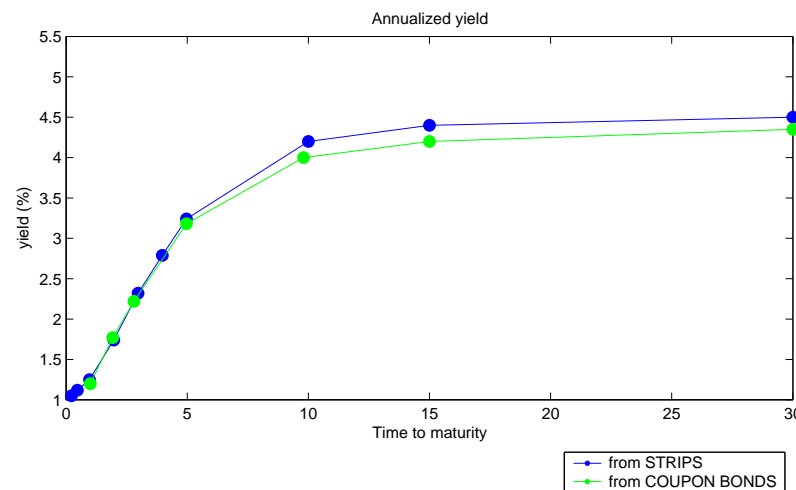
Per $y \rightarrow 0$, $P \rightarrow F + N \frac{c}{m}$

per $y \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$

Coupon bond (cont)

- Mercato americano : on-the-run T-bonds (28-Ott-05), $F = \$100$

Tipo	Scadenza	Tasso cedolare	Prezzo	Rendimento
2-yr	30/09/07	$1\frac{5}{8}\%$	\$ 99.72	1.77%
3-yr	15/08/08	$2\frac{3}{8}\%$	\$ 100.39	2.22%
5-yr	15/10/10	$3\frac{1}{8}\%$	\$ 99.75	3.18%
10-yr	15/08/15	$4\frac{1}{4}\%$	\$ 99.92	4.26%



- Le curve dei rendimenti sono diverse! Perché?

Tasso Interno di rendimento (yield to maturity)

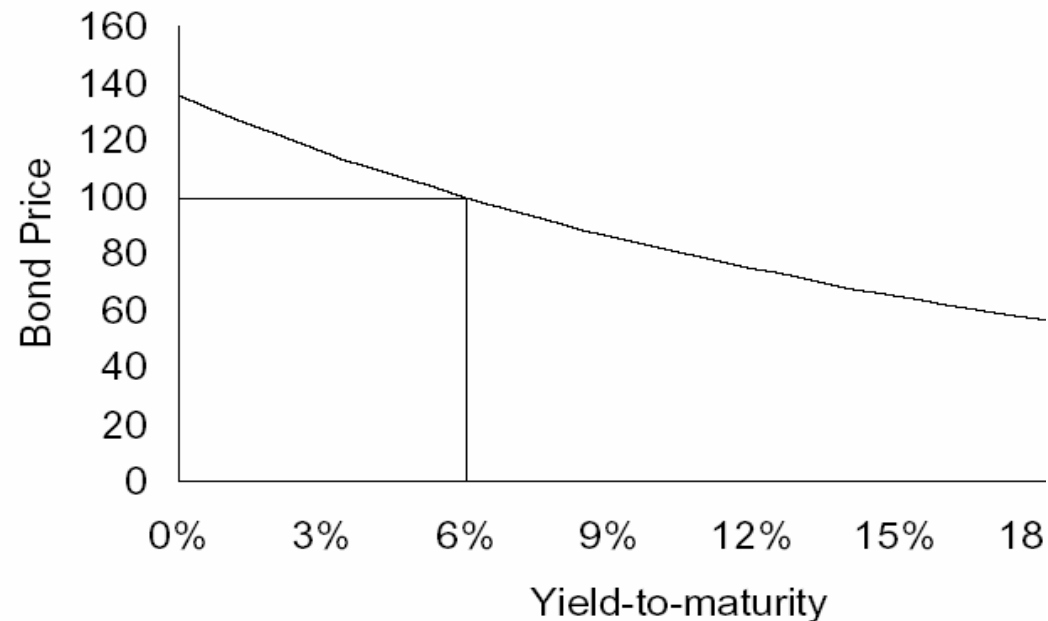
- Definiamo YTM quell'unico tasso di interesse che uguaglia il valore atteso di tutti i futuri flussi di cassa al prezzo di mercato del bond stesso
- STRIPS, zcb
 - Valore temporale di un pagamento ad una singola data futura
 - Denominato rendimento spot (**spot yield**)
- Bond irr. , annualità e coupon bonds
 - Valore temporale di una sequenza di pagamenti a diverse date future
 - È una misura del tasso interno di rendimento (TIR) del bond fino alla scadenza
 - Denominato rendimento a scadenza (**yield to maturity**)

Tasso interno di rendimento vs coupon

- Si tratta di un **problema non lineare** che richiede l'utilizzo di **metodi numerici iterativi** ($N > 5$) Es. Metodo di Newton, metodo delle secanti, combinazioni...
- **Il tasso interno di rendimento è di fatto determinato dal mercato**
 - Notiamo che se $P = F \Rightarrow$ un tasso interno di rendimento = tasso cedolare. Alla pari.
 - Se $P > F \Rightarrow$ il mercato ha usato un tasso di sconto minore del tasso cedolare (**trading at a premium**) Sopra la pari.
 - Se $P < F \Rightarrow$ il tasso interno di rendimento eccede il tasso cedolare (**trading at a discount**) Sotto la pari.
- **Hp. di reinvestimento.** Nella determinazione del TIR si assume implicitamente che tutti i pagamenti generati dal bond vengano reinvestiti allo stesso tasso \Rightarrow una **struttura a termine dei tassi di interesse piatta**, i tassi di interessi non variano nel tempo! (Approssimazione piu' o meno accurata, condizioni di mercato, maturity bond..)
- **Hp. di detenzione del titolo fino a scadenza**

Tasso interno di rendimento vs coupon (cont)

- Es. per un coupon bond al 6% (tasso cedolare annuale nominale), scadenza tra 5 anni



- Fino ad ora prendevamo il tasso di sconto come dato e da questo determinavamo il prezzo del bond. Ora invertiamo la procedura: prendiamo il prezzo come dato (mercato) ed estrapoliamo il rendimento implicito nella quotazione di mercato

Tasso di Inflazione

- Il denaro ha valore per gli individui in quanto permette l'acquisto di beni materiali
- L'inflazione misura i cambiamenti di prezzo in termini di cambiamenti percentuali dell' IPC (Indice dei Prezzi al Consumo)

$$\pi = \frac{IPC_{Nuovo} - IPC_{Vecchio}}{IPC_{Vecchio}}$$

- Il tasso di interesse reale (R) é dato dal tasso di interesse nominale (i) aggiustato per il tasso di inflazione (π)

$$(1 + R) = \frac{1 + i}{1 + \pi} = (1 + i) \frac{IPC_V}{IPC_N}$$

- Per tassi di inflazione bassi é spesso usata come approssimazione

$$R \approx i - \pi$$