ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Materia di Tesi: Matematica per le applicazioni economiche e finanziarie

MODELLI PER LA STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI

Tesi di Laurea di

CHIARA CASTELLETTI

Relatore
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Sessione III

ANNO ACCADEMICO 2003–04

Alla mia famiglia e
a mio nonno Mario

"Tu lo sai bene: non ti riesce qualcosa,
sei stanco, e non ce la fai più.
E d'un tratto incontri nella folla
lo sguardo di qualcuno -uno sguardo umano-
ed è come se ti fossi accostato a un divino nascosto.
E tutto diventa improvvisamente più semplice"
A. Tarkovskij

Indice

Introduzione

Agli inizi degli anni '70, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton hanno dato un fondamentale contributo alla teoria di valutazione delle opzioni, sviluppando il modello teorico per la deteminazione dei prezzi.

Questo modello ha avuto un'enorme influenza sui problemi di *pricing* (valutazione dei contratti) e di *hedging* (elaborazione di una strategia finanziaria per coprirsi dai rischi). Questa teoria è basata sul concetto di *arbitraggio*, cioè sulla possibilità di avere un guadagno positivo senza rischi.

Fin dal momento della sua pubblicazione nel 1973, il modello di Black&Scholes è divenuto molto popolare. In seguito questo è stato esteso in modo da poter essere usato per valutare le opzioni su valute, le opzioni su indici, e le opzioni su futures, fino al tentativo di estenderlo anche al caso dei derivati su tassi d'interesse. I derivati su tassi d'interesse sono strumenti derivati il cui sottostante è il tasso d'interesse. Per esempio, un *bond* è un contratto in cui si paga 1 dollaro al tempo della scadenza. I primi modelli di valutazione delle opzioni su tassi d'interesse assumevano che la distribuzione probabilistica dei tassi, dei prezzi dei bond fosse log-normale. Tali modelli però non offrivano una descrizione del modo in cui i tassi d'interesse e i prezzi dei bond si modificano nel tempo in dipendenza dalla scadenza.

In questa tesi presenteremo alcuni approcci che mirano a superare questi limiti. Vedremo come possono essere costruiti i cosiddetti *modelli della struttura a termine*, i quali descrivono l'evoluzione della curva yield nel tempo. Esamineremo quindi i modelli in cui viene specificato il comportamento del tasso short e del forward.

Nel primo capitolo innanzitutto presentiamo il modello di Black&Scholes per la determinazione del prezzo e la copertura di un derivato.

Nel secondo capitolo studieremo i particolari problemi che compaiono quando applichiamo la teoria di arbitraggio al mercato dei bond. Poiché il mercato dei bond contiene un numero infinito di titoli (un bond per ogni scadenza) il nostro obiettivo è studiare le relazioni tra tutti i differenti bond.
Vedremo quindi che dai prezzi bond possiamo ricavare le dinamiche del tasso forward e viceversa, invece le dinamiche del tasso short possono essere ottenute sia dai prezzi bond che dal tasso forward.
Nel terzo capitolo modelleremo una famiglia di bond priva di arbitraggio partendo dalle dinamiche del tasso short. Lo scopo è cercare la relazione che ci deve essere in un mercato privo di arbitraggio tra i processi di prezzo dei bond con diversa scadenza. Arriviamo, così, a una delle più importanti equazioni nella teoria dei tassi d'interesse, chiamata *equazione della struttura a termine*. La seconda parte del terzo capitolo è incentrata sui modelli martingala per il tasso short, fra i più comuni e utilizzati nella pratica Vasiček, Cox-Ingersoll e Ross (CIR), Ho-Lee e Hull-White, che specificano le Q-dinamiche per r.
Il capitolo si chiude con l'equazione della struttura a termine affine, importante in quanto riconduce ad espressioni analitiche per i prezzi dei bond di risoluzione più facile rispetto a quelle dei modelli martingala citati sopra.
Nel quarto capitolo studieremo i modelli per il tasso forward, in particolare l'approccio Heath-Jarrow-Morton (HJM), in cui si utilizza l'intera curva del tasso forward come variabile esplanatoria di tutta la stuttura a termine. La curva del tasso forward osservata $\{f^*(0,T); T \geq 0\}$ viene usata come condizione iniziale, questo di conseguenza permette una corrispondenza perfetta tra i prezzi bond teorici e quelli osservati, quindi non risulta necessario invertire la curva yield. Inoltre presentiamo un risultato importante che è la *condizione HJM sul drift* per evitare possibilità di arbitraggio, e abbiamo modellizzato il tasso forward direttamente sotto la probabilità martingala Q.
Nel quinto capitolo analizzeremo una particolare classe di modelli HJM basati sul tasso spot Markoviano. In particolare forniremo due condizioni (studiate da Jeffrey [15]) che indicano le restrizioni poste sulla struttura a termine iniziale e la struttura di volatilità.
Nell'ambito della classe di modelli HJM che soddisfano le condizioni di Jeffrey, forniamo poi soluzioni analitiche al problema della valutazione del prezzo del bond. Infine presentiamo un modello di CIR generalizzato in cui possono essere trovate formule esplicite

per i bond in termini di soluzioni di una particolare equazione di Volterra.

Capitolo 1

Modello di Black&Scholes

1.1 Elementi di calcolo stocastico

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definizione 1.1. Un processo stocastico è una famiglia $X = (X_t)_{t\in[0,+\infty[}$ di variabili aleatorie

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad t \geq 0$$

Un processo stocastico può essere utilizzato per descrivere un fenomeno aleatorio che si evolve nel tempo: per esempio si può pensare alla v.a. X_t in $\mathbb{R}$ come al prezzo di un titolo rischioso al tempo t.

Definizione 1.2. Una filtrazione $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una famiglia crescente di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$.
Dato un processo stocastico $X = (X_t)_{t\in[0,+\infty[}$, poniamo

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s \mid 0 \leq s \leq t) = \sigma(\{X_s^{-1}(H) \mid 0 \leq s \leq t, H \in \mathcal{B}\})$$

Chiaramente, se $0 \leq s \leq t$, allora $\mathcal{F}_s^X \subseteq \mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}$, e dunque
$\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,+\infty[}$ è una **filtrazione** detta filtrazione associata a X.

Si può pensare a $\mathcal{F}_t^X$ come alle informazioni su X disponibili fino al tempo t.

Definizione 1.3. Si dice **Moto Browniano** reale di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, un qualsiasi processo stocastico $W = (W_t)_{t\in[0,+\infty[}$ tale che

1. $P(W_0 = 0) = 1$;
2. per ogni $\omega \in \Omega$, la funzione $t \mapsto W_t(\omega)$ è continua;
3. $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n, \quad W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_2} - W_{t_1}$ sono indipendenti (*incrementi indipendenti*);
4. per ogni $t, h \geq 0$, la v.a. $W_{t+h} - W_t$ ha distribuzione normale $N_{0,h}$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_t^W$(*incrementi stazionari*).

Notazione: nel seguito W denoterà un moto Browniano di punto iniziale l'origine.

Esempio 1.1. (moto Browniano come modello di titolo rischioso)
Sia W un moto Browniano di punto iniziale l'origine. Un primo modello a tempo continuo per il prezzo di un titolo rischioso S è il seguente:

$$S_t = S_0(1 + \mu t) + \sigma W_t, \qquad t \geq 0 \tag{1.1}$$

Nella (1.1) S_0 indica il prezzo iniziale del titolo, μ indica il tasso di rendimento atteso e σ indica la rischiosità del titolo o volatilità. Se $\sigma = 0$, la dinamica (1.1) è deterministica e corrisponde ad una legge di capitalizzazione semplice con tasso privo di rischio pari a μ. Se $\sigma > 0$, la dinamica (1.1) è stocastica e $S = (S_t)_{t \geq 0}$ è un processo stocastico normale nel senso che

$$S_t \sim N_{S_0(1+\mu t), \sigma^2 t} \qquad \forall\ t \geq 0 \tag{1.2}$$

Da (1.2) segue che

$$E(S_t) = S_0(1 + \mu t)$$

ossia l'andamento atteso di S corrisponde alla dinamica deterministica priva di rischio. Inoltre σ è direttamente proporzionale alla varianza e quindi alla rischiosità del titolo.

La teoria d'integrazione stocastica è collegata alla teoria delle martingale, e la moderna teoria dei derivati è basata principalmente sulla teoria martingala. Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ dove $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, +\infty[}$ indica una filtrazione.

Definizione 1.4. Si dice che un processo stocastico M è una **martingala** se, per ogni $t \in [0, +\infty[$, si ha:

1. M_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile, e in tal caso si dice che il processo stocastico M è $\underline{\mathcal{F}}$-adattato

2. $M_t \in L^1(\Omega, P)$

3. $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ q.s. per ogni $0 \leq s \leq t$

Le prime due sono proprietà di tipo tecnico, mentre la proprietà essenziale che caratterizza una martingala è la terza. Questa in particolare implica che il valore atteso di una martingala M è costante nel tempo, infatti:

$$E(M_t) = E(E(M_t \mid \mathcal{F}_0)) = E(M_0), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

1.2 Integrale stocastico di processi semplici

Sia dato un moto Browniano W su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Nel seguito indichiamo con $\underline{\mathcal{F}}$ la filtrazione Browniana. In questo paragrafo e nel seguente diamo una traccia della costruzione dell'integrale di Itô

$$\int_0^T u_t dW_t \tag{1.3}$$

Per garantire l'esistenza di tale integrale stocastico, è necessario imporre opportune ipotesi sul processo u.

Definizione 1.5. Il processo stocastico u appartiene alla classe Λ^2 se

- u è $\underline{\mathcal{F}}$-adattato, ossia u_t è $\underline{\mathcal{F}}_t$-misurabile per ogni $t \geq 0$
- per ogni $T > 0$, esiste ed è finito $\int_0^T E(u_t^2)dt$

Definizione 1.6. Un processo $u \in \Lambda^2$ si dice **semplice** se è della forma

$$u = \sum_{k=1}^{N} e_k \chi_{[t_{k-1}, t_k[}$$

dove $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ e e_k sono v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Esempio 1.2. Integrando il processo semplice $u = \chi_{[0,t[}$, si ottiene

$$W_t = \int_0^t dW_s$$

Riprendendo l'Esempio 1.1, si ha

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s, \qquad t > 0.$$

Il seguente teorema contiene alcune importanti proprietà dell'integrale di Itô di processi semplici.

Teorema 1.1. *Per ogni $u, v \in \Lambda^2$ semplici, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b < c$ si ha:*
(1) linearità:

$$\int (\alpha u_t + \beta v_t) dW_t = \alpha \int u_t dW_t + \beta \int v_t dW_t;$$

(2) additività:

$$\int_a^c u_t dW_t = \int_a^b u_t dW_t + \int_b^c u_t dW_t;$$

(3) media nulla:

$$E\left(\int u_t dW_t\right) = 0,$$

ed anche

$$E\left(\int_a^b u_t dW_t \int_b^c v_t dW_t\right) = 0;$$

(4) isometria di Itô:

$$E\left(\left(\int_a^b u_t dW_t\right)^2\right) = E\left(\int_a^b u_t^2 dt\right);$$

(5) il processo stocastico:

$$X_t = \int_0^t u_s dW_s, \qquad t \geq 0,$$

è una martingala rispetto a $\underline{\mathcal{F}}$.

Finora abbiamo definito l'integrale in (1.3) nel caso $u \in \Lambda^2$ processo stocastico semplice. Consideriamo ora un generico $u \in \Lambda^2$ che possiamo schematizzare come segue:

- Approssimiamo u con una successione di processi semplici u_n t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b E[\{u_n(s) - u(s)\}^2] ds = 0.$$

- Per ogni n l'integrale $\int_a^b u_n(s)dW(s)$ è una variabile stocastica ben definita z_n, ed esiste una variabile stocastica z t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = z \qquad (in\ L^2).$$

- Ora definiamo l'integrale stocastico come

$$\int_a^b u(s)dW(s) = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b u_n(s)dW(s).$$

Quindi enunciamo il seguente teorema che estende al caso generale le proprietà dell'integrale stocastico di processi semplici.

Teorema 1.2. *Le proprietà (1-5) del Teorema 1.1 valgono per ogni* $u, v \in \Lambda^2$.

Osservazione 1.3. E' possibile definire l'integrale stocastico per un processo u che soddisfa solo la condizione debole

$$P\left(\int_a^b u^2(s)ds < +\infty\right) = 1$$

Per un qualunque u generico non abbiamo garantito che valgono le proprietà (3) e (4). La proprietà (5) è, tuttavia, ancora valida.

1.3 Processi e formula di Itô

Definizione 1.7. Un processo X della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s, \qquad t > 0, \tag{1.4}$$

con $u, v \in \Lambda^2$, si dice un **processo di Itô**.

Notazione: la (1.3) viene solitamente scritta nella seguente "forma differenziale":

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t \tag{1.5}$$

Riprendendo l'Esempio 1.1, scriviamo

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Dato un processo stocastico Y si definisce il *processo variazione quadratica di* Y nel modo seguente

$$\langle Y \rangle_t = \lim_{|s| \to 0^+} \sum_{k=1}^{N} (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2, \qquad \text{in } L^2(\Omega, P)$$

ammesso che tale limite esista e dove s indica una scomposizione di $[0, t]$.

Lemma 1.4. *Sia X un processo di Itô della forma* (1.4)*. Allora*

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t v_s^2 ds$$

o, in termini differenziali,

$$d\langle Y \rangle_t = v_t^2 dt.$$

Possiamo ora enunciare (nel caso unidimensionale) il principale risultato della teoria del calcolo stocastico.

Teorema 1.5 (Formula di Itô)**.**
Siano X nella (1.4) *un processo di Itô e $f = f(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Allora il processo stocastico Y, definito da $Y_t = f(t, X_t)$, è un processo di Itô e vale*

$$dY_t = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t, X_t)d\langle X \rangle_t \tag{1.6}$$

Osservazione 1.6. Nella (1.5), $\partial_t f$ e $\partial_x f$ indicano le derivate parziali di f rispetto alle variabili reali t e x. La formula di Itô è valida assumendo l'esistenza delle sole derivate parziali $\partial_t f$ e $\partial_{xx} f$ continue. Le ipotesi di regolarità su f si possono ulteriormente indebolire.

1.4 Modelli a tempo continuo per i derivati

In questo paragrafo presentiamo il modello di Black&Scholes per la determinazione del prezzo e la copertura di un derivato. Nel seguito $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indica uno spazio di probabilità su cui è definito un moto Browniano W di punto iniziale l'origine e con filtrazione Browniana $\underline{\mathcal{F}}$.

1.4.1 Portafoglio autofinanziante e di arbitraggio

Consideriamo un mercato in cui ci siano N titoli (azioni, bonds) $S^1, ..., S^N$ e assumiamo che siano processi di Itô. Si definisce **strategia** un processo $h = (h^1, ..., h^N)$, con h^k processo di Itô; inoltre il processo

$$V = \sum_{k=1}^{N} h^k S^k,$$

è detto **portafoglio**. Dunque V_t indica il valore del portafoglio e h_t^k il numero dei titoli k-esimi in portafoglio al tempo t (è ammesso che h_t^k sia negativo). Notiamo che, per ipotesi, h è un processo adattato a $\underline{\mathcal{F}}$, ossia la strategia di investimento viene decisa in base alle informazioni disponibili al momento.

Definizione 1.8. Un portafoglio V si dice **autofinanziante** se vale

$$dV_t = \sum_{k=1}^{N} h_t^k dV_t^k \tag{1.7}$$

Si dice che un portafoglio autofinanziante V è un portafoglio **di arbitraggio** se

$$\textit{i)} \quad V_0 = 0,$$

ed esiste t tale che

$$\textit{ii)} \quad P(V_t \geq 0) = 1,$$

$$\textit{iii)} \quad P(V_t > 0) > 0.$$

Definizione 1.9. Un mercato si dice **completo** se $\forall$ opzione $H \in L^2(\Omega, \underline{\mathcal{F}})$ esiste un portafoglio autofinanziante replicante, ovvero t.c. $V_T = H$.

1.4.2 Modello di Black&Scholes

Consideriamo un mercato in cui ci siano tre titoli:
-un titolo non rischioso (bond) con dinamica $B_t = B_0 e^{rt}$ dove r è il tasso d'interesse privo di rischio;
-un titolo rischioso (stock) S modellizzato da un moto Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{1.8}$$

con tasso di rendimento atteso μ e volatilità σ;
-un derivato H con scadenza T e payoff $\varphi(S_T)$.

Ipotesi 1.1. Assumiamo che esista una funzione $f = f(t,s) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $H_t = f(t, S_t)$ per $t \in [0,T]$.

Il nostro scopo è la *valutazione del prezzo e alla copertura del derivato*, più precisamente siamo interessati a costruira un modello che ci permetta di determinare la funzione f e un portafoglio autofinanziante

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t,$$

che replichi il derivato, ossia tale che

$$P(V_T = H_T) = 1 \tag{1.9}$$

Ipotesi 1.2. Principio di Non Arbitraggio (PNA)
Nel mercato (B,S,H) non esistono portafogli di arbitraggio.

Lemma 1.7. *Assumendo il PNA, se U e W sono portafogli autofinanzianti tali che $P(U_T = W_T) = 1$ per un certo $T > 0$, allora si ha anche $P(U_t = W_t) = 1$ per ogni $t \in [0,T]$.*

Come immediata conseguenza, per ogni portafoglio replicante V deve valere la seguente condizione

$$V_t = H_t \qquad q.s. \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{1.10}$$

Il portafoglio V è autofinanziante se vale

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \tag{1.11}$$

Ora, sostituendo l'espressione (1.7) di S nella (1.10), si ha

$$dV_t = (\alpha_t \mu S_t + \beta_t r B_t)dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t$$

D'altra parte, per la formula di Itô e abbreviando $f = f(T-t, S_t)$, si ha

$$\begin{aligned} dH_t &= \partial_t f dt + \partial_s f dS_t + \frac{1}{2}\partial_{ss} f d\langle S\rangle_t \\ &= \left(\partial_t f + \mu S_t \partial_s f + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\partial_{ss} f\right) dt + \sigma S_t \partial_s f dW_t \end{aligned}$$

Per ottenere un portafoglio replicante è sufficiente imporre che V abbia la stessa dinamica di H: in particolare è sufficiente imporre l'uguaglianza dei termini in dt e dW_t di V e H. Uguagliando i termini in dW_t, ricaviamo

$$\alpha_t = \partial_s f(t, S_t) \tag{1.12}$$

Uguagliando i termini in dt e utilizzando la (1.12), otteniamo

$$\partial_t f + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\partial_{ss} f - r\beta_t B_t = 0 \tag{1.13}$$

Ora utilizziamo il PNA e osserviamo che, per la (1.10), si ha

$$\beta_t = \frac{V_t - \alpha_t S_t}{B_t} = \frac{f(t, S_t) - S_t \partial_s f(t, S_t)}{B_t}, \qquad q.s. \tag{1.14}$$

e quindi, sostituendo la (1.14) nella (1.13), otteniamo

$$\partial_t f(t, S_t) + rS_t \partial_s f(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\partial_{ss} f(t, S_t) - rf(t, S_t) = 0, \qquad q.s. \tag{1.15}$$

L'equazione (1.15) è risolta da f per ogni possibile valore di t e S_t. Dunque f è soluzione della seguente equazione differenziale

$$\partial_t f(t, s) + rs\partial_s f(t, s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\partial_{ss} f(t, s) - rf(t, s) = 0, \tag{1.16}$$

per $(t, s) \in]0, T[\times]0, +\infty[$, con condizione finale

$$f(T, s) = \varphi(s), \qquad s \in]0, +\infty[\tag{1.17}$$

La (1.16) è detta **equazione di Black&Scholes**. Il problema (1.16)-(1.17) ammette un'unica soluzione f che può essere determinata nella maggior parte dei casi con metodi numerici. Le formule (1.12)-(1.14) forniscono una strategia replicante (α, β) in termini di f. Di conseguenza è possibile calcolare il valore V_0 del portafoglio replicante e, dalla (1.10), ricavare infine il prezzo del derivato H_0.

1.5 Valutazione neutrale al rischio

Nell'ipotesi che il mercato sia privo di arbitraggi, nel modello di Black&Scholes il prezzo di un derivato H è ottenuto determinando la funzione f che esprime in ogni istante H_t in termini di t e S_t. Si noti che il problema (1.16)-(1.17), e quindi f, non dipende dal rendimento atteso μ del sottostante.
Questo fatto si può in parte spiegare osservando che f non è il prezzo del derivato in termini assoluti, bensì la funzione che esprime tale prezzo in termini di t e S_t. Chiamiamo P probabilità oggettiva (o del mondo reale) e assumiamo la seguente dinamica per S nella probablità P

$$dS_t = \mu(t, S_t)S_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dW_t \tag{1.18}$$

Supponiamo ora che esista una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ e un moto Browniano $\overline{W}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, e consideriamo un altro titolo $\overline{S}$ che soddisfi l'equazione

$$d\overline{S}_t = r\overline{S}_t dt + \sigma(t, \overline{S}_t)\overline{S}_t d\overline{W}_t,$$

ossia una SDE analoga alla (1.18), con $\mu \equiv r$.
Nel seguito indichiamo con E^Q l'attesa nella misura Q e con $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ la filtrazione associata al moto Browniano $\overline{W}$.
Torniamo al problema della determinazione del prezzo di un derivato su S, consideriamo il modello di Black&Scholes e assumiamo che μ e σ in (1.18) siano costanti. Il risultato cruciale è la seguente prima formulazione del teorema di Girsanov.

Teorema 1.8. *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Esiste una misura di probabilità Q, equivalente a P, tale che il processo stocastico $\overline{W}$ definito da*

$$\overline{W}_t = W_t + \lambda t, \qquad t \geq 0 \tag{1.19}$$

è un moto Browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Osserviamo che

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right) = rS_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t,$$

avendo posto

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

ed essendo $\overline{W}$ il processo stocastico in (1.19). Il parametro λ è detto *il prezzo di mercato del rischio* in quanto indica il rapporto tra il premio sul rendimento atteso $\mu - r$ richiesto per assumersi il rischio e la volatilità σ.
Il caso $\lambda = 0$ ossia $\mu = r$ indica la neutralità del rischio.
Il Teorema 1.8 garantisce l'esistenza di una misura di probabilità Q, detta **misura martingala equivalente**, rispetto alla quale S è un moto Browniano geometrico[1] con rendimento atteso r. Dunque nella misura Q il sottostante ha una dinamica che non descrive le osservazioni reali, ma è tale che gli investitori sono neutrali al rischio. Possiamo allora riassumere i risultati precedenti nel seguente teorema.

Teorema 1.9. *Esiste una misura di probabilità Q, equivalente a P, tale che il sottostante ha la seguente dinamica in Q:*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t$$

Inoltre $\frac{S}{B}, \frac{H}{B}$ sono martingale e vale la seguente formula di valutazione neutrale del rischio

$$H_t = E^Q(e^{-r(T-t)}\varphi(S_T) \mid \overline{\mathcal{F}}_t), \qquad t \in [0, T]$$

In particolare

$$H_0 = E^Q(e^{-rT}\varphi(S_T))$$

Il risultato precedente può essere esteso al caso (1.18) utilizzando una versione generale del teorema di Girsanov.

Teorema 1.10. ***(Teorema di Girsanov)*** *Sia W un moto Browniano sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con filtrazione Browniana $(\mathcal{F}_t)$. Sia u un processo adattato tale che esista in $[0, T]$ la soluzione L di*

$$\begin{cases} dL_t = u_t L_t dW_t \\ L_0 = 1 \end{cases} \tag{1.20}$$

[1]Dati $S_0, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$, il processo stocastico

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

è detto moto Browniano geometrico.

Se vale la condizione

$$E(L_T) = 1, \tag{1.21}$$

definiamo la misura di probabilità Q *su* $\mathcal{F}_T$ *mediante*

$$\frac{dQ}{dP} = L_T \qquad in \quad \mathcal{F}_T$$

Allora il processo stocastico $(\overline{W}_t)_{t\in[0,T]}$ *definito da*

$$d\overline{W}_t = dW_t - u_t dt, \qquad ossia \qquad \overline{W}_t = W_t - \int_0^t u_s ds,$$

è un moto Browniano nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.

1.6 Completezza-Assenza di arbitraggio

Fino a questo momento abbiamo visto cosa succede in un modello con un solo titolo sottostante ($S = stock$), in questo paragrafo daremo alcune regole empiriche generali per determinare se un certo modello è completo e/o privo di arbitraggio.
Consideriamo un modello con M titoli commerciati più il titolo privo di rischio (cioè in totale $M+1$ titoli). Assumiamo che i processi di prezzo dei titoli sottostanti siano guidati da R "sorgenti random". Non riusciamo a dare una definizione precisa di cosa costituisce una "sorgente random", diciamo solo che il tipico esempio è un processo di Wiener. Se, per esempio, abbiamo 5 processi di Wiener indipendenti, che guidano i nostri prezzi, allora $R = 5$.
Sia R il numero di sorgenti random fissato, allora ogni titolo sottostante aggiunto al modello ci darà una potenziale opportunità di creare un portafoglio di arbitraggio, così per avere un mercato privo di arbitraggio il numero M di titoli sottostanti dovrà essere piccolo rispetto al numero R di sorgenti random. D'altra parte vediamo che ogni nuovo titolo sottostante aggiunto al modello ci fornisce la possibilità di replicare un derivato, così la completezza richiede che M sia grande rispetto ad R.
Non possiamo formulare un risultato preciso, tuttavia la seguente regola empirica è estremamente utile, e verrà utilizzata più avanti nella teoria dei tassi d'interesse.

Osservazione 1.11. Denotiamo con M il numero dei titoli sottostanti nel modello escluso il titolo privo di rischio e denotiamo con R il numero di sorgenti random. Allora abbiamo le seguenti relazioni:

1. il modello è privo di arbitraggio $\Longleftrightarrow M \leq R$
2. il modello è completo $\Longleftrightarrow M \geq R$
3. il modello è completo e privo di arbitraggio $\Longleftrightarrow M = R$

Prendiamo, ad esempio, il modello di Black&Scholes, dove abbiamo un titolo sottostante S più il titolo privo di rischio, $M = 1$, e un processo di Wiener, $R = 1$, quindi $M = R$. Usando l'osservazione sopra, otteniamo che il modello di Black&Scholes è privo di arbitraggio e completo.

Capitolo 2

Tassi d'interesse e bonds

In questo capitolo inizieremo a studiare i particolari problemi che compaiono quando proviamo ad applicare la teoria di arbitraggio al mercato bond.
Introduciamo quindi le nozioni fondamentali per poter sviluppare l'analisi su tali modelli.

2.1 Zero coupon bond

Proposizione 2.1. *Uno* ***zero coupon bond*** *con data di maturità T anche chiamato un T-bond, è un contratto in cui si paga 1 dollaro al tempo di maturità T. Il prezzo al tempo t di un bond con data di scadenza T è denotato da $p(t,T)$.*

L'accordo che il pagamento alla scadenza, noto come **principal value** o **face value** (valore nominale), è uguale a 1, è fatto per convenienza di calcolo. I coupon bonds danno al possessore un flusso di pagamento durante l'intervallo $[0,T]$. Questi strumenti hanno la proprietà comune di fornire al possessore un movimento di cassa deterministico, e per questo motivo sono conosciuti come strumenti a **reddito fisso**.
Per garantire l'esistenza di un mercato di bond sufficientemente ricco e regolare, supponiamo che:

Ipotesi 2.1.

1. esiste un mercato per T-bond per ogni $T > 0$
2. la relazione $p(t,t) = 1$ vale per tutti i t [1]

[1] Ipotesi necessaria per evitare l'arbitraggio

3. $\forall t$ fissato, il prezzo bond $p(t, T)$ è differenziabile rispetto al tempo di maturità T

Per ogni t e T fissati il prezzo bond $p(t, T)$ è una variabile aleatoria e, per ogni risultato nello spazio campione sottostante, la dipendenza su queste variabili è molto differente.

- Per un valore fissato di t, $p(t, T)$ è una funzione di T. Questa funzione fornisce il prezzo, al tempo fissato t, per bond di tutte le possibili scadenze. Il grafico di questa funzione è chiamato la curva di prezzo bond a t o struttura a termine a t. Di solito è un grafico molto regolare, cioè per ogni t, $p(t, T)$ è differenziabile in T.

- Per una scadenza fissata T, $p(t, T)$ (come una funzione di t) è un processo scalare stocastico. Questo processo dà i prezzi del bond, a tempi differenti, con scadenza fissata T, e la traiettoria è tipicamente molto irregolare (come un processo di Wiener).

Dall'Ipotesi 2.1 segue che il mercato dei bond contiene un numero infinito di titoli (un tipo di bond per ogni scadenza). L'obiettivo principale è quello di studiare le relazioni tra tutti questi bond differenti.

2.2 Tassi d'interesse

2.2.1 Definizioni

Supponiamo di essere al tempo t, fissiamo altri due punti nel tempo, S e T, con $t < S < T$. Vogliamo sottoscrivere al tempo t un contratto che ci permette di fare un investimento di 1 dollaro al tempo S e avere un tasso deterministico di ritorno, determinato dal contratto al tempo t sull'intervallo $[S, T]$. Questo può essere facilmente realizzato nel seguente modo:

1. Al tempo t vendiamo un S-bond. Questo ci rende $p(t, S)$ dollari.

2. Usiamo questa rendita per comprare esattamente $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ T-bond.
   In questo modo il nostro investimento netto al tempo t è uguale a 0.

3. Al tempo S l'S-bond matura e siamo obbligati a pagare un dollaro.

4. Al tempo T i T-bond maturano a un dollaro al pezzo, ricevendo l'importo di $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ dollari.

5. L'investimento di un dollaro, basato su un contratto a t, al tempo S ha fruttato $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ dollari al tempo T.

6. Quindi al tempo t, abbiamo fatto un contratto garantendo un tasso d'interesse privo di rischio sul futuro intervallo $[S,T]$. Tale tasso d'interesse è chiamato **tasso forward**.

Introduciamo i tassi d'interesse e in particolare useremo due modi per quotare i tassi forward: tassi continuamente composti o come tassi semplici.

Il tasso *forward semplice* (o **tasso Libor**) $L = L(t; S, T)$ è la soluzione dell'equazione

$$1 + (T - S)L = \frac{p(t,S)}{p(t,T)},$$

invece il tasso **forward continuamente composto** $R = R(t; S, T)$ è la soluzione dell'equazione

$$e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

Il tasso semplice è usato nel mercato, invece quello continuamente composto è usato in contesti teorici. Riassumendo:

Definizione 2.1. Il tasso forward **semplice** per $[S,T]$ limitato a t, chiamato anche tasso forward **Libor**, è definito come:

$$L(t; S, T) = -\frac{p(t,T) - p(t,S)}{(T-S)p(t,T)}$$

Definizione 2.2. Il tasso **semplice spot** per $[S,T]$, chiamato anche tasso **spot Libor**, è definito come

$$L(S,T) = -\frac{p(S,T) - 1}{(T-S)p(S,T)}$$

Definizione 2.3. Il tasso **forward continuamente composto** per $[S,T]$ limitato a t è definito come

$$R(t; S, T) = -\frac{\lg p(t,T) - \lg p(t,S)}{T-S}$$

Il tasso fisso composto che ci permette di replicare $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ è il tasso forward composto

$$1 - e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$
$$R(T-S) = \lg p(t,T) - \lg p(t,S)$$
$$R(t;T,S) = -\frac{\lg p(t,T) - \lg p(t,S)}{(T-S)}$$

Definizione 2.4. Il tasso **spot continuamente composto** $R(S,T)$ per il periodo $[S,T]$ è definito come

$$R(S,T) = -\frac{\lg p(S,T)}{T-S}$$

Definizione 2.5. Il tasso **forward istantaneo** con maturità T, limitato a t, è definito da

$$f(t,T) = -\frac{\partial \lg p(t,T)}{\partial T}$$

Definizione 2.6. Il tasso **short istantaneo** al tempo t è definito da

$$r(t) = f(t,t)$$

Notiamo che i tassi spot sono tassi forward quando il tempo limite coincide con l'inizio dell'intervallo su cui il tasso d'interesse è efficace, cioè a $t = S$. Il tasso forward istantaneo è il limite tasso forward continuamente composto quando $S \to T$. Questo può così essere interpretato come il tasso d'interesse meno rischioso, contratto a t, sull'intervallo infinitesimale $[T, T + dt]$.

Definizione 2.7. Il processo **money account** è definito da

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases}$$

cioè

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}$$

Lemma 2.2. *Per $t \le s \le T$ abbiamo*

$$p(t,T) = p(t,s)\exp\left\{-\int_S^T f(t,u)du\right\},$$

e in particolare

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}$$

Un modello per il mercato bond può essere costruito in diversi modi: possiamo specificare le dinamiche del tasso short, o le dinamiche di tutti i possibili bond oppure le dinamiche di tutti i tassi forward (in questo caso possiamo usare il lemma precedente per ottenere prezzi bond).
Nella prossima sezione vediamo come questi metodi sono in relazione l'uno con l'altro.

2.3 Relazioni tra df(t,T), dp(t,T) e dr(t)

Considereremo le dinamiche della seguente forma:
Dinamiche del tasso short

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \tag{2.1}$$

Dinamiche del prezzo bond

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)v(t,T)dW(t) \tag{2.2}$$

Dinamiche del tasso forward

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \tag{2.3}$$

Il processo $W(t)$ è un moto Browniano unidimensionale. I processi $a(t)$ e $b(t)$ sono processi scalari adattati, invece $m(t,T), v(t,T), \sigma(t,T)$ e $\alpha(t,T)$ sono processi adattati parametrizzati dal tempo di maturità T. L'equazione del prezzo bond (2.2) e l'equazione del tasso forward (2.3) sono equazioni differenziali stocastiche scalari (in t-variabile) per ogni tempo di maturità T fissato. Così (2.2) e (2.3) sono entrambi sistemi infiniti dimensionali di SDE. Studiamo le relazioni che si devono verificare tra i prezzi bond e i tassi d'interesse e per fare questo abbiamo bisogno di alcuni presupposti.

Ipotesi 2.2.

1. Per ogni ω, t fissati tutte le funzioni $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ e $\sigma(t,T)$ sono assunte essere differenziabili in T.
   Questa T-derivata parziale è denotata da $m_T(t,T)$, etc.

2. Tutti i processi sono assunti abbastanza regolari per poter differenziare sotto il segno d'integrale e per poter scambiare l'ordine d'integrazione.

Proposizione 2.3.

1. *Se $p(t,T)$ soddisfa la (2.2), allora per le dinamiche del tasso forward abbiamo*

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

dove α e σ sono dati da

$$\begin{cases} \alpha(t,T) = v_T(t,T)v(t,T) - m_T(t,T) \\ \sigma(t,T) = -v_T(t,T) \end{cases} \tag{2.4}$$

2. *Se $f(t,T)$ soddisfa la (2.3), allora il tasso short soddisfa*

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

dove

$$\begin{cases} a(t) = f_T(t,t) + \alpha(t,t) \\ b(t) = \sigma(t,t) \end{cases} \tag{2.5}$$

3. *Se f(t,T) soddisfa la (2.3), allora $p(t,T)$ soddisfa*

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t,T) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)dW(t)$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidea, e

$$\begin{cases} A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds \\ \\ S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds \end{cases} \tag{2.6}$$

Idea della dimostrazione

1. Si ha che

$$\int_t^T f(t,s)ds = -\lg p(t,T)$$

considero

$$Y(t,T) = \lg p(t,T)$$

Dalla formula di Itô:

$$\begin{aligned} dY(t,T) &= \frac{1}{p(t,T)}dp(t,T) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p(t,T)^2}\right)v^2(t,T)p^2(t,T)dt = \\ &= \left[m(t,T) - \frac{1}{2}v^2(t,T)\right]dt + v(t,T)dW_t \end{aligned}$$

avendo sostituito $dp(t,T) = p(t,T)[m(t,T)dt + v(t,T)dW_t]$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t,s)ds = -Y(t,T) = &- \int_0^t \left(m(S,T) - \frac{1}{2}v^2(S,T)\right)ds - \\ &- \int_0^t v(S,T)dW_s - Y(0,T) \end{aligned}$$

derivando rispetto alla seconda variabile

$$f(t,T) = \int_0^t -\left(\frac{\partial m}{\partial T}(S,T) - \frac{\partial v}{\partial T}(S,T)v(S,T)\right)dt + \int_0^t -\frac{\partial v}{\partial T}(S,T)dW_s$$

Ne segue che

$$\partial f(t,T) = -\left(\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial T}v\right)dt - \frac{\partial v}{\partial T}dW_t$$

2. Integriamo le dinamiche del tasso forward per ottenere

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s) \tag{2.7}$$

Ora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \alpha(s,t) &= \alpha(s,s) + \int_s^t \alpha_T(s,u)du \\ \sigma(s,t) &= \sigma(s,s) + \int_s^t \sigma_T(s,u)du \end{aligned}$$

e inserendo queste nella (2.7), abbiamo

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,s)ds + \int_0^t\int_s^t \alpha_T(s,u)duds + \\ &+ \int_0^t \sigma(s,s)dW_s + \int_0^t\int_s^t \sigma_T(s,u)dudW_s \end{aligned}$$

Cambiando l'ordine d'integrazione e identificando i termini otteniamo il risultato.

3. Usando la definizione dei tassi forward possiamo scrivere

$$p(t,T) = e^{Y(t,T)} \tag{2.8}$$

dove Y è dato da

$$Y(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds \tag{2.9}$$

Dalla formula di Itô allora otteniamo le dinamiche bond quali

$$dp(t,T) = p(t,T)dY(t,T) + \frac{1}{2}p(t,T)(dY(t,T))^2 \tag{2.10}$$

e rimane da calcolare $dY(t,T)$. Abbiamo

$$dY(t,T) = -d\left(\int_t^T f(t,s)ds\right)$$

e il problema è che nell'integrale la t-variabile si presenta in due posti: il limite più basso d'integrazione e nell'integrando $f(t,s)$. La t che compare come il limite più basso d'integrazione dovrebbe dare origine al termine

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T f(t,s)ds\right)dt$$

Poichè il differenziale stocastico è un'operazione lineare, possiamo portarlo dentro l'integrale ottenendo

$$\int_t^T df(t,s)ds$$

Siamo quindi arrivati a

$$dY(t,T) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T f(t,s)ds\right)dt - \int_t^T df(t,s)ds$$

che, usando il teorema fondamentale del calcolo integrale, così come le dinamiche del tasso forward, ci dà

$$dY(t,T) = f(t,t)dt - \int_t^T \alpha(t,s)dtds - \int_t^T \sigma(t,s)dW_t ds$$

Ora scambiamo dt e dW_t con ds e riconosciamo $f(t,t)$ come il tasso short $r(t)$, così da ottenere

$$dY(t,T) = r(t)dt + A(t,T)dt + S(t,T)dW_t$$

Quindi abbiamo

$$(dY(t,T))^2 = \|S(t,T)\|^2 dt$$

e sostituendo tutto questo nella (2.10), otteniamo il risultato desiderato.

$\square$

2.4 La curva yield

Consideriamo uno zero coupon T-bond con prezzo di mercato $p(t, T)$.
Cerchiamo il tasso d'interesse short costante che darà a questo bond lo stesso valore dato dal mercato. Denotando questo valore di tasso short da y, vogliamo così risolvere l'equazione

$$p(t, T) = [\exp(-y(T - t))]\, 1$$

dove il fattore 1 indica il valore nominale del bond. Siamo così arrivati alla seguente definizione.

Definizione 2.8. Lo zero coupon yield continuamente composto $y(t, T)$ è dato da

$$y(t, T) = -\frac{\lg p(t, T)}{T - t}$$

Per un t fissato, la funzione $T \longrightarrow y(t, T)$ è chiamata la **curva yield** (zero coupon).

Notiamo infine che lo yield $y(t, T)$ coincide con il tasso spot per l'intervallo $[t, T]$.

Capitolo 3

Modelli per il tasso short

3.1 Nozioni generali

Nel capitolo precedente abbiamo visto che dai prezzi bond possiamo ricavare le dinamiche del tasso forward e viceversa, invece le dinamiche del tasso short possono essere ottenute sia dai prezzi bond che dal tasso forward.
Lo scopo di questo capitolo è modellare una famiglia priva di arbitraggio di processi di zero-coupon bond $\{p(\cdot, T);\ T \geq 0\}$, partendo dalle dinamiche del tasso short r.

Ipotesi 3.1. Supponiamo l'esistenza di un titolo privo di rischio.
Il prezzo B (money account) di questo titolo ha dinamiche date dall'equazione

$$dB(t) = r(t)B(t)dt \tag{3.1}$$

Le dinamiche di B possono essere interpretate come un investimento con tasso d'interesse short stocastico r.
Le dinamiche di r, sotto la misura di probabilità oggettiva P, sono date dall'equazione

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \tag{3.2}$$

In questo modello il titolo privo di rischio è considerato come il titolo sottostante, invece tutti i bond sono considerati come derivati del tasso short r "sottostante". Il nostro obiettivo quindi, è quello di cercare la relazione che ci deve essere in un mercato privo di arbitraggio tra i processi di prezzo dei bond con diversa scadenza.

Poiché consideriamo i bond come tassi d'interesse derivati è naturale chiedersi se i prezzi dei bond sono univocamente determinati dalle dinamiche r date nell'equazione (3.2) e se il mercato dei bond è privo di arbitraggio.
Quindi **i prezzi bond sono univocamente determinati dalle P-dinamiche del tasso short?** La risposta è **no**, vediamo il perchè.
Riprendendo l'Osservazione 1.11, notiamo che il numero M di titoli, escludendo quello privo di rischio, è uguale a 0 e il numero R delle sorgenti random è uguale a 1 (il processo di Wiener).
Poiché $M < R$, questo vuol dire che il mercato è privo di arbitraggio, ma non completo. La mancanza di completezza è abbastanza evidente: poichè l'unico titolo dato è quello privo di rischio non abbiamo possibilità di formare portafogli interessanti. L'unica cosa che possiamo fare sul mercato dato a priori è investire il nostro capitale in banca e poi aspettare mentre il valore del portafoglio evolve secondo le dinamiche (3.1). Assumiamo che il prezzo di un certo bond è della forma $F(t, r(t))$ per formare un portafoglio privo di rischio basato su questo bond e sul titolo sottostante. Il tasso di rendimento di tale portafoglio sarà uguale al tasso d'interesse short, riconducendo ad alcune equazioni per la determinazione della funzione F. Nel modello di Black&Scholes il titolo sottostante è l'azione S, che nel nostro caso dovrebbe corrispondere a r. Nel nostro modello tuttavia c'è un'importante differenza; infatti il tasso short non è il prezzo di un titolo commerciato, cioé non esiste titolo sul mercato il cui prezzo è dato da r.
Riassumendo:

- Il prezzo di un particolare bond non sarà completamente determinato dalle r-dinamiche (3.2) e dalla condizione che il mercato bond è privo di arbitraggio.

- Nel nostro mercato non abbiamo abbastanza titoli sottostanti per valutare i bond.

Anche se non siamo riusciti a determinare un unico prezzo per un particolare bond, tuttavia seguono due intuizioni che andremo a sviluppare nella prossima sezione:

1. Per evitare l'arbitraggio, i bond con differenti scadenze devono soddisfare relazioni interne di consistenza

2. Se consideriamo un T_0-bond "benchmark"(titolo di riferimento) come dato, allora tutti gli altri bond possono essere valutati nei termini del prezzo del bond benchmark

3.2 L'equazione della struttura a termine

Prima di tutto richiamiamo la definizione di portafoglio autofinanziato, che utilizzeremo nel seguito.

Definizione 3.1. Un portafoglio si dice **autofinanziato** se il processo del valore soddisfa

$$dV_h = \sum_{i=0}^{N} h_i(t) dS_i(t)$$

Definizione 3.2. Per un portafoglio h il corrispondente **portafoglio relativo** u è dato da

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V_h(t)}, \qquad i = 1, ..., N$$

dove $u_i(t)$ sono chiamati i **pesi** del portafoglio, e

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1$$

La condizione di portafoglio autofinanziato diventa:

$$dV_t = V_t \sum_i u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$$

Ipotesi 3.2. Consideriamo sempre l'Ipotesi 2.1 e che il mercato sia privo di arbitraggio. Supponiamo, inoltre, che per ogni T il prezzo di un T-bond abbia la forma

$$p(t, T) = F(t, r(t), T) \tag{3.3}$$

dove F è una funzione regolare di tre variabili reali.

Pensiamo F come una funzione di sole due variabili, ossia r e t, e T come un parametro; denotando $F^T(r, t)$ con $F(t, r, T)$. Formiamo quindi un portafoglio che consiste di bond con differenti tempi di maturità.

Fissiamo così due tempi di maturità S e T. Dalla (3.3) e dalla formula di Itô otteniamo le seguenti dinamiche del prezzo per un T-bond con equazioni corrispondenti per un S-bond.

$$F^T(t,r) = F(t,r,T) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} dF^T &= (\partial_t F)dt + \partial_r F dr + \frac{1}{2}\partial_{rr} F d\langle r\rangle \\ &= \partial_t F dt + \partial_r F(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F dt \\ &= F^T \left(\frac{\partial_t F + \mu \partial_r F + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F}{F^T} \right) dt + F^T \left(\frac{\sigma \partial_r F}{F^T} \right) dW \end{aligned} \tag{3.5}$$

con

$$\alpha_T = \frac{\partial_t F + \mu \partial_r F + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F}{F} \tag{3.6}$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma \partial_r F}{F} \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow dF^T = F^T \alpha_T dt + F^T \sigma_T dW \tag{3.8}$$

Denotando il relativo portafoglio con (u_S, u_T) abbiamo le seguenti dinamiche per il nostro portafoglio, dove con u_T indichiamo la percentuale del valore totale del portafoglio che si investe in $p(t,T)$ al tempo t.
Se V_t è il valore del portafoglio, il numero di T-bond nel portafoglio è $p(t,T) = \dfrac{u_T V_t}{p(t,T)}$ e il numero di S-bond è $p(t,S) = \dfrac{u_S V_t}{p(t,S)}$. Poichè il portafoglio è autofinanziato si ha che:

$$dV_t = \frac{u_T V_t}{p(t,T)} dp(t,T) + \frac{u_S V_t}{p(t,S)} dp(t,S)$$

$$dV_t = V_t \left(u_T \frac{dp(t,T)}{p(t,T)} + u_S \frac{dp(t,S)}{p(t,S)} \right)$$

e inserendo la forma differenziale (3.8) così come l'equazione corrispondente per l'S-bond abbiamo

$$\begin{aligned}
&= V_t\left(\frac{u_T}{p(t,T)}(\alpha_T p(t,T)dt + \sigma_T p(t,T)dW_t) + \right. \\
&+ \left. \frac{u_S}{p(t,S)}(\alpha_S p(t,S)dt + \sigma_S p(t,S)dW_t)\right) \\
&= V_t(u_T\alpha_T dt + u_T\sigma_T dW_t + u_S\alpha S dt + u_S\sigma_S dW_t) \\
&= V_t(u_T\alpha_T + u_S\alpha_S)dt + V_t(u_T\sigma_T + u_S\sigma_S)dW_t
\end{aligned}$$

Per costruire un portafoglio privo di rischio si scelgono u_T e u_S tale che

$$u_T\sigma_T + u_S\sigma_S = 0$$

Inoltre

$$u_S + u_T = 1$$

Con questo portafoglio il dW-termine scomparirà, riducendo le dinamiche a

$$dV = V(u_T\alpha_T + u_S\alpha_S)dt \tag{3.9}$$

Risolviamo facilmente il sistema

$$\begin{cases} u_T\sigma_T + u_S\sigma_S = 0 \\ u_T + u_S = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_T = -\dfrac{u_S\sigma_S}{\sigma_T} \\ -\dfrac{u_S\sigma_S}{\sigma_T} + u_S = 1 \end{cases}$$

e otteniamo

$$u_T = -\frac{\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} \qquad u_S = \frac{\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S} \tag{3.10}$$

e sostituendo questa nella (3.9) abbiamo

$$\begin{aligned}
dV &= V(\alpha_T u_T + \alpha_S u_S)dt \\
&= V\left(\frac{-\alpha_T\sigma_S + \alpha_S\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S}\right)dt
\end{aligned}$$

L'ipotesi di non arbitraggio implica che questo portafoglio deve avere un rendimento uguale al tasso d'interesse short. Così abbiamo la condizione

$$\frac{\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} = r_t \qquad \text{per tutti i } t \text{ con probabilità 1}$$

o, scritto differentemente

$$\frac{\sigma_S - r}{\sigma_S} = \frac{\alpha_T - r}{\sigma_T} \tag{3.11}$$

Il fatto interessante riguardo l'equazione (3.11) è che a sinistra abbiamo un processo stocastico che non dipende dalla scelta di T, mentre a destra abbiamo un processo che non dipende dalla scelta di S. Il quoziente comune pertanto non dipenderà dalla scelta nè di T nè di S, perciò abbiamo provato il seguente risultato fondamentale.

Proposizione 3.1. *Assumiamo che il mercato dei bond sia libero da arbitraggio. Allora esiste un processo λ tale che la relazione*

$$\frac{\alpha_T - r_t}{\sigma_T} = \lambda(t) \tag{3.12}$$

vale per tutti i t e per ogni scelta di tempo di maturità T.

Nel numeratore di (3.12) abbiamo il termine $(\alpha_T - r_t)$. Dall'equazione (3.8), α_T è il rendimento locale su un T-bond, invece r è il rendimento di un titolo privo di rischio. La differenza $(\alpha_T - r_t)$ è quindi il **premio al rischio** di un T-bond. Quest'ultimo misura l'eccesso di rendimento per il T-bond rischioso, oltre a quello privo di rischio che è richiesto dal mercato per evitare possibilità di arbitraggio. Nel denominatore della (3.12) abbiamo σ_T, ovvero la volatilità locale del T-bond. Di conseguenza il processo λ ha la dimensione *premio al rischio per unità di volatilità*.

Il processo λ è conosciuto come **market price of risk**, e possiamo scrivere la Proposizione 1.2.1 nel seguente modo:

In un mercato privo di arbitraggio tutti i bond, indipendentemente dal tempo di maturità, hanno lo stesso market price of risk (=λ).

λ_t non è un prezzo in senso stretto, ma costituisce un indicatore della propensione al rischio degli investitori. Tale propensione è direttamente proporzionale alla differenza $(\alpha_T - r_t)$, mentre è inversamente proporzionale alla volatilità in quanto la volatilità misura appunto l'incertezza del mercato.

Per specificare l'intera struttura a termine è dunque necessario definire la dinamiche di

r_t ed assegnare il valore λ_t per ogni t. Le dinamiche del mercato sono infatti determinate dall'azione congiunta dell'andamento dei tassi d'interesse e dell'avversione al rischio degli investitori $(r_t + \lambda_t)$.
Invece di assegnare λ_t si possono specificare le dinamiche di $p(t, \overline{T})$ per una determinata scadenza $\overline{T}$. Poichè la relazione (3.12) vale per ogni tempo di scadenza T si è in questo modo specificato automaticamente λ_t.
Prendiamo l'equazione (3.12) e sostituiamo ad α_T e σ_T le precedenti formule (3.6) e (3.7).

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \alpha_T - r\sigma_T = \frac{\frac{\frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}}{F} - r}{\frac{\sigma}{F}\frac{\partial F}{\partial r}} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - rF \right) \frac{1}{\sigma \frac{\partial F}{\partial r}} \end{aligned}$$

Otteniamo così una delle più importanti equazioni nella teoria dei tassi d'interesse chiamata **equazione della struttura a termine**, che formuliamo nella seguente proposizione.

Proposizione 3.2. ***(Equazione della struttura a termine)***
Il mercato di bond è privo di arbitraggio, F^T soddisferà l'equazione della struttura a termine (TSE)

$$\begin{cases} F_t^T + (\mu - \lambda\sigma)F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T - rF^T = 0 \\ F^T(T, r) = 1 = p(T, T) \end{cases}$$

Segue dalle equazioni (3.6), (3.7) e (3.12) che λ è della forma $\lambda = \lambda(t, r)$, così l'equazione della struttura a termine è un'equazione alle derivate parziali (PDE) standard, ma il problema è che λ non è determinato nel modello. Per risolvere l'equazione della struttura a termine dobbiamo specificare λ come abbiamo specificato μ e σ. Ma a questo punto sorge un problema importante, vale a dire come scegliere λ in una situazione concreta. Questa questione sarà trattata nei dettagli nella Sezione 3.3.2, comunque il punto fondamentale è che λ è determinata dal mercato, cioè dobbiamo osservare il mercato attuale e, usando i dati del mercato, dedurre la scelta di λ. Nonostante questo problema non è difficile ottenere una rappresentazione **Feynman-Kač** di F^T. Questa si ricava fissando (t,r) e usando il processo

$$\exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\} F^T(s, r(s)) \tag{3.13}$$

Se applichiamo la formula di Itô alla (3.13) e ricordando che F^T deve soddisfare l'equazione della struttura a termine allora otteniamo la seguente formula di rappresentazione stocastica.

Proposizione 3.3. ***(Valutazione neutrale del rischio)*** *I prezzi bond sono dati dalla formula* $p(t,T) = F(t, r(t), T)$ *dove*

$$F(t, r, T) = E^Q_{t,r}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\right] \tag{3.14}$$

In questa relazione la misura martingala Q e gli indici scritti in basso t, r denotano che l'aspettativa è presa date le seguenti dinamiche per il tasso short:

$$\begin{aligned} dr(s) &= (\mu - \sigma\lambda)ds + \sigma dW(s) \\ r(t) &= r \end{aligned}$$

La formula (3.14) ha una naturale interpretazione economica, che è vista più facilmente se la scriviamo come

$$F(t, r, T) = E^Q_{t,r}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} 1\right]$$

Notiamo che:

- il valore di un T-bond al tempo t è dato come il valore atteso del payoff finale di un dollaro, scontato al valore presente.

- l'attesa non dovrebbe essere presa sotto la misura oggettiva P, ma sotto la misura martingala Q

Se abbiamo un T-derivato della forma $\chi = \Phi(r(T))$, dove Φ è una certa funzione reale stimata, otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 3.4. ***(Equazione generale della struttura a termine)*** *Sia χ un T-derivato della forma $\chi = \Phi(r(T))$.*
In un mercato privo di arbitraggio il prezzo $\Pi(t, \Phi)$ sarà dato da

$$\Pi(t, \Phi) = F(t, r(t))$$

dove F risolve il problema del valore al contorno

$$\begin{cases} F_t + (\mu - \lambda\sigma)F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr} - rF = 0 \\ F(T, r) = \Phi(r) \end{cases}$$

Inoltre F ha la rappresentazione stocastica

$$F(t, r, T) = E^Q_{t,r}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\Phi(r(T))\right] \tag{3.15}$$

dove la misura martingala Q e gli indici t, r denotano che l'attesa è presa usando le seguenti dinamiche

$$\begin{aligned} dr(s) &= (\mu - \sigma\lambda)ds + \sigma dW(s) \\ r(t) &= r \end{aligned}$$

In conclusione possiamo dire che la differenza più importante tra la situazione attuale e il modello di Black&Scholes è che nel modello di BS la misura martingala è univocamente determinata, a causa della completezza del modello di BS. Il nostro mercato invece non è completo, quindi i prezzi bond non sono determinati univocamente dalle P-dinamiche.
I prezzi bond sono determinati da due fattori:

- in parte dalla richiesta di un mercato bond privo di arbitraggio (le funzioni di prezzo soddisfano la TSE)

- in parte dalla domanda e offerta sul mercato, e queste sono determinate dalla propensione al rischio

3.3 Modelli martingala per il tasso short

3.3.1 Q-dinamiche

Studiamo ancora un modello di tasso d'interesse dove le P-dinamiche del tasso short sono date da

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW$$

Come dicevamo nella sezione precedente, la struttura a termine (cioè la famiglia di processi dei prezzi bond) sarà, insieme a tutti gli altri derivati, completamente determinata dall'equazione generale della struttura a termine

$$\begin{cases} F_t + (\mu - \lambda\sigma)F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 Frr = rF \\ F(T, r) = \Phi(r) \end{cases} \tag{3.16}$$

una volta specificati i seguenti oggetti:

- il termine drift μ
- il termine diffusion σ
- il market price of risk λ

Consideriamo per un momento che σ sia dato a priori. Allora è chiaro dalla (3.16) che è irrilevante come specifichiamo μ e λ. L'oggetto, a parte σ, che veramente determina la struttura a termine (e tutti gli altri derivati) è il termine $(\mu - \lambda\sigma)$ nell'equazione (3.16). Dalla Proposizione 3.3 ricordiamo che il termine $(\mu - \lambda\sigma)$ è precisamente il termine drift del tasso short sotto la misura martingala Q. Questo risultato è molto importante: **La struttura a termine, così come i prezzi di tutti gli altri tassi d'interesse derivati, sono completamente determinati dalle r-dinamiche sotto la misura martingala Q.**

Invece di specificare μ e λ sotto la misura di probabilità oggettiva P specifichia-mo le dinamiche del tasso short r direttamente sotto la misura martingala Q. Questa procedura è nota come *modellizzazione martingala*, e la solita ipotesi sarà che r sotto Q ha dinamiche date da

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

dove μ e σ sono funzioni date.
In letteratura ci sono molte proposte su come specificare le Q-dinamiche per r. I modelli più comuni sono:

1. **Vasiček** ([18])
$$dr = (b - ar)dt + \sigma dW, (a > 0)$$

2. **Cox-Ingersoll-Ross (CIR)** ([8])
$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

3. **Dothan** ([9])
$$dr = ardt + \sigma rdW$$

4. **Black-Derman-Toy** ([4])
$$dr = \Theta(t)rdt + \sigma(t)rdW$$

5. **Ho-Lee** ([11])
$$dr = \Theta(t)dt + \sigma dW$$

6. **Hull-White (Vasiček esteso)** ([8])
$$dr = (\Theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)dW, (a(t) > 0)$$

7. **Hull-White (CIR esteso)**
$$dr = (\Theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)\sqrt{r}dW, (a(t) > 0)$$

Poichè tali modelli sono stati assegnati direttamente sotto la probabilità Q, la volatilità è invariante per cambio di probabilità martingala, invece per il drift non è possibile fare una calibrazione sui dati reali, ma occorrono metodi differenti come illustrato, ad esempio, nel prossimo paragrafo.

3.3.2 Inversione della yield curve

Vediamo come possiamo stimare i parametri dei vari modelli martingala appena citati. Prendiamo un caso specifico usiamo, ad esempio, il modello di Vasiček. Modelliamo quindi l'r-processo partendo dalle Q-dinamiche, ciò significa che a, b e σ sono i parametri che valgono sotto la misura martingala Q. Quando facciamo osservazioni nel mondo reale non stiamo osservando r sotto la misura martingala Q, ma sotto la misura oggettiva P. Questo significa che se applichiamo le procedure standard statistiche ai nostri dati osservati non otterremo i nostri Q-parametri. Quello che otteniamo è una pura assurdità. E' possibile però mostrare che il termine diffusion è lo stesso sotto P e sotto Q, di conseguenza può essere possibile stimare i parametri diffusion usando i P-dati. Quando si arriva alla stima dei parametri riguardanti il termine drift di r dobbiamo usare metodi completamente differenti.
Prima di schematizzare il metodo che utilizzeremo è necessario fare un'osservazione: **la misura martingala Q, o equivalentemente λ, è determinata dal mercato**. Il market price of risk è determinato dagli agenti nel mercato, e in particolare questo significa che se assumiamo una particolare struttura di λ allora abbiamo fatto implicitamente un'ipotesi riguardo le preferenze sul mercato. Prendiamo un esempio semplice, supponiamo $\lambda = 0$. Questo significa che abbiamo assunto che il mercato sia neutrale al rischio. Da questo segue immediatamente che se abbiamo un modello concreto, e vogliamo ottenere informazioni sul market price of risk, allora dobbiamo osservare il mercato concreto e ottenere l'informazione usando metodi empirici. Questo sarebbe giusto se potessimo chiedere al mercato: "Qual è il market price of risk di oggi?", o in alternativa, "Quale misura martingala state usando?", ma per ovvi motivi non possiamo fare questo nella vita reale.
Quindi per ottenere l'informazione riguardo i parametri Q-drift dobbiamo raccogliere l'informazione del prezzo dal mercato, e l'approccio solito è quello di invertire la **curva dello yield**.

- Scelgo un modello particolare coinvolgendo uno o più parametri. Denotiamo il parametro vettore completo con α. Così scriviamo le r-dinamiche (sotto Q) come

$$dr(t) = \mu(t, r(t); \alpha)dt + \sigma(t, r(t); \alpha)dW(t)$$

- Risolviamo, per ogni tempo di maturità T, l'equazione della struttura a termine

$$\begin{cases} F_t^T + \mu F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T - rF^T = 0 \\ F^T(T,r) = 1 \end{cases}$$

  In questo modo abbiamo calcolato la **struttura a termine teorica** come

$$p(t,T;\alpha) = F^T(t,r;\alpha)$$

  Notiamo che la forma della struttura a termine dipenderà dalla nostra scelta di parametro vettore, scelta che non abbiamo ancora effettuato.

- Raccogliamo i dati del prezzo dal mercato dei bond.
  In particolare oggi (cioè a $t = 0$) possiamo osservare $p(0,T)$ per tutti i valori di T.
  Denotiamo questa **struttura a termine empirica** con $\{p^*(0,T), T > 0\}$.

- Scegliamo il vettore parametro α in un modo tale che la curva teorica $\{p(0,T;\alpha); T \geq 0\}$ si adatti alla curva empirica $\{p^*(0,T); T \geq 0\}$ per quanto è possibile (secondo una certa funzione oggettiva). In questo modo otteniamo il parametro vettore stimato α^*.

- Inseriamo α^* in μ e σ. Adesso siamo esattamente costretti alla misura martingala con cui stiamo lavorando . Denotiamo il risultato d'inserimento α^* in μ e σ con μ^* e σ^* rispettivamente.

- Siamo costretti alla nostra misura martingala Q, e possiamo andare a calcolare i prezzi derivati del tasso d'interesse, $\chi = \Gamma(r(T))$.
  Il processo del prezzo è allora dato da $\Pi(t,\Gamma) = G(t,r(t))$, dove G risolve l'equazione della struttura a termine

$$\begin{cases} G_t + \mu^* G_r + \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 G_{rr} - rG = 0 \\ G(T,r) = \Gamma(r) \end{cases}$$

Se il programma appena descritto è da eseguire entro limiti di tempo ragionevoli, è molto importante che le PDE coinvolte siano facili da risolvere. Questo mostra che alcuni dei modelli sopra sono molto più facili da trattare analiticamente rispetto agli altri.

3.4 Struttura a termine affine

Definizione 3.3. Se la struttura a termine $\{p(t,T);\ 0 \le t \le T,\ T > 0\}$ ha la forma

$$p(t,T) = F(t, r(t); T) \tag{3.17}$$

dove F ha la forma

$$F(t, r; T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r} \tag{3.18}$$

e dove A e B sono funzioni deterministiche, allora il modello possiede una **struttura a termine affine** (ATS).

Le funzioni A e B sono funzioni a due variabili reali t e T, ma è più conveniente pensare ad A e B come funzioni di t e a T come un parametro. Un punto fondamentale per ottenere una ATS è la scelta di μ e σ nelle Q-dinamiche per r. Enunciamo allora il seguente risultato principale.

Proposizione 3.5. ***(ATS)*** *Assumiamo che μ e σ siano della forma*

$$\begin{cases} \mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma^2(t,r) = \gamma(t)r + \delta(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

Allora il modello ammette una ATS della forma (3.18), dove A e B soddisfano il sistema

$$\begin{cases} B_t(t,T) + \alpha(t,T)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) = -1 \\ B(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T) \\ A(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Notiamo che l'equazione (3.20) è un'equazione di Riccati per la determinazione di B che non coinvolge A. Dopo aver risolto l'equazione (3.20) possiamo inserire la soluzione B nell'equazione (3.21) e, poi integrare per ottenere A. L'importanza della ATS è dovuta al fatto che si ottiene un'espressione analitica per $p(t,T)$. In generale l'ipotesi che μ e σ^2 dipendono linearmente da r non è una condizione necessaria per avere una ATS. Si può dimostrare che se μ e σ^2 sono indipendenti dal tempo, allora una condizione necessaria per l'esistenza di una ATS è che μ e σ^2 siano affini. Tutti i modelli, visti in 3.3.1, eccetto quello di Dothan e di Black-Derman-Toy, hanno una ATS.

3.5 Generalità sui modelli martingala

Alcuni dei modelli, citati precedentemente, sono più facili da analizzare di altri. I modelli di Vasiček, Ho-Lee e Hull-White (Vasiček esteso) descrivono tutti il tasso short usando una SDE lineare. Tali SDE sono più facili da risolvere; i prezzi bond sono dati da espressioni tipo

$$p(0,T) = E\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}\right]$$

Se r_t segue un modello lineare, $\int r(s)ds$ è una variabile gaussiana, quindi il prezzo $p(0,T)$ si calcola facilmente.
Invece per il modello di Dothan ($\sim$ Black&Scholes) il tasso short è distribuito in modo log-normale, cioè per calcolare i prezzi bond dobbiamo determinare la distribuzione di un integrale $\int_0^T r(s)ds$ di variabili stocastiche log-normali, perciò il calcolo del prezzo non è di facile soluzione. Concludiamo con un commento sulla calibrazione del modello rispetto ai dati descritti nel paragrafo precedente. Se vogliamo una completa corrispondenza tra i prezzi bond osservati e quelli teorici è necessario risolvere il sistema di equazioni

$$p(0,T;\alpha) = p^*(0,T) \qquad \forall\, T > 0 \tag{3.22}$$

Osserviamo che questo è un sistema infinito dimensionale di equazioni (una equazione per ogni T) con α non noto, così se lavoriamo con un modello che contiene un vettore parametro finito α (come il modello di Vasiček) non c'è possibilità di ottenere una corrispondenza perfetta. Se invece consideriamo il modello di Hull-White, in cui drift e volatilità includono parametri dipendenti dal tempo, allora si riesce a trovare un vettore parametro infinito dimensionale α tale che l'equazione (3.22) è soddisfatta.
Esiste anche un approccio completamente differente al problema di ottenere una perfetta corrispondenza tra i prezzi teorici e quelli osservati.
Questo è l'approccio Heath-Jarrow-Morton (HJM), che analizzeremo nel prossimo capitolo, esso prende approssimativamente la struttura a termine osservata come una condizione iniziale per la curva dei tassi forward, così automaticamente otteniamo una corrispondenza perfetta.

3.6 Alcuni modelli standard

In questo paragrafo applicheremo la teoria della ATS per studiare i più comuni modelli affini a un fattore.

3.6.1 Il modello di Vasiček

Le Q-dinamiche per il tasso short sono date da

$$dr(t) = (b - ar)dt + \sigma dW \tag{3.23}$$

Il modello di Vasiček introduce il concetto di **mean reversion**. Per spiegare di cosa si tratta riscriviamo la (3.23) come

$$dr(t) = a(\underbrace{b/a}_{\gamma} - r) + \sigma dW$$

allora:

- se $r > \gamma$ il termine diffusion è negativo e proporzionale alla differenza: r tende a scendere
- se $r < \gamma$ il termine diffusion è positivo e r tende a risalire

Per questo motivo γ si chiama media di lungo periodo, a fissa la velocità di mean reversion, mentre σ è la volatilità del tasso.
Le equazioni (3.20)-(3.21) diventano

$$\begin{cases} B_t(t,T) - aB(t,T) = -1 \\ B(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} A_t(t,T) = bB(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) \\ A(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

L'equazione (3.24) è, per ogni T fissato, una semplice ODE lineare nella t-variabile. Questa può essere facilmente risolto come

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(T-t)}\right\} \tag{3.26}$$

Integrando l'equazione (3.25) otteniamo

$$A(t,T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s,T)ds - b\int_t^T B(s,T)ds \tag{3.27}$$

e sostituendo l'espressione per B sopra, otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 3.6. ***(Struttura a termine per Vasiček)***
Nel modello Vasiček, i prezzi sono dati da

$$p(t,T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)}$$

dove

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{1}{a}\left\{1-e^{-a(T-t)}\right\} \\ A(t,T) &= \frac{\{B(t,T)-T+t\}(ab-\frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a} \end{aligned}$$

3.6.2 Il modello di Ho-Lee

Per il modello di Ho-Lee le equazioni ATS diventano

$$\begin{cases} B_t(t,T) = -1 \\ B(T,T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_t(t,T) = \theta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2B^2(t,T) \\ A(T,T) = 0 \end{cases}$$

Ora rimane da scegliere θ tale che i prezzi bond teorici, a $t=0$, si adattino alla struttura a termine iniziale osservata $\{p^*(0,T);T\geq 0\}$. Così vogliamo cercare θ tale che $p(0,T) = p^*(0,T)$ per tutti i $T \geq 0$, e la soluzione è data da

$$\theta(t) = \frac{\partial f^*(0,t)}{\partial T} + \sigma^2 t$$

dove $f^*(0,t)$ denota i tassi forward osservati. Mettendo questa espressione nella ATS otteniamo i seguenti prezzi bond.

Proposizione 3.7. ***(Struttura a termine per Ho-Lee)***
Per il modello di Ho-Lee, i prezzi bond sono dati da

$$p(t,T) = \frac{p^*(0,T)}{p^*(0,t)}\exp\left\{(T-t)f^*(0,t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 - (T-t)r(t)\right\}$$

3.6.3 Il modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

Il modello CIR è molto più difficile da trattare rispetto al modello di Vasiček, poiché dobbiamo risolvere un'equazione di Riccati.
Citiamo il seguente risultato.

Proposizione 3.8. ***(Struttura a termine per CIR)*** *La struttura a termine per il modello CIR è data da*

$$F^T(t,r) = A_0(T-t)e^{-B(T-t)r}$$

dove

$$\begin{aligned} B(T-t) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\ A_0(T-t) &= \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)[(T-t)/2]}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2ab/\sigma^2} \end{aligned}$$

e

$$\gamma = \sqrt{a^2+2\sigma^2}$$

3.6.4 Il modello di Hull-White

Le Q-dinamiche del tasso short sono date da

$$dr = \{\theta(t) - ar\}dt + \sigma dW(t) \tag{3.28}$$

dove a e σ sono costanti mentre θ è una funzione di tempo deterministica. In questo modello scegliamo a e σ per ottenere una struttura con volatilità buona, mentre θ è scelto per adattare i prezzi bond teorici $\{p(0,T); T>0\}$ alla curva osservata $\{p^*(0,T); T>0\}$. Dalla Proposizione 3.5 i prezzi bond sono dati da

$$p(t,T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)} \tag{3.29}$$

dove A e B risolvono

$$\begin{cases} B_t(t,T) = aB(t,T) - 1 \\ B(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} A_t(t,T) = \theta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) \\ A(T,T) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono date da

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(T-t)}\right\} \tag{3.32}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \left\{\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s,T) - \theta(s)B(s,T)\right\} ds \tag{3.33}$$

Ora vogliamo adattare i prezzi teorici sopra ai prezzi osservati, ed è conveniente fare questo usando i tassi forward. Poiché c'è una corrispondenza 1-1 (dal Lemma 2.2) tra i tassi forward e i prezzi bond, possiamo appunto adattare la curva del tasso forward teorica $\{f(0,T); T > 0\}$ alla curva osservata $\{f^*(0,T); T > 0\}$, dove naturalmente f^* è definita da

$$f^*(t,T) = -\frac{\partial \lg p^*(t,T)}{\partial T}$$

In ogni modello affine i tassi forward sono dati da

$$f(0,T) = B_T(0,T)r(0) - A_T(0,T) \tag{3.34}$$

che, dopo aver inserito (3.32)-(3.33), diventa

$$f(0,T) = e^{-aT}r(0) + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 \tag{3.35}$$

Data una struttura del tasso forward osservata f^* il nostro problema è cercare una funzione θ che risolve l'equazione

$$f^*(0,T) = e^{-aT}r(0) + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2, \qquad \forall\, T > 0 \tag{3.36}$$

Un modo per risolvere la (3.36) è scrivendola come

$$f^*(0,T) = x(T) - g(T) \tag{3.37}$$

dove x e g sono definiti da

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(t) + \theta(t) \\ x(0) = r(0) \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 = \frac{\sigma^2}{2}B^2(0,t) \tag{3.38}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \theta(T) &= \dot{x}(T) + ax(T) = f_T^*(0,T) + \dot{g}(T) + ax(T) \\ &= f_T^*(0,T) + \dot{g}(T) + a\{f^*(0,T) + g(T)\} \end{aligned} \tag{3.39}$$

così abbiamo dimostrato il seguente risultato

Lemma 3.9. *Fissata una curva bond arbitraria $\{p^*(0,T); T > 0\}$ tale che p^* sia due volte differenziabile rispetto a T. Scegliere θ data dall'equazione (3.39) induce una ATS tale che $\forall\ T \geq 0 \quad p(0,T) = p^*(0,T)$.*

Scegliendo θ secondo la (3.39) abbiamo, per una scelta fissata di a e σ, determinato la nostra misura martingala. Ora dovremo calcolare i prezzi bond teorici sotto questa misura martingala, e per fare questo andiamo a sostituire la nostra scelta di θ nell'equazione (3.33). Quindi integriamo e sostituiamo il risultato sia nell'equazione (3.32) che nella (3.29).
Il risultato è il seguente:

Proposizione 3.10. ***(Struttura a termine per Hull-White)***
Considero il modello di Hull-White con a e σ fissati.
Dopo aver invertito la curva dello yield per scegliere θ secondo la (3.39), otteniamo i prezzi bond come

$$p(t,T) = \frac{p^*(0,T)}{p(0,t)} \exp\left\{B(t,T)f^*(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)(1 - e^{-2at}) - B(t,T)r(t)\right\}$$

dove B è dato dalla (3.32).

Capitolo 4

Modelli per il tasso forward

4.1 L'approccio Heath-Jarrow-Morton (HJM)

I modelli per il tasso short hanno:
VANTAGGI:

- specificando r come soluzione di una SDE ci si riconduce ad equazioni alle derivate parziali

- in particolare è possibile ottenere formule analitiche per i prezzi bond e per i derivati

SVANTAGGI:

- non si riesce a caratterizzare l'intera struttura a termine con la sola variabile r_t

- è difficile ottenere una struttura con volatilità realistica per i tassi forward senza introdurre un modello per il tasso short più complicato

- se il modello per il tasso short è più realistico risulta difficile invertire la curva dello yield (ovvero filtrare il modello su dati reali)

Nell'approccio proposto da Heath-Jarrow-Morton (HJM) ([10]) i modelli utilizzano l'intera curva del tasso forward come variabile esplanatoria di tutta la struttura a termine.

Ipotesi 4.1. Assumiamo che, per ogni $T > 0$ fissato, il tasso forward $f(\cdot, T)$ ha un differenziale stocastico che sotto la misura oggettiva P è dato da

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \qquad (4.1) \\ f(0,T) &= f^*(0,T) \qquad (4.2) \end{aligned}$$

dove W è un processo di Wiener (d-dimensionale), mentre $\alpha(\cdot, T)$ e $\sigma(\cdot, T)$ sono processi adattati.

Notiamo che, fissato T l'equazione (4.1) è un'equazione differenziale stocastica nella variabile t, quindi si può pensare a T come un parametro. Inoltre osserviamo che la curva del tasso forward osservata $\{f^*(0,T); T \geq 0\}$ viene usata come condizione iniziale. Questo di conseguenza ci permette di ottenere una corrispondenza perfetta tra i prezzi bond teorici e quelli osservati al tempo $t = 0$, quindi non c'è bisogno di invertire la curva dello yield.

Osservazione 4.1. E' importante osservare che l'approccio HJM non fornisce un modello specifico, come, per esempio, il modello di Vasiček, ma suggerisce un contesto per analizzare i modelli del tasso d'interesse.
I principali modelli del tasso short possono essere equivalentemente formulati in termini di tasso forward, e per ogni modello del tasso forward, il prezzo privo di arbitraggio di un T-derivato χ sarà ancora dato dalla formula

$$\Pi(0;\chi) = E^Q\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}\chi\right]$$

dove il tasso short è dato da $r(s) = f(s,s)$.

Supponiamo ora che siano noti α, σ e $\{f^*(0,T); T \geq 0\}$; allora avremmo specificato l'intera struttura del tasso forward e così, dalla relazione

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\} \qquad (4.3)$$

risulterebbe specificata la struttura a termine $\{p(t,T);\ T > 0,\ 0 \leq t \leq T\}$. Poiché abbiamo d sorgenti random (una per ogni processo di Wiener) e un numero infinito di titoli (un bond per ogni maturità T), esiste il rischio di avere introdotto possibilità di arbitraggio nel mercato bond. Quindi il nostro problema adesso è mettere in relazione α e σ affinché il sistema indotto di prezzi bond non ammetta possibilità di arbitraggio. La risposta è data dalla condizione HJM sul drift enunciata sotto.

Proposizione 4.2. ***(Condizione HJM sul drift)***
Assumiamo che la famiglia di tassi forward è data dalla (4.1) e che il mercato bond è privo di arbitraggio. Allora esiste un processo $\lambda(t)$ tale che

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds - \sigma(t,T)\lambda(t) \tag{4.4}$$

Dimostrazione.

Dalla Proposizione 2.3 abbiamo che le dinamiche bond sono date da

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)dW(t) \tag{4.5}$$

dove

$$\begin{cases} A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds \\ B(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds \end{cases} \tag{4.6}$$

Abbiamo visto che il mercato per i bond è privo di arbitraggio se e solo se esiste un processo $\lambda(t)$ (market price of risk) tale che

$$\frac{\mu(t,T) - r(t)}{\Sigma(t,T)} = \lambda(t) \qquad \forall\, T > 0 \tag{4.7}$$

dove chiamiamo

$$\begin{aligned} \mu(t,T) &= r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2 \\ \Sigma(t,T) &= S(t,T) \end{aligned}$$

Quindi sostituendo le equazioni (4.6) nella (4.7)

$$r_t - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,s)ds\right)^2 - r_t = -\lambda_t \int_t^T \sigma(t,s)ds$$

e derivando rispetto a T abbiamo

$$-\alpha(t,T) + \left(\int_t^T \sigma(t,s)ds\right)\sigma(t,T) = -\lambda(t)\sigma(t,T)$$

In conclusione ricaviamo il risultato desiderato

$$\alpha(t,T) = \left(\int_t^T \sigma(t,s)ds\right)\sigma(t,T) + \lambda(t)\sigma(t,T)$$

□

Nell'approccio HJM si può determinare in modo arbitrario la struttura della volatilità, mentre il drift deve soddisfare la condizione HJM.

4.2 Modelli martingala

Si può pensare di modellizzare il tasso forward direttamente sotto la probabilità martingala Q. Assumiamo che

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t^Q \quad (4.8)$$

$$f(0,T) = f^*(0,T) \quad (4.9)$$

dove W_t^Q è un processo di Wiener sotto la probabilità Q. Poiché una misura martingala fornisce automaticamente prezzi privi di arbitraggio, non abbiamo più un problema di assenza di arbitraggio, ma abbiamo un altro problema. Consideriamo le seguenti formule differenti per i prezzi bond

$$p(0,T) = \exp\left\{-\int_0^T f(0,s)ds\right\}$$

$$p(0,T) = E^Q\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}\right]$$

dove il tasso short r e i tassi forward f sono collegati da $r(t) = f(t,t)$. Poniamo una relazione di consistenza tra α e σ nelle dinamiche del tasso short per far valere queste formule simultaneamente. Il risultato è la condizione HJM sul drift.

Proposizione 4.3. ***(Condizione HJM sul drift)***
Sotto la misura martingala Q, i processi α e σ devono soddisfare la seguente relazione, per ogni t e per ogni $T \geq t$

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds \quad (4.10)$$

Dimostrazione.

Osserviamo che se partiamo modellando direttamente sotto la misura martingala, allora possiamo applicare la Proposizione 4.2 con $\lambda = 0$. Dalla Proposizione 2.3 abbiamo ancora le dinamiche dei prezzi bond

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}dt + p(t,T)S(t,T)dW(t)$$

Sotto la probabilità martingala il tasso locale di ritorno è uguale al tasso short, cioé $\mu(t,T) = r_t$. Quindi abbiamo l'equazione

$$r_t - \int_t^T \alpha(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,s)ds\right)^2 = r_t$$

derivando rispetto a T

$$-\alpha(t,T) + \left(\int_t^T \sigma(t,s)ds\right)\sigma(t,T) = 0$$

otteniamo

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$$

$\square$

Dalla Proposizione 4.3 notiamo che quando specifichiamo le dinamiche del tasso forward (sotto Q) possiamo specificare liberamente la struttura della volatilità. I parametri drift allora sono univocamente determinati.
Un “algoritmo” per l'uso di un modello HJM può essere schematizzato nel seguente modo:

1. Determiniamo in modo arbitrario la volatilità $\sigma(t,T)$

2. I parametri drift dei tassi forward ora sono dati da

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds \tag{4.11}$$

3. Osserviamo la struttura del tasso forward di oggi

$$\{f^*(0,T);\ T \geq 0\}$$

4. Integriamo per ottenere i tassi forward come

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s) \tag{4.12}$$

5. Calcoliamo i prezzi bond usando la formula

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\} \tag{4.13}$$

6. Usiamo i risultati sopra per calcolare i prezzi per i derivati

Ora vediamo un esempio più semplice, che si presenta quando il processo σ è una costante deterministica. Scegliamo $\sigma(t,T) = \sigma$, dove $\sigma > 0$.
Dall'equazione (4.10) ricaviamo il processo drift come

$$\alpha(t,T) = \sigma \int_t^T \sigma ds = \sigma^2(T-t) \tag{4.14}$$

così l'equazione (4.12) diventa

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \sigma^2(T-s)ds + \int_0^t \sigma dW(s) \tag{4.15}$$

cioè

$$f(0,T) = f^*(0,T) + \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma W(t) \tag{4.16}$$

In particolare osserviamo che r è dato come

$$r(t) = f(t,t) = f^*(0,t) + \sigma^2\frac{t^2}{2} + \sigma W(t) \tag{4.17}$$

così le dinamiche del tasso short sono

$$dr(t) = \{f_T(0,t) + \sigma^2 t\}dt + \sigma dW(t), \tag{4.18}$$

Si è ottenuto il modello di Ho-Lee in cui $\Theta(t)$ è stato determinato in modo da filtrare la struttura reale $f^*(0,T)$.

Capitolo 5

Modelli per la struttura a termine HJM a fattore singolo basati sulle dinamiche per il tasso spot Markoviano

Finora la struttura a termine dei tassi d'interesse è stata definita come la relazione tra bond di tutte le maturità, e abbiamo studiato come questa si evolve nel tempo, cioè le dinamiche della struttura a termine.
Un gran numero di modelli a fattore singolo delle dinamiche per la struttura a termine sono state costruite caratterizzando le dinamiche di una singola variabile economica stocastica (il tasso short) che è assunta per guidare le dinamiche della struttura a termine.
La variabile economica stocastica sottostante, che assumiamo essere il tasso spot, è modellata come un processo di Markov. Dall'ipotesi che la struttura a termine al tempo t è una funzione regolare del tasso spot markoviano al tempo t e della maturità abbiamo ottenuto un' equazione alle derivate parziali (PDE) delle dinamiche della struttura a termine.
Tali strutture saranno rivolte a modelli basati sul tasso spot markoviano.
Esempi classici sono il modello di Vasiček (1977) e il modello di CIR (1985). Entrambe queste strutture caratterizzano le dinamiche della struttura a termine specificando il

drift e la volatilità del processo del tasso spot, e il market price of risk. La struttura di Hull-White (1990) è anche un modello basato sul tasso spot markoviano. La differenza in questo approccio è l'uso dell'informazione per caratterizzare le dinamiche della struttura a termine, che evita di specificare il market price of risk e il drift del processo del tasso spot. Il nostro insieme dell'informazione specifica la volatilità del tasso spot e la forma funzionale della stessa struttura a termine iniziale osservata.

Il problema del tasso spot markoviano in un modello HJM è stato studiato per primo da Carverhill (1994, [5]) per il caso della volatilità deterministica, e per il caso della struttura di volatilità dipendente dal tasso spot è stato risolto da Jeffrey (1995, [15]). Il problema più generale in cui un modello HJM definisce il tasso spot in termini di diffusion finito dimensionale markoviano è stato, per vari casi speciali, studiato da Ritchken e Sankarasubramanian (1995, [17]), Cheyette (1996, [6]), Bhar e Chiarella (1997, [1]), Inui e Kijima (1998, [14]), Björk e Gombani (1999, [3]) e Chiarella e Kwon (2001, [7]).

I modelli basati sul tasso spot markoviano sono fondamentalmente differenti dalla struttura HJM in due aspetti. Primo, la struttura HJM non si focalizza sulle dinamiche di una particolare variabile economica, invece i cambiamenti nel tempo dell'intera struttura a termine sono modellati. Questa stuttura permette al tasso spot di essere non-markorviano. Secondo, HJM è diverso dall'insieme informazione usato per caratterizzare le dinamiche della struttura a termine, in particolare HJM specifica la struttura della volatilità e la curva iniziale del tasso forward.

Questa informazione è sufficiente per caratterizzare le dinamiche della struttura a termine senza aver modellato esplicitamente i parametri dipendenti (quali il market price of risk e il drift). Ma allora quali esempi di HJM possono provenire da tali modelli? Un vantaggio nei modelli basati sul tasso spot markoviano è la semplificazione di procedure numeriche per valutare sia la struttura a termine che i derivati del tasso d'interesse.

Questa semplificazione nasce perché *i)* la struttura a termine del tempo t è una funzione di tempo, maturità T e la realizzazione del tasso spot al tempo t, così che la sola variabile stocastica da considerare è il tasso spot e *ii)* un'evoluzione di Markov del tasso spot può essere modellata.

I modelli basati sui tassi spot markoviani hanno generalmente rappresentato le dinamiche della struttura a termine tramite una PDE che coinvolge il market price of risk, il

drift e la volatilità del processo del tasso spot.
Di conseguenza, può una rappresentazione generale PDE delle dinamiche della struttura a termine essere fornita senza coinvolgere il market price of risk e il drift del tasso spot? Da queste analisi, troviamo che le forme funzionali della struttura di volatilità e la curva iniziale del tasso forward non possono essere scelte arbitrariamente, tuttavia forniamo condizioni necessarie e sufficienti che devono essere soddisfatte per permettere una tale struttura.
Queste condizioni indicano: *i)* quali modelli HJM basati sul tasso spot markoviano sono permessi e *ii)* le restrizioni strutturali poste sulla struttura a termine iniziale e la struttura della volatilità quando lavoriamo in un modello basato sul tasso spot markoviano. Presentiamo un'analisi della struttura HJM in un modello basato sul tasso spot markoviano fino alla formulazione delle due condizioni. Consideriamo quindi una classe dei modelli HJM basati sul tasso spot markoviano. Poiché la struttura della volatilità è solo una funzione del tasso spot al tempo t (denotato da r), del tempo corrente t e della maturità del tasso forward T, di conseguenza la denotiamo con $\gamma(r, t, T)$. Per accentuare che il tasso forward per il tempo T dipende dal tasso spot al tempo t e solo dal tempo t, denotiamo il tasso forward $f(t, T)$ con $f(r, t, T)$, ed assumiamo anche che la curva del tasso forward $f(r, t, T)$ è una funzione "regolare" di r, t e T. In un modello basato sul tasso spot markoviano, il processo del tasso spot ha la seguente struttura

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw(t) \tag{5.1}$$

dove

$$r = r(t) = f(r, t, t)$$

$$\mu(r, t) = \gamma(r, t, t)\lambda(r, t) + \left.\frac{\partial f(r, t, T)}{\partial T}\right|_{T=t}$$

$$\sigma(r, t) = \gamma(r, t, t)$$

Poiché è assunto che la curva del tasso forward al tempo t è una funzione regolare di tempo t, maturità T, e tasso spot al tempo t, il Lemma di Itô applicato a $f(r, t, T)$

produce il seguente processo stocastico, che descrive l'evoluzione dei tassi forward,

$$\begin{aligned} df(r,t,T) &= \left[\frac{\partial f(r,t,T)}{\partial r}\mu(r,t) + \frac{\partial f(r,t,T)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(r,t,T)}{\partial r^2}\sigma(r,t)^2\right] dt \\ &+ \frac{\partial f(r,t,T)}{\partial r}\sigma(r,t)dw(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Come sappiamo dai paragrafi precedenti le dinamiche prive di arbitraggio dei tassi forward date nella struttura HJM sono descritte dall'equazione

$$df(r,t,T) = \left\{\gamma(\omega,t,T)\left[\int_t^T \gamma(\omega,t,\nu)d\nu + \lambda(\omega,t)\right]\right\} dt + \gamma(\omega,t,T)dz(t) \tag{5.3}$$

Tuttavia l'equazione (5.3) può rappresentare le stesse dinamiche dell'equazione (5.2). Di conseguenza, le dinamiche della struttura a termine possono essere ottenute uguagliando i coefficienti del drift e della volatilità attraverso queste due equazioni,

$$\begin{aligned} \gamma(r,t,T)\left[\int_t^T \gamma(r,t,\nu)d\nu + \lambda(r,t)\right] &= \frac{\partial f(r,t,T)}{\partial r}\mu(r,t) + \frac{\partial f(r,t,T)}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(r,t,T)}{\partial r^2}\sigma(r,t)^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\gamma(r,t,T) = \frac{\partial f(r,t,T)}{\partial r}\sigma(r,t) \tag{5.5}$$

dove $f(r,t,t) = r$ è la condizione al contorno.
La struttura HJM caratterizza le dinamiche della struttura a termine specificando la struttura della volatilità del tasso forward e la struttura a termine iniziale. Questa informazione è anche sufficiente per risolvere il sistema di equazioni (5.4)-(5.5) per fornire un'unica $f(r,t,T)$, tuttavia la struttura della volatilità e la curva iniziale del tasso forward non possono essere scelti arbitrariamente, per questo forniamo due condizioni necessarie e sufficienti.

Condizione C1. Una struttura di volatilità $\gamma(r,t,T)$ è permessa in un modello basato sul tasso spot markoviano se esiste una coppia di funzioni $\theta(r,t)$ e $h(t,T)$ che soddisfano la seguente equazione,

$$\begin{aligned}\gamma(r,t,T)\int_t^T \gamma(r,t,\nu)d\nu &= \frac{\gamma(r,t,T)}{\gamma(r,t,t)}\theta(r,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^r \frac{\gamma(m,t,T)}{\gamma(m,t,t)}dm\right] \\ &+ h(t,T) + \frac{1}{2}\gamma(r,t,t)^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\gamma(r,t,T)}{\gamma(r,t,t)}\right]\end{aligned}$$

Condizione C2. Data una struttura di volatilità che soddisfa la Condizione C1, la corrispondente curva iniziale del tasso forward deve essere della seguente forma

$$f(r,0,T) = \int_0^r \frac{\gamma(m,0,T)}{\gamma(m,0,0)}dm + k(T)$$

dove $k(T) = -\int_0^T h(s,T)ds$ per ogni $h(t,T)$ valida nella Condizione C1.

La Condizione C2 dimostra che l'insieme delle strutture a termine iniziali permesse dipende dalle scelte per $h(t,T)$ nella Condizione C1. Il seguente teorema parla di questo risultato:

Teorema 5.1. *Sia $\gamma(r,t,T)$ una particolare struttura di volatilità che soddisfa la Condizione C1, e sia $\xi(t,T)$ una funzione deterministica di t e T.*

1. *Se $\gamma(r,t,T)$ non è della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$ allora esiste una sola coppia di funzioni $\theta(r,t)$ e $h(t,T)$ valida per la Condizione C1, perciò $k(T)$ nella Condizione C2 è completamemte definita da $\gamma(r,t,T)$.*

2. *Se $\gamma(r,t,T)$ è della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$ allora l'insieme delle coppie di funzioni $\theta(r,t)$ e $h(t,T)$ valide per la Condizione C1 è*

$$\begin{aligned}\theta(r,t) &= -\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r \frac{\gamma(m,t,T)}{\gamma(m,t,t)}dm\right]\Bigg|_{T=t} - c(t) \\ h(t,T) &= \xi(t,T)\left(c(t) - h_p(t,t)\right) + h_p(t,T)\end{aligned}$$

dove $h_p(t,T)$ rappresenta ogni particolare $h(t,T)$ valida per la Condizione C1 e $c(t)$ è una funzione arbitraria. Inoltre, per la Condizione C2, ogni funzione arbitraria $k(T)$ dove $k(0) = 0$ può essere ottenuta da un'unica scelta di $c(t)$.

Il Teorema 1 fornisce due importanti risultati. Primo, per una data volatilità $\gamma(r,t,T)$, non della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$, la struttura di volatilità determina univocamente la struttura a termine iniziale grazie alla Condizione C2. Questo risultato implica che una struttura di volatilità così fatta è sufficiente per risolvere univocamente $f(r,t,T)$ nel sistema di equazioni (5.4)-(5.5). Secondo, per una data volatilità $\gamma(r,t,T)$ della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$, $k(T)$ nella Condizione C2 può essere scelta per corrispondere a ogni struttura a termine iniziale osservata che è una volta differenziabile nella maturità.
Assumendo che sono soddisfatte le Condizioni C1 e C2, una rappresentazione delle dinamiche della struttura a termine risultante dalla soluzione del sistema di equazioni (5.4)-(5.5), in termini di struttura di volatilità e della curva iniziale del tasso forward, è

$$\begin{aligned} f(r,t,T) &= -\int_0^t \frac{\gamma(r,s,T)}{\gamma(r,s,s)}\theta(r,s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma(r,s,s)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\gamma(r,s,T)}{\gamma(r,s,s)}\right] ds \\ &+ \int_0^t \gamma(r,s,T)\left[\int_t^T \gamma(r,s,\nu)d\nu\right] ds + f(r,0,T) \qquad (5.6) \end{aligned}$$

Il Teorema 1 indica che se la struttura della volatilità non è della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$, allora $\theta(r,t)$ e $f(r,0,T)$ possono essere determinati dalla specificazione della struttura della volatilità direttamente grazie alle Condizioni C1 e C2.
Altrimenti, se la struttura di volatilità è della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$ allora scegliamo $k(T)$ nella Condizione C2 adattando la curva iniziale del tasso forward e quindi $\theta(r,t)$ può essere determinata dalla seguente equazione

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\gamma(r,s,t)}{\gamma(r,s,s)}\theta(r,s)ds &= f(r,0,t) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma(r,s,s)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\gamma(r,s,t)}{\gamma(r,s,s)}\right] ds \\ &+ \int_0^t \gamma(r,s,t)\left[\int_s^t \gamma(r,s,\nu)\right] ds - r \qquad (5.7) \end{aligned}$$

5.1 Una struttura di volatilità della forma $\gamma(r,t,T) = \xi(t,T)\gamma(r,t,t)$

Questo esempio fornisce una classe di modelli HJM basata sul tasso spot markoviano, dove la volatilità è della forma $\gamma(r,t,T) = \xi(t,T)\gamma(r,t,t)$.

Questo paragrafo mostra che questa classe di modelli è l'unica classe che ha la proprietà di adattarsi ad ogni struttura a termine iniziale osservata data la volatilità. Prima di tutto per determinare la forma permessa per $\theta(r,t)$, valutiamo la Condizione C1 con $T = t$

$$\theta(r,t) = -\left(\left.\frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t}\right|_{T=t} \right) r - h(t,t)$$

Sostituendo nella Condizione C1, $\gamma(r,t,T) = \xi(t,T)\gamma(r,t,t)$ e $\theta(r,t)$, otteniamo la seguente equazione, che deve valere per le strutture di volatilità permesse,

$$\begin{aligned} \gamma(r,t,t)^2\xi(t,T) \int_t^T \xi(t,\nu)d\nu &= \xi(t,T)\left[\left(-\left.\frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t}\right|_{T=t} \right) r - h(t,t)\right] \\ &+ \frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t} r + h(t,T) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Questa equazione può avere soluzioni solo se la volatilità del tasso spot è della forma

$$\gamma(r,t,t)^2 = a(t)r + b(t) \tag{5.9}$$

Quindi sostituendo la (5.9) nella (5.8) otteniamo

$$[a(t)r + b(t)]\xi(t,T) \textstyle\int_t^T \xi(t,\nu)d\nu =$$

$$-\xi(t,T)\left(\left.\frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t}\right|_{T=t} \right) r - \xi(t,T)h(t,t) + \frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t} r + h(t,T)$$

$$b(t)\xi(t,T) \textstyle\int_t^T \xi(t,\nu)d\nu - \xi(t,T)h(t,t) - h(t,T) +$$

$$+\left[a(t)\xi(t,T) \textstyle\int_t^T \xi(t,\nu)d\nu + \xi(t,T)\left(\left.\frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t}\right|_{T=t} \right) - \frac{\partial \xi(t,T)}{\partial t}\right] r = 0$$

Di conseguenza, devono essere soddisfatte le seguenti due equazioni.
Primo,

$$b(t)\xi(t,T) \int_t^T \xi(t,\nu)d\nu + \xi(t,T)h(t,t) = h(t,T)$$

Notando $\xi(t,T) = \dfrac{\gamma(r,t,T)}{\gamma(r,t,t)}$ implica che $\xi(t,t) = 1$, esiste sempre un $h(t,T)$ per ciascuna scelta arbitraria di $h(t,t)$ che assicura che questa equazione valga. Secondo,

$$a(t)\xi(t,T)\int_t^T \xi(t,\nu)d\nu + \xi(t,T)\left(\frac{\partial\xi(t,T)}{\partial t}\bigg|_{T=t}\right) = \frac{\partial\xi(t,T)}{\partial t} \tag{5.10}$$

La soluzione a questa equazione ha bisogno di essere considerata sotto due casi, cioé quando $a(t) = 0$ e $a(t) \neq 0$.

CASO 1 $a(t) = 0$

In questo caso la volatilità è deterministica e della forma $\xi(t,T)\sqrt{b(t)}$.
Tale struttura implica anche che $b(t)$ è non negativa. Per convenienza, sia la struttura di volatilità $\gamma(r,t,T)$ denotata da $\gamma(t,T)$ e $\gamma(t,t) = \sigma(t)$.
Risolvendo l'equazione (5.10) quando $a(t) = 0$ mostriamo che la struttura di volatilità deve essere della seguente forma funzionale,

$$\gamma(t,T) = \sigma(t)e^{\zeta(T)-\zeta(t)} \tag{5.11}$$

per $\sigma(t)$ e $\zeta(t)$ funzioni arbitrarie.
Dalle equazioni (5.6), (5.11), dalla Condizione C2, e dal Teorema 1, il modello della dinamica della struttura a termine è

$$\begin{aligned} f(r,t,T) &= -e^{\zeta(T)}\int_0^t e^{-\zeta(s)}\theta(r,s)ds + \int_0^t \theta(s)^2 e^{\zeta(T)-\zeta(s)}\int_s^T e^{\zeta(\nu)-\zeta(s)}d\nu ds \\ &+ re^{\zeta(T)-\zeta(0)} + k(T), \end{aligned}$$

dove $k(0) = 0$ e $k(T)$ può essere scelto per assicurare un'esatta corrispondenza alla struttura a termine iniziale osservata. Inoltre, dall'equazione (5.7) e dalla Condizione C2,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\zeta(s)}\theta(r,s)ds &= e^{-\zeta(t)}\left[\int_0^t \theta(s)^2 e^{\zeta(t)-\zeta(s)}\int_s^t e^{-\zeta(\nu)-\zeta(s)}d\nu ds\right. \\ &- \left. r + re^{\zeta(t)-\zeta(0)} + k(t)\right] \end{aligned}$$

Semplificando, il modello della struttura a termine diventa

$$f(r,t,T) = e^{\zeta(T)}\int_t^T e^{\zeta(\nu)}d\nu\int_0^t \theta(s)^2 e^{-2\zeta(s)}ds + (r-k(t))e^{\zeta(T)-\zeta(t)} + k(T), \tag{5.12}$$

dove $k(0) = 0$. Riassumendo, mostriamo che ogni struttura di volatilità del tasso forward che è esclusivamente una funzione di tempo t e maturità T può presentarsi solo in un modello basato sul tasso spot markoviano se è della forma data nell'equazione (5.11). Il modello della struttura a termine corrispondente è data nell'equazione (5.12) dove $k(T)$ è scelta per corrispondere all'attuale struttura a termine iniziale osservata.

CASO 2 $\quad a(t) \neq 0$

In questo caso la struttura di volatilità del tasso forward è dipendente dal tasso spot stocastico. Per convenienza, denotiamo $\gamma(r,t,t)$ da $\sigma(r,t)$ e dall'equazione (5.9) $\sigma(r,t)^2 = a(t)r + b(t)$; di conseguenza, è necessario che $a(t)r + b(t) \geq 0$. Questa restrizione indica le seguenti regioni per cui il tasso spot può esistere:

1. se $a(t) < 0$, il tasso spot deve essere nella regione $r \leq \dfrac{b(t)}{a(t)}$
2. se $a(t) > 0$, il tasso spot deve essere nella regione $r \geq \dfrac{b(t)}{a(t)}$

Modellando le dinamiche di una particolare struttura a termine è più ragionevole considerare per i tassi spot la seconda regione piuttosto che la prima, poiché nella seconda è definito un limite inferiore per il tasso spot invece di un limite superiore come nel caso di $a(t) < 0$.

Risolvendo l'equazione (5.10) mostriamo che la struttura di volatilità del tasso forward deve avere la seguente forma funzionale

$$\gamma(r,t,T) = \frac{2A(T)(C'(t) - A(t))\sqrt{a(t)r + b(t)}}{a(t)\left(\int_t^T A(s)ds + C(t)\right)^2} \tag{5.13}$$

per un $C(t)$ funzione arbitraria dove

$$A(t) = \frac{C'(t) \pm \sqrt{C'(t)^2 - 2a(t)C(t)^2}}{2}$$

$C'(t)^2 \geq 2a(t)C(t)^2$; e $C'(t)$ rappresenta $\dfrac{dC(t)}{dt}$.

Ora che la classe delle strutture di volatilità permesse è stata determinata, la Condizione

C2 e il Teorema 1 affermano che la curva iniziale del tasso forward deve essere della forma

$$f(r,0,T)=\frac{2A(T)(C'(0)-A(0))}{a(0)\left(\int_0^T A(s)ds+C(0)\right)^2}r+K(T)$$

dove $K(0)=0$ e $k(T)$ può essere scelto per assicurare un'esatta corrispondenza con la struttura a termine iniziale osservata.

In conclusione, mostriamo che ogni struttura di volatilità del tasso forward che è della forma $\xi(t,T)\gamma(r,t,t)$ può presentarsi in un modello basato sul tasso spot markoviano solo se è della forma data dall'equazione (5.13).

5.2 Un trattamento analitico

Il nostro scopo è fornire soluzioni analitiche al problema della valutazione del prezzo del bond nella classe dei modelli HJM a fattore singolo con tasso spot markoviano e volatilità stocastica che soddisfa la condizione di Jeffrey (studiate da Mari in [16]). Denotiamo con

$$P(r(t),t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(r(t),t,u)du\right) \tag{5.14}$$

il prezzo al tempo t di un bond che matura al tempo T, con $f(r(t),t,T)$ la curva del tasso forward, e con $r(t)=f(r(t),t,t)$ il tasso spot.

Sotto la misura neutrale al rischio, le dinamiche stocastiche della struttura a termine possono essere espresse nella forma

$$\begin{aligned}&\frac{dP}{P}(r(t),t,T)=r(t)dt-\sigma_p(r(t),t,T)dw(t)\\&P(r(0),0,T)=P^*(0,T)\end{aligned} \tag{5.15}$$

dove $P^*(0,T)$ è la struttura a termine iniziale che stimiamo per i dati del mercato e $\sigma_p(r(t),t,T)$ è la struttura della volatilità; e $w(t)$ è un moto Brownia-
no standard unidimensionale. Possiamo usare l'equazione (5.14) e il lemma di Itô per ottenere

$$df(r(t),t,T)=\sigma(r(t),t,T)\sigma_p(r(t),t,T)dt+\sigma(r(t),t,T)dw(t)$$

dove

$$\sigma(r(t), t, T) = \frac{\partial \sigma_p(r(t), t, T)}{\partial T}$$

Consideriamo le seguenti ipotesi:

(i) $P(r(t), t, T)$, o equivalentemente $f(r(t), t, T)$, sono funzioni regolari dei loro argomenti, e $P^*(0, T)$ è una funzione regolare di maturità T;

(ii) la struttura di volatilità del tasso forward $\sigma(r(t), t, T)$ soddisfa la condizione di Jeffrey

$$\sigma(r(t), t, T) = \sigma(r(t), t)\xi(t, T)$$

dove

$$\sigma^2(r, t) = h(t) + k(t)r$$

è il coefficiente diffusion delle dinamiche del tasso spot, e $h(t), k(t)$ sono funzioni arbitrarie di tempo, e

$$\xi(t, T) = \frac{2A(T)(C'(t) - A(t))}{k(t)\left(\int_t^T A(u)du + C(t)\right)^2}$$

con

$$A(t) = \frac{1}{2}\left(C'(t) \pm \sqrt{C'^2(t) - 2k(t)C^2(t)}\right)$$

e $C(t)$ una funzione arbitraria di tempo tale che $C'^2(t) \geq 2k(t)C^2(t)$.

Sotto tali ipotesi, è stato mostrato (ad es. da Jeffrey (1995), [15]) che questo modello è consistente con ogni struttura a termine iniziale e che il tasso spot segue un processo di Markov in cui sia il coefficiente drift che diffusion sono funzioni affini del tasso spot,

$$dr(t) = [a(t) - b(t)r(t)]dt + \sqrt{h(t) + k(t)r(t)}dw(t) \tag{5.16}$$

dove

$$b(t) = \left.\frac{\partial \xi(t, T)}{\partial t}\right|_{T=t}$$

e $a(t)$ è una funzione di tempo che stimiamo per la struttura a termine iniziale dei tassi d'interesse. Dentro questo contesto, un modello stocastico della struttura a termine può essere costruito specificando la funzione iniziale $P^*(0, T)$, e tre funzioni arbitrarie di tempo, h, k, C, per stimare la struttura di volatilità. La maggior parte dei modelli a fattore singolo della struttura a termine proposti nella letteratura appartengono a questa

classe.
I modelli Gaussiani possono essere ottenuti nel limite $k(t) = 0$; il modello esteso di CIR può essere ottenuto se scegliamo $h(t) = 0$, $k(t) = k$ e $C(t) = e^{dt}$, dove k e d sono costanti. Partendo da queste considerazioni, estendiamo le analisi in due direzioni principali. Primo, forniamo soluzioni al problema di Cauchy (5.15) quando la condizione di Jeffrey sulla volatilità del tasso forward è soddisfatta, derivando così una formula per la valutazione del bond (vedi Teorema 5.2), che può essere molto utile per le applicazioni.
Una tale formula dipende dalla soluzione di un'equazione integrale associata di Volterra del primo tipo. Secondo, forniamo la soluzione dell'equazione di Volterra usando una tecnica di perturbazione nella classe dei modelli della struttura a termine caratterizzata dalla volatilità del CIR generalizzato.
Come conseguenza della valutazione del bond, le dinamiche del tasso spot possono essere ottenute facilmente (vedi Corollario 5.3). In particolare sarà mostrato che $a(t)$ è completamente descritto dalla struttura a termine iniziale e dalla soluzione dell'equazione di Volterra.
L'espressione analitica delle dinamiche del tasso spot semplifica la valutazione dei derivati del tasso d'interesse nel senso che, sotto l'ipotesi markoviana, possiamo usare una rappresentazione PDE dei prezzi.

5.3 La forma funzionale della struttura a termine

Lo scopo di questa sezione è fornire una caratterizzazione dei prezzi bond nella classe di modelli della struttura a termine descritta sopra. Forniamo la soluzione del seguente problema:

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{P}(r(t), t, T) = r(t)dt - \sigma_p(r(t), t, T)dw(t) \\ &P(r(0), 0, T) = P^*(0, T) \end{aligned} \tag{5.17}$$

dove la struttura di volatilità del bond $\sigma_p(r(t), t, T)$ soddisfa la seguente condizione (*) (che può essere facilmente ottenuta dalla condizione di Jeffrey).

Condizione (*)

$$\sigma_p(r(t),t,T) = \int_t^T \sigma(r(t),t,u)du = \sigma(r(t),t)B(t,T)$$

dove

$$B(t,T) = 2\frac{C'(t) - A(t)}{k(t)} \left[\frac{1}{C(t)} - \frac{1}{\int_t^T A(u)du + C(t)} \right]$$

e

$$\sigma^2(r,t) = h(t) + k(t)r.$$

La soluzione del problema (5.9) può essere espressa nella forma

$$P(r(t),t,T) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)} \tag{5.18}$$

dove la funzione non nota $A(t,T)$ deve essere consistente con la struttura a termine iniziale $P^*(0,T)$ e deve soddisfare la seguente equazione differenziale

$$\frac{d \ln A(t,T)}{dt} = a(t)B(t,T) - \frac{1}{2}h(t)B^2(t,T)$$

dove

$$a(t) = -\left.\frac{\partial^2 \ln A(t,T)}{\partial T^2}\right|_{T=t}$$

con la condizione al contorno $A(T,T) = 1$.
Forniamo la soluzione dell'equazione differenziale sopra soggetta a tutte le ipotesi citate, derivando così una formula della valutazione del bond che può essere molto utile per la applicazioni.

Teorema 5.2. *Se la struttura di volatilità del bond soddisfa la Condizione (*), allora la soluzione del problema di Cauchy (5.9) è data da*

$$\begin{aligned} P(r(t),t,T) &= \frac{P^*(0,T)}{P^*(0,t)} \exp\left[f^*(0,t)B(t,T) - \int_0^t H(u)B(u,T)du \right. \\ &- \left. \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(f^*(0,u),u)B^2(u,T)du \right] e^{-r(t)B(t,T)} \end{aligned} \tag{5.19}$$

dove $H(t)$ è la soluzione della seguente equazione integrale di Volterra del primo tipo

$$\int_0^t H(u)B(u,t)du = G(t) \tag{5.20}$$

con

$$G(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(f^*(0,u),u)B^2(u,t)du \tag{5.21}$$

e $f^*(0,T)$ *è la curva iniziale del tasso forward.*

Inoltre, come conseguenza del Teorema 5.2, le dinamiche del tasso spot sono esplicitamente derivate.

Corollario 5.3. *Le dinamiche del tasso spot sono descritte da*

$$dr(t) = [a(t) - b(t)r(t)]dt + \sqrt{h(t) + k(t)r(t)}dw(t)$$

dove

$$a(t) = \frac{\partial f^*(0,t)}{\partial t} + b(t)f^*(0,t) - H(t) \tag{5.22}$$

$$b(t) = -\left.\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial T^2}\right|_{T=t}$$

Le dinamiche del tasso spot confermano il fatto ben noto che, per rendere il modello consistente con ogni struttura a termine iniziale, il coefficiente drift non può essere indipendente dal tempo. Questo risultato generalizza quelli ottenuti da Hull-White nel caso del modello esteso di Vasiček e del modello esteso di CIR. Per adattarsi a ogni struttura a termine osservabile, il termine drift non può essere arbitrario, ma deve dipendere dalla struttura a termine iniziale come specificato nella (5.22). Inoltre, poiché $H(t)$ dipende in generale dalla struttura a termine iniziale, $a(t)$ è fortemente legata ai dati del mercato. Tuttavia nella classe di modelli Gaussiani in cui $H(t)$ non dipende dai dati iniziali, $a(t)$ dipende da $f^*(0,t)$ a causa del primo dei due termini nella (5.22). I termini restanti nelle dinamiche del tasso spot dipendono dalla stuttura di volatilità del modello.

5.4 La struttura di volatilità di un modello CIR generalizzato

Presentiamo un esempio significativo dei modelli della struttura a termine in cui possono essere trovate soluzioni esatte dell'equazione di Volterra.

Il modello è caratterizzato dalla struttura di volatilità di un CIR generalizzato se

$$\sigma^2(r(t),t) = h + kr(t) \tag{5.23}$$

$$C(t) = e^{dt} \qquad d^2 \geq 2k \tag{5.24}$$

dove h, k e d sono assunti costanti.

La definizione è motivata dal fatto che, se sostituiamo la (5.24) nella Condizione (*), otteniamo, come nel modello CIR,

$$B(t,T) = \frac{e^{d(T-t)} - 1}{\phi\left[e^{d(T-t)} - 1\right] + d}$$

dove

$$\phi = \frac{1}{2}\left[d + \sqrt{d^2 - 2k}\right]$$

Sotto l'assunzione della volatilità di un CIR generalizzato, le dinamiche del tasso spot sono date da

$$dr(t) = [a(t) - (2\phi - d)r(t)]dt + \sqrt{h + kr(t)}dw(t)$$

dove

$$a(t) = \frac{\partial f^*(0,t)}{\partial t} + (2\phi - d)f^*(0,t) - H(t)$$

Il parametro di mean reversion, $2\phi - d$, è costante e coincide con il parametro mean reversion del CIR; il termine deterministico $a(t)$ è responsabile della struttura a termine iniziale. Nel modello CIR, $h = 0$, e la funzione iniziale è data da

$$f^*(0,T) = \nu\phi\left[\frac{de^{dT}}{\phi(e^{dT} - 1) + d} - 1\right] + r(0)\left[\frac{de^{dT/2}}{\phi(e^{dT} - 1) + d}\right]^2$$

dove ν è un terzo parametro.

In questo caso l'equazione di Volterra può essere risolta esattamente e quindi la soluzione è

$$H(t) = \frac{\partial f^*(0,t)}{\partial t} + (2\phi - d)f^*(0,t) - \nu\phi(d - \phi)$$

E' interessante anche il limite gaussiano del modello specificato dalle equazioni (5.23)-(5.24). Infatti, se mettiamo $k = 0$ e $h = \sigma^2$, la struttura di volatilità del bond diventa

$$\sigma_p(t,T) = \sigma B_v(t,T)$$

dove

$$B_v(t,T) = \frac{1}{d}\left[1 - e^{-d(T-t)}\right] \tag{5.25}$$

E' immediato verificare che $\sigma_p(t,T)$ coincide con la struttura di volatilità dl modello di Vasiček. In un tale caso possiamo trovare l'esatta soluzione dell'equazione di Volterra, vale a dire

$$H(t) = \frac{\sigma^2}{2d}\left(e^{-2dT} - 1\right) \tag{5.26}$$

Se la struttura iniziale è scelta secondo

$$f^*(0,T) = \theta\left(1 - e^{-dT}\right) + \frac{\sigma^2}{2d^2}\left(e^{-dT} - e^{-2dT}\right) + r(0)e^{-dT}$$

dove θ è un terzo parametro, allora ritroviamo il modello di Vasiček.

Appendice A

Richiami di probabilità

Indichiamo con Ω un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle parti di Ω ossia la famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω.

Definizione A.1. (**σ-algebra**) Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, si dice una σ-algebra se:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. se $A \in \mathcal{F}$ allora $A^c \equiv (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. data una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$ si ha che $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Esempio A.1. (σ-algebra di Borel) La più piccola σ-algebra generata dagli aperti di $\mathbb{R}^N$ è chiamata **σ-algebra dei Borelliani**.

Una coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ dove Ω è uno spazio ed $\mathcal{F}$ una σ-algebra si dice *spazio probabilizzabile.*

Definizione A.2. (Misura di probabilità) Data una σ-algebra $\mathcal{F}$ su Ω, si dice **misura di probabilità** un'applicazione $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ tale che:

1. $P(\emptyset) = 0$

2. per ogni successione $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ di elementi di $\mathcal{F}$ a due a due disgiunti vale
$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$
3. $P(\Omega) = 1$

Definizione A.3. (Spazio di probabilità) Una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $\mathcal{F}$ σ-algebra su Ω e P misura di probabilità su $\mathcal{F}$, si dice **spazio di probabilità**.

L'insieme Ω è detto *spazio campione* o spazio dei risultati, gli elementi E di $\mathcal{F}$ sono chiamati *eventi* e $P(E)$ è chiamata *probabilità dell'evento* E.
In particolare, un evento $E \in \mathcal{F}$ si dice *impossibile* (rispettivamente *certo*) se $P(E) = 0 \quad (P(E) = 1)$.

Definizione A.4. (Variabile aleatoria) Si dice **variabile aleatoria reale** un'applicazione $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dove X è un'applicazione misurabile rispetto ai borelliani ed a $\mathcal{F}$, ovvero tale che
$$\forall\ A \in \mathcal{F} \qquad X^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Notazione: essendo $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$, si usa scrivere $P(X \in A)$ per indicare $P(X^{-1}(A))$. Dunque
$$P^X(A) = P(X \in A),$$
indica la "probabilità che la variabile aleatoria reale X appartenga ad $A \in \mathcal{B}$".
Notazione: per indicare che una variabile aleatoria reale X ha distribuzione P^X scriveremo $X \sim P^X$.

Definizione A.5. (Funzione di distribuzione) Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La funzione $\varphi^X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita da
$$\varphi^X(y) = P(X \leq y) = P(X^{-1}(]-\infty, y]))$$
è detta **funzione di distribuzione** di X.

Uno dei concetti fondamentali associati a una variabile aleatoria reale X è quello di valore atteso (o media) definito come una media dei valori assunti da X.

Definizione A.6. Data una variabile aleatoria reale $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sommabile, il vettore di $\mathbb{R}^N$

$$E(X) \equiv \int_{\Omega} X dP$$

si dice **valore atteso** di X.

Definizione A.7. Data X variabile aleatoria reale su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce **varianza** di X

$$var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

La varianza fornisce una stima di quanto X si discosta in media dal valore atteso. Nelle applicazioni finanziarie, pensando che una variabile aleatoria reale X descriva il prezzo di un titolo e che una σ-algebra $\mathcal{G}$ descriva un insieme di informazioni, è comprensibile che sia importante definire il *valore atteso di* X *condizionato a* $\mathcal{G}$, indicato con $E(X \mid \mathcal{G})$.

Definizione A.8. Sia X una variabile aleatoria reale sommabile sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e sia $\mathcal{G}$ una σ-algebra contenuta in $\mathcal{F}$. Se Y è una variabile aleatoria reale tale che

1. Y è $\mathcal{G}$-misurabile
2. $\int_A X dP = \int_A Y dP \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}$

allora si dice che Y è l'attesa di X condizionata a $\mathcal{G}$ e si scrive $Y = E(X \mid \mathcal{G})$.

Bibliografia

[1] R. Bhar and C. Chiarella. Transformation of Heath-Jarrow-Morton Models to Markovian Systems. *European Journal of Finance*, 3:1–24, 1997.

[2] T. Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Second edition, Oxford University Press, 2004.

[3] T. Björk and A. Gombani. Minimal Realization of Interest Rate Models. *Finance and Stochastics*, 3(4):413–432, 1999.

[4] F. Black, E. Derman, and W. Toy. A One-Factor Model of Interest Rates and its Application Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, Jan-Feb:33–39, 1990.

[5] A. Carverhill. When is the spot rate Markovian? *Mathematical Finance*, 4:305–312, 1994.

[6] O. Cheyette. *Markov rappresentation of the Heath-Jarrow-Morton Model*. Preprint. BARRA Inc., 1996.

[7] C. Chiarella and K. Kwon. Forward rate dependent Markovian transformations of the Heath-Jarrow-Morton term structure model. *Finance and Stochastics*, 5:237–257, 2001.

[8] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53:385–408, 1985b.

[9] M. Dothan. On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6:59–69, 1978.

[10] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 60:77–106, 1992.

[11] T. Ho and S. Lee. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, 41:1011–1029, 1986.

[12] J. Hull and A. White. Pricing Interest-Rate Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3:573–592, 1990.

[13] J.C. Hull. *Opzioni futures e altri derivati.* Prentice-Hall International, 2000.

[14] K. Inui and M. Kijima. A markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33:423–440, 1998.

[15] A. Jeffrey. Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(4):619–642, 1995.

[16] C. Mari. Single factor models with Markovian spot interest rate: an analitical treatment. *Decisions in Economics and Finance*, 26:39–52, 2003.

[17] P. Ritchken and L. Sankarasubramanian. Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure. *Mathematical Finance*, 5:55–72, 1995.

[18] O. Vasiček. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.

Ringraziamenti

Finalmente sono qui a scrivere questi benedetti ringraziamenti richiesti da molti (soprattutto dalla Mary Catta).
Bene come anticipato mi sono ridotta due notti prima della tesi a scriverli, quindi spero che non ci siano troppi strafalcioni.

Prima di tutto, ringrazio il professor **Andrea Pascucci**, per la sua disponibilità e la sua pazienza, e per avermi sempre rilanciato nei momenti in cui pensavo di non farcela. Un grazie anche alla **Camilla**, che ha avuto sempre una grande premura per me e si è sempre fatta in quattro per essere d'aiuto in ogni circostanza, all'**Elena**, per i suoi grandi occhioni dolci e per chiedermi di leggere una storia almeno cinque volte e al piccolo **Giovanni**, che ormai è diventato grande e corre a destra e a sinistra.

Ringrazio la mia famiglia, per come mi ha sempre sostenuto in questi anni di università e per tutto l'affetto che mi ha sempre donato. Innanzitutto sono immensamente grata ai miei genitori, a mia mamma **Antonella**, per le continue telefonate, per la sua forza d'animo e il suo amore che è sempre stata capace di trasmettermi anche a chilometri di distanza, a mio babbo **Giorgio**, per la sua essenzialità e la sua schiettezza e per il suo amore che mi ha sempre dimostrato a modo suo; perchè sono ad entrambi grata del sacrificio economico che hanno fatto per far sì che potessi finire gli studi e per non avermi fatto mai mancare nulla. A mia sorella **Claudia**, (sì lo so molti di voi non sanno neanche la sua esistenza!), per il rapporto amore-odio che c'è sempre stato fra di noi, grazie perchè nonostante tutto mi hai saputo sopportare bene, e perchè anche se non ce lo diciamo quasi mai ci vogliamo un gran bene, un grazie va anche al mio fratellino

Vittorio, per tutte le sue letterine e telefonate, per tutti i fine settimana a casa passati davanti alle videocassette della Walt Disney...grazie perchè anche se non ci vediamo poco tu mi vuoi un mondo di bene!! Poi non posso non ringraziare la mia fantastica **nonna Lidia**, per tutte le cose buone che mi cucina quando torno giù, mia **zia Rossana**, perchè appena c'è un attimo siamo lì a chiacchierare e per i suoi squilli per dirmi che mi pensa!, mio zio Peppe e i miei cugini **Federico, Davide** e **Mario**, il bambino più buono e dolce che ci sia. E poi un grazie infinito anche a **zia Dora** e **zio Edo**, e alle mie cugine **Emanuela, Lorena** ed **Eleonora**, perchè loro per me sono come sorelle, ai loro mariti, **Reno, Alfredo** e **Luca** e ai loro rispettivi bambini (loro sono i cuginetti con cui io mi diverto tanto): *Cristina, Martina, Alessia, Francesco* e l'ultima arrivata *Federica*...grazie anche a mia **zia Lina** e **zio Pino**, e alle mie cugine **Rossella** e **Alessandra**. Infine ringrazio il mio fratellino **Emanuele**, i miei **nonni Vittorio** e **Derna**, e mio **nonno Mario** perchè da lassù mi proteggono continuamente.

Un grazie infinito a **don Giussani**, che anche se non ho mai conosciuto, non posso che essergli grata di come mi ha educato a vivere intensamente la realtà, a **don Carlo**, grazie della paternità che ho sentito da subito stando con te, di come mi incoraggi sempre ad affrontare le situazioni e grazie perchè è evidente che siamo così amici in Cristo non per un nostro merito, ma perchè siamo stati scelti. A **Widmer**, grazie per lo sguardo certo e pieno d'amore che hai su di me e grazie a tutta la tua famiglia: la **Raffa**, per come mi ha accolto nella sua casa, **Tommy**, per le barzellette di Topolino ch mi racconti sempre divertito, e per aver tentato di insegnarmi a giocare alla play e a **Giacomo**, per le mille pennellate con gli acquerelli, e perchè quando giochiamo insieme ci divertiamo un casino. Grazie alla fam. Rondoni, a **Davide** e all'**Alessia**, per come si sono sempre interessati a me e per avermi invitato a pranzo il giorno di Pasqua, **Barty**, il più obbediente, **Carlotta**, la più dolce, **Battista**, il più bizzarro e **Clemente**, il più buffo.

Adesso è arrivato il momento di ringraziare chi veramente ni ha sopportato giorno per giorno, ora dopo ora in questi anni...sto parlando della mia mitica **facoltà di Scienze**. Un ringraziamento che faccio a tutti , uno per uno, è per come mi hanno sostenuto tecnicamente e moralmente nei mesi più di strippo..grazie per come siete stati pazienti nel comprendere il mio stato d'animo e grazie perchè nel momento dello sfogo non ero mai sola , mi sono sentita sempre unita a tutti voi anche quando non eravamo in 40 nella stessa stanza! e per questo vi ringrazio di cuore!

Ringrazio **Mondo**, per il tuo modo di andare subito al sodo delle questioni e per avermi semre spronato a domandare, **Brio**, grazie perchè sei stato il volto con cui Cristo ha scelto di rivelarsi a me e l'incontro con te mi ha decisamente cambiato la vita, grazie perchè se non ci fossi stato tu io ora non sarei qui a scrivere qs ringraziamenti, per essere stato un punto di giudizio su tutto, per avere avuto sempre una grande stima di me, sia nello studio che nella proposta della segreteria e per avere avuto sempre cinque minuti per me, **Mattia**, il capo-facoltà più matto e più fantasioso nell'inventare i giochi, grazie per la tua presenza, **Isacco**, grazie per l'amicizia non scontata che mi hai offerto e per la stima che ho sentito su di me fin da subito, e grazie a **Bisca**, è eccezionale l'amore con cui mi tratti e la preoccupazione che hai del mio destino, grazie di tutto!!

Ringrazio chi con me ha condiviso le aule del dipartimento di Matematica: l'Anna Pulci e la ChiaraF, grazie per come mi siete state vicine soprattutto in questi mesi di tesi, per avermi anche solo fermato per chiedermi come stavo, grazie **Anna Pulci** per la tua spontaneità e voglia di ripartire che travolge tutto e tutti, e grazie **ChiaraF** (lo so che non sopporti quando ti chiamo Cif) perchè sei sempre stata un esempio nello studio..io non ce l'ho mai fatta a stare zitta più di mezz'ora!; la Cri e l'Anna Del, le mie due fantastiche compagne di corso con cui ho passato qs anni di università, le quali hanno osato laurearsi prima di me...ma vabbene, sorvoliamo su qs cosa! grazie alla **Cri**, perchè anche se non ci vediamo quasi mai c'è qualcosa che non diminuisce con il tempo,e poi sempre la solita CIAMBOTTA (la numero uno!), grazie all'**Anna Del**, per avermi trascinato ai mille pranzi matricole con Brio, per le sue storie fantastiche del fine settimana, per i suoi balletti in casa e per il suo incredibile riuscire a fare mille cose bene in contemporanea, l'**Antonella**, appena conosciuta non mi stavi molto simpatica (anzi!) però superato l'impatto iniziale, abbastanza traumatico, è venuto fuori quello che sei veramente...una grande donna di polso, sempre presente nel momento del bisogno, la **Fra Deserti**, per avermi aiutato a fare il piano di studio e per i mille consigli sugli esami, ora sei il nostro orgoglio in America, la **Maddy**, grazie per aver condiviso con me quest'avventura della tesi, e per la calma con cui hai saputo placare tutti i miei strippi, **Micky**, per il tuo cambiamento in atto,e per i nostri fantastici giri dai prof, l'**Elisa**, per tutte le nostre chiaccherate e per il tuo affetto prorompente, e **Nicola**,(oaic!) il vero matematico doc.

Ringrazio il variegato gruppo dei fisici: **Piero**, grazie perchè quando mi voglio sfogare ti posso prendere a botte, e perchè lo so che tanto ti mancherò anche se dici il contrario, **Vale**, per la tua amicizia gratuita, per la tua attenzione e cura nei miei confronti, per i nostri lunghi, lunghissimi aperitivi dalla Manu, per il Club della fisica(cuore)NTC, e per la passione che trasmetti in tutte le cose che fai, **Lidia**, per come hai sempre ironizzato sulla piega dei miei capelli nei momenti più critici della tesi, **Clark**, grazie perchè in queste sere il tuo saluto non è mai mancato, sei eccezionale, **Martino**, sei il numero uno con la chitarra, e mi fanno morire dal ridere i tuoi giochi di prestigio, **GioForti**, per tutte le volte che sei andato a sistemare le sedie a S.Giacomo, **FiloG**, grazie per come è cambiato il nostro rapporto in questi ultimi due mesi, **Betta**, grazie per le tue maglie molto originali e stravaganti, **Giacomo Tondi**, per le tue idee regalo molto fantasiose.

Grazie a **Corallo**, quando si dice "non siamo noi che ci scegliamo", alla **Patrizia**, mi raccomando non ti lasciare ingoiare dal vortice degli ingegnieri, al massimo cercati un moroso, e all'**Emma**, per la semplicità con cui stai nel rapporto con me e alle proposte che ti faccio (vedi che alla fine ti sei divertita alla convivenza studio!!!).

Ringrazio **Digi**, grazie per ogni volta che sei venuto in mio aiuto quando c'era anche solo una piccola cosa che non andava, **Marino**, senza di te non avrei mai capito nulla sugli "automi cellulari", **Nazzo**, la tua casa è stata una seconda casa in questi mesi, **Cecchi**, per aver fatto le ore piccole a leggere e correggere gli accenti della tesi, e per avermi offerto la sua disponibilità totale come sostegno morale, **Camanzi**, l'uomo disponibilità di Scienze, **Beppe**, **Tommo**, grazie per avermi prestato il portatile per la tesi, per tutte le volte che hai cercato di tirarmi su, e grazie per le bombe che carichi e spari a sdc, sei una grande!

Ringrazio poi la **Bisu**, per il tuo estro e la tua creatività, l'**Elvana** e l'**AnnaBo**, **Elenalaura**, per il tuo voler stare insieme a noi e le mille foto dei tuoi viaggi, **Betta Fisicaro**, per i suoi ritardi cronici a sdc, e l'**Ila**, perchè sei la donna più colorata e stravagante e perchè hai contribuito alla "rinascita di biologia"!!

Uno straordinario grazie al gruppo delle biotec: **Clode**, grazie per i fine settimana passati insieme e per il tuo modo di dire sempre quello che pensi in faccia, **SaraB**, per le volte che abbiamo cucinato insieme e per la tua costante attenzione, e prchè in ogni cosa che fai (anche quando fai la pizza) dai tutta te stessa, **Maria Chiara**, grazie per avermi preso su così come sono nel lavoro della segreteria e per essere stata così paziente in qs periodo, **Lory**, la più battagliera senza peli sulla lingua, **Fede**, l'attaccapezza migliore soprattutto sotto elezioni!, **Palmo**, l'unico uomo biotec tra mille donne, grazie per le sere in cui hai spiegato le stelle, **Vale Gentile**, grazie per la semplicità, la serietà e la grinta che metti nelle cose, **Giorgia**, una biotec rinata con i banchetti di agosto, e **Michela** e **Cecilia**, grazie per avermi sempre aperto la porta di casa vostra.

Un ringraziamento molto affettuoso va a tutte le matricole che sono state come un venticello primaverile: l'**Agnese**, per come sei allegra e svampita, **Mary Catta**, grazie per avermi voluto così bene da subito, e per essere sempre un richiamo alle cose essenziali,**Ceci**, per aver subito accettato la proposta della segreteria (sarai una segretaria super!), **Serena**, per la risata assordante e contagiosa, **Lucia**, grazie per la tua determinazione e il non lasciarti mai abbattere,e grazie per aver diffuso la ricetta della focaccia (a partire dalla Mary), **Davide Bolo**, grazie per essere venuto a studiare con me a Pasqua, **Cate**, per i tuoi abbracci consolatori, **Martina**, una delle biotec più presenti nella sala studio di matematica, l'**Ale Scidà**, la matricola più acculturata, **Tuttoman**, grazie per esserti sempre preoccupato per me (fin troppo!!), e a **PQ** il chimico pesarese un pò estroverso.

Un grazie speciale ai più vecchi, cioè quelli che ho incontrato nei primi due anni di università, ma che sono stati altrettanto importanti e presenti: **FraNori, Paolo Bassani, Gigi, Elena Rocchi**: il gruppo di studio di fisici più sgangherato che io abbia mai visto, ma allo stesso tempo con un modo di stare insieme, anche con caratteri contrastanti, che mi ha affascinato da subito, **Benny**, **Nofero**, grazie per i tuoi gruppi di studio, grazie perchè ogni volta che c'era qualcosa sapevo che potevo contare su di te, **FraG**, grazie per le lunghe chiaccherate post-diaconie in cui ti sei sorbita tante mie paranoie, ma in cui mi hai aiutato a guardare le cose in modo diverso, andandoci più a fondo, grazie per quella stupenda giornata post-esame in cui mi hai portato in giro per i musei di Bologna, **Sissi**, grazie perchè se mi sono così tanto appassionata al lavoro della segreteria lo devo a te, un servire la nostra comunità (i nostri amici) che mi ha insegnato cosa vuol dire gratuità e donarsi completamente, grazie perchè è stato bello condividere qs esperienza a volte faticosa, ma molte più volte lieta,**ChiaraErc**, per i tuoi consigli e per la familiarità che ho sempre sentito stando con te, **Chiara Marini**, per la sua dolcezza e **Chiara Marzaduri**, la scienziata più precisa e organizzata, **Piru**, per i tuoi indimenticabili mocassini e per il tua casa-marsupio (ora te lo confesso abbiamo pagato uno per rubartelo!!purtroppo tu te ne sei subito procurato un altro), **Manu Loca**, **Filo Marchioni**, grazie per la commovente convivenza del febbraio del 2000 dopo la quale tutto è cambiato, **Bob**, **Loca**, la cicciofila del blasco, **PaoloG**, uomo d'altri tempi grazie per tutti i fantastici volantini che hai sfornato per lo Student Office, **TeoV, Anto Cento, Capo**, nella classifica delle lese tu sei sempre stato il RE, **Filo Medri**, grazie per avermi aiutato a superare il mio ultimo esame con Matlab, **Gianca**, da matricola sei stato uno dei primi con cui ho avuto a che fare...guarda come sono ridotta adesso (scherzo!), **Erika, Beccari**, grazie per la confidenza e l'amicizia che c'è subito stata tra di noi, **Di Rico**, **Enrico**, grazie per essere stato vicino a me per gran parte del tempo passato a Bologna.

Ringrazio i mitici regaz della segreteria centrale, che sono per me testimonianza di cosa significa fare la gloria di Dio anche solo facendo mille telefonate o facendo passare un avviso: grazie **Chicca** e **Eli Dalpane**, i due capisaldi della segreteria, per me esempi di disponibilità totale agli altri, **Pesa**, efficientissimo, **Anna Cecchi**, la più precisa, **Canaps**, troppo dolce, **Maddy** e **Baffy**, sempre disponibili, l'**Elena**, per le mille disponibilità e la **Lauretta**, perchè sei troppo forte!!.
Un grazie anche alle segretarie di facoltà, in particolare la **SaraG**, la **Bighi** (basta con i tuoi esami bazza!), e la **Celeste** con cui ho passato il tempo in fila durante le verifiche

in sede.

Un grazie anche alle mie compagne d'appartamento: alla **Monica G.**, per aver cucinato nelle nostre cene d'appa (il risotto con il radicchio non lo dimenticherò facilmente!), alla **Barbara**, per la tua tenacia, alla **Roby**, la "tutto pepe" di casa, all'**ElisaB**, grazie per avermi aiutato con le torte, e perchè non è vero che sei un disastro, ce la metti tutta quando devi fare qualcosa.., e alla **Nico**, grazie per gli anni passati insieme in appa, e per il tuo "asavadava" che ci ha tormentato non so per quanto tempo!
Un grazie particolare alla **Marianna**, per le foto e il filmino fatti al campo nella nostra mitica camera (sto ancora aspettando la maglietta che mi hai promesso!!), a **Franco**, per la sua ironia, e alla **Manu**, per le sue favolose focacce genovesi!, e perchè il suo bar è un costante punto di ritrovo per tutti noi.

Grazie anche ai miei amici di Grottammare, con cui sono cresciuta, e anche se ora ci vediamo solo a Pasqua e a Natale, è bello ogni volta ritrovarsi come se il tempo non fosse mai passato: **Magda, Mirko, Sergio, Micaela, Valentina, Enrico**.

Infine, ma non per ordine di importanza, ringrazio la **Zohra**, mia grande compagna in ogni cosa, fin dalla prima volta c'è subito stato qualcosa che ci ha unito e non ci ha fatto più separare, grazie per essermi sempre vicina, per essere una provocazione continua, per avermi costretto sempre a chiedere il perchè faccio le cose, per le tue schitarrate in camera in cui volevi per forza insegnarmi le canzoni, le tue mille barzellette, le foto, il fantastico viaggio a Londra (mi sono divertita un casino!), gli aperitivi, e un sacco di altre cose che non posso elencare perchè non finirei più. Comunque grazie mille per il grande bene che mi vuoi.