

a chi mi vuole bene

Indice

Introduzione	1
1 Elementi introduttivi	3
1.1 Elementi di probabilità	3
1.1.1 Processi stocastici	8
1.1.2 Martingale	12
1.2 Calcolo stocastico e formula di Ito	13
1.2.1 Equazioni differenziali stocastiche	15
1.2.2 L'operatore infinitesimale $\mathcal{A}$	17
1.2.3 Le equazioni di Fokker-Planck	20
2 Il modello di Dupire	23
2.1 Il modello B-S, la volatilità implicita e gli effetti smile	24
2.2 Come passare dai prezzi alle distribuzioni	28
2.2.1 Determinazione della funzione $C(K, T)$	28
2.2.2 La funzione densità risk-neutral φ_T	29
2.3 Come passare dalle distribuzioni alle diffusioni	31
2.4 La teoria della volatilità	33
2.4.1 La strategia senza stop ed il tempo locale	33
2.5 La teoria degli smile di Dupire	36
2.6 La volatilità stocastica	37
A La formula di Ito	39

B Distribuzioni	41
Bibliografia	43

Introduzione

Le opzioni finanziarie appartengono alla categoria degli strumenti derivati in quanto derivano il loro valore da quello dell'attività su cui sono scritte. Esistono opzioni che garantiscono al loro acquirente la facoltà di acquistare l'attività sottostante (in tal caso è detto *opzione call*), o di vendere (*opzione put*). Altri elementi che caratterizzano le opzioni sono il prezzo di esercizio (detto *strike*), e la scadenza (o *maturità*). Il primo rappresenta il prezzo al quale avrà luogo l'acquisto o la vendita dell'attività sottostante su cui è scritta l'opzione, se questa viene esercitata; il secondo rappresenta invece la durata dell'opzione, ossia il tempo di vita della stessa. È importante distinguere fra opzioni che possono essere esercitate solo alla scadenza (opzioni di tipo *europeo*), oppure altre che possono essere esercitate in qualsiasi istante prima della scadenza (opzioni di tipo *americano*).

Possiamo definire quindi le opzioni come strumenti finanziari mediante i quali l'acquirente assume la facoltà, ma non l'obbligo, di esercitare un diritto di acquisto o di vendita dell'attività sottostante ad un prezzo e ad una data prefissate. L'attività sottostante su cui è scritta l'opzione può avere natura finanziaria, oppure reale; nel primo caso parleremo di opzioni su valute, su titoli azionari, su indici di Borsa, mentre nel secondo caso avremo a che fare con opzioni su attività reali.

Le opzioni finanziarie hanno conosciuto, negli ultimi decenni, una rapida diffusione e vengono utilizzate prevalentemente a fini di copertura rispetto varie forme di rischio, o a fini speculativi. È innegabile, tuttavia, che parte dell'iniziale successo e della successiva diffusione sia legato alla presenza di

un modello di valutazione molto semplice ed efficiente quale la nota formula sviluppata da *Black* e da *Scholes* nel 1973, e poi estesa in varie forme da studiosi successivi. Tale formula si basa su numerose ipotesi che, nella realtà, raramente sono soddisfatte. La violazione di tutte, o alcune, le ipotesi alla base del modello porta quest'ultimo a commettere sistematici errori, se confrontato ai prezzi di mercato. Errori che possono essere in riferimento al tempo mancante alla scadenza, o al prezzo di esercizio. In quest'ultimo caso, in particolare, se si rappresentano su di un diagramma le volatilità implicite della formula Black-Scholes, utilizzando i valori di mercato delle opzioni, si ottengono quelli che sono noti in letteratura come effetti *smile*.

L'obiettivo principale di quest'opera vuole essere l'esporre un modello di prezzaggio per i derivati, il modello a volatilità locale di Dupire, che sia estensione del modello Black-Scholes, e soprattutto che tenga conto di condizioni di mercato più realistiche. A tal fine, nel primo capitolo sono riportate delle nozioni fondamentali di calcolo delle probabilità e calcolo stocastico, utili per comprendere a pieno i risultati del capitolo successivo, come la formula di Ito, o le equazioni di Fokker-Planck. Nel secondo capitolo si trova lo studio del prezzaggio di un'opzione, con una breve introduzione al modello Black-Scholes, per arrivare poi all'esposizione del modello di Dupire. Infine nelle due appendici, come complemento, riportiamo la formula di Ito, ed il concetto di derivata nel senso delle distribuzioni.

Capitolo 1

Elementi introduttivi

In questo capitolo, per completezza di esposizione, richiamiamo alcuni concetti fondamentali utili per comprendere a pieno i risultati esposti nel seguito della trattazione. Introduciamo alcune nozioni base della teoria della probabilità, degli elementi di calcolo differenziale stocastico, esaminando strumenti matematici che utilizzeremo nel seguito dell'elaborato come la formula di Tanaka e le equazioni di Fokker-Planck. L'esposizione sarà semplice e discorsiva, riportando solo alcune dimostrazioni di concetti chiave nelle appendici.

1.1 Elementi di probabilità

In questa sezione sono riportate delle definizioni utili per fissare dei concetti fondamentali.

Definizione 1.1. Una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di un insieme Ω è detta una σ -algebra se verifica le codizioni:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. se $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$;
3. se $A_n \in \mathcal{F}$ per $n=1,2,\dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Definizione 1.2. Una funzione $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$, con $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ σ -algebra, si dice *misura* su $(\Omega, \mathcal{F})$ se valgono le proprietà:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- data una successione $(E_n)_{n \geq 1}$ di elementi di $\mathcal{F}$ a due a due disgiunti, si ha:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Definizione 1.3. La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si definisce *spazio con misura*.

In particolare vale:

Definizione 1.4. Uno *spazio di probabilità* è uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ per il quale vale la relazione $P(\Omega) = 1$. In tal caso la misura P è detta *probabilità*.

La probabilità di un evento può essere inteso anche come il grado di fiducia dell'evento, vale a dire la probabilità che ha l'evento di verificarsi. Definiamo anche la probabilità di un evento condizionato al verificarsi di un secondo evento.

Definizione 1.5. Dati due eventi $A, B \in \mathcal{F}$, per i quali vale $P(B) \neq 0$, si definisce probabilità di A , condizionata dall'evento B , la quantità:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Le funzioni misurabili definite su uno spazio di probabilità vengono definite variabili aleatorie.

Definizione 1.6. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce *variabile aleatoria* un'applicazione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq t\}$ appartenga alla σ -algebra $\mathcal{F}$.

Ritornando al concetto di probabilità condizionata, presa una variabile aleatoria X sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e supponendo sempre $P(B) \neq 0$, questa è data da:

$$P(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X(\omega) dP(\omega)$$

Una variabile aleatoria X è dunque una funzione nelle incognite ω , per la quale si può calcolare la probabilità che X prenda valori più piccoli di un certo t , vale a dire:

$$P(\{\omega, X(\omega) \leq t\}).$$

Più in generale è fondamentale per le variabili aleatorie il calcolo di probabilità del tipo:

$$P(\{\omega, X(\omega) \in A\})$$

con A sottoinsieme reale contenuto nella famiglia $\mathcal{B}$, alla quale appartengono tutti i sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$. Così facendo ci riconduciamo allo studio della funzione

$$A \longrightarrow P(\{\omega, X(\omega) \in A\})$$

che ad ogni sottoinsieme $A \in \mathcal{B}$ associa la probabilità che ha X di prendere valori in A . Quest'applicazione prende il nome di legge o distribuzione di una variabile aleatoria.

Definizione 1.7. Data una variabile aleatoria X definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce *legge di X* la misura definita sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$\mu_X(B) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}), \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

o equivalentemente:

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Quest'ultima definizione ci suggerisce che ad ogni variabile aleatoria è possibile associare una funzione che descrive come si distribuisce la variabile sullo spazio preso in esame.

Definizione 1.8. Data una variabile aleatoria X , si chiama *funzione di ripartizione* per X la funzione $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ data da:

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\}).$$

Conoscere la funzione di ripartizione equivale alla conoscenza della distribuzione di X . É chiaro che la funzione di ripartizione è una funzione non-decrescente, poiché se t cresce l'evento diventa 'più grande'. Osserviamo anche che la funzione di ripartizione, per distribuzioni continue, assume la seguente forma integrale:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = P(X \leq x)$$

dove la funzione integranda viene detta densità.

Definizione 1.9. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *densità* se e solo se soddisfa le condizioni:

- $f \geq 0$;
- f è integrabile su $\mathbb{R}$;
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

Da quanto detto in precedenza, intuiamo che la legge di distribuzione stabilisce una corrispondenza tra i possibili valori della variabile aleatoria e la loro probabilità. Il fatto che una variabile aleatoria si distribuisca secondo una data legge ci permette di trarre alcune conclusioni importanti, tra cui la possibilità di definire quello che viene chiamato *livello di confidenza*. Tra le diverse distribuzioni che si conoscono, la distribuzione normale, detta anche distribuzione gaussiana, è quella che più di ogni altra trova applicazione. Essa infatti costituisce un modello che approssima numerose altre distribuzioni e possiede proprietà matematiche che rendono possibile l'ottenimento di molti importanti risultati teorici. Prima fra tutte, la possibilità di ricondurre la distribuzione normale ad una funzione soluzione del problema del calore.

La distribuzione normale si definisce come:

Definizione 1.10. Una variabile aleatoria X si distribuisce con legge di probabilità gaussiana (o normale), di parametri μ e σ , se ammette come funzione densità di probabilità la funzione:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

per $-\infty < x < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$

Se una variabile aleatoria si distribuisce con legge normale, ciò si indica con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Un caso particolare lo si ha quando i parametri caratterizzanti sono $\mu = 0$, e $\sigma = 1$. In tal caso la densità assume la forma:

$$f(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$$

e la distribuzione è detta *gaussiana standardizzata*.

Definizione 1.11. Data una variabile aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce *valore atteso di X* la quantità:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

se $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si può definire la *varianza di X* come:

$$var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Nel caso in cui la variabile aleatoria sia distribuita secondo una legge normale, si otterrà:

$$E[X] = \mu$$

e

$$var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sigma^2$$

Per il calcolo del valore atteso di una variabile aleatoria, la seguente proposizione mostra come sia possibile passare da un integrale rispetto alla misura di probabilità P , ad un altro rispetto alla misura di distribuzione di X :

Proposizione 1.1.1. *Preso una funzione Borelliana $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g \circ X$ sia integrabile. Allora vale:*

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_X(x)$$

L'importanza applicativa di questa proposizione sta nel fatto che, se si conosce la densità $f(x)$ della variabile aleatoria X , applicando la sostituzione

$$d\mu_X(x) = f(x)dx$$

ci si riconduce al calcolo di un usuale integrale di Lebesgue.

1.1.1 Processi stocastici

Definizione 1.12. Un *processo stocastico* sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una funzione:

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall t \in \mathbb{R}_+$, la funzione

$$X(t, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

è misurabile rispetto alla σ -algebra $\mathcal{F}$.

Osserviamo che la precedente funzione $X(t, \omega)$, denotata anche con $X_t(\omega)$, può assumere due diversi significati. Infatti:

- per t fissato, la funzione

$$\omega \longmapsto X(t, \omega)$$

è una variabile aleatoria.

- per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione

$$t \longmapsto X(t, \omega)$$

è una funzione deterministica del tempo, e va sotto il nome di *traiettoria di X* .

Definizione 1.13. Preso un processo stocastico $\{X_t, t \geq 0\}$ definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce σ -algebra generata da X sull'intervallo $[0, t]$, o *filtrazione di X* al tempo t , l'insieme:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$$

Per costruzione, si può notare che la σ -algebra $\mathcal{F}_t^X$ contiene tutte le informazioni del processo stocastico (X_t) fino al tempo t .

Definizione 1.14. Un processo stocastico $(X_s)_{s \geq 0}$ si definisce *adattato* alla filtrazione $\mathcal{F}_t^X$ se verifica la condizione:

$$X_s \in \mathcal{F}_t^X \quad \forall s \leq t$$

Definizione 1.15. Un processo stocastico (X_t) definisce una *diffusione* se localmente il suo comportamento può essere approssimato dall'equazione:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t) \quad (1.1)$$

dove $Z(t)$ è il termine stocastico distribuito in maniera normale, ed è indipendente da tutto quello che è successo fino al tempo t , mentre μ e σ sono funzioni deterministiche date. In particolare la funzione μ è chiamata (localmente) *drift* del processo, mentre σ è chiamata *termine di diffusione*.

Per modellare il termine di perturbazione gaussiano $Z(t)$ introduciamo il processo di Wiener (detto anche moto Browniano).

Definizione 1.16. Un processo stocastico (W_t) è detto *moto Browniano* se verifica le condizioni:

- $W_0 = 0$;
- W ha incrementi indipendenti, cioè se presi $r < s \leq t < u$, e considerati $(W_u - W_t)$ e $(W_s - W_r)$, si ottengono due variabili aleatorie indipendenti;
- $\forall s, t$, con $s < t$, la variabile aleatoria $W_t - W_s$ ammette distribuzione normale $N[0, \sqrt{t - s}]$;

- W_t ha traiettorie continue, vale a dire che $\forall \omega \in \Omega$ l'applicazione

$$t \longmapsto W_t(\omega)$$

è continua.

Per cui, se andiamo a sostituire la variazione del moto browniano al posto del termine di perturbazione nell'equazione (1.1), si ottiene:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t) \quad (1.2)$$

dove la quantità $\Delta W(t)$ è data da: $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$. Dividendo formalmente, la (1.2) per Δt , e facendo tendere Δt a zero, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \mu(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))v(t) \\ X(0) = a \end{cases} \quad (1.3)$$

In tal caso abbiamo aggiunto la condizione iniziale $X(0) = a$, ed introdotto una funzione $v(t) = \frac{dW}{dt}$. Se $v(t)$ fosse ben definita, si potrebbe risolvere la (1.3) come una normale equazione differenziale ordinaria, cosa che invece non si può fare in quanto il moto Browniano W_t , con probabilità 1, non è differenziabile in nessun punto.

Bisogna quindi percorrere un'altra strada per dare senso all'equazione (1.2). A tal fine conviene riportare il tutto in forma integrale risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = a \end{cases} \quad (1.4)$$

Così facendo si ottiene:

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (1.5)$$

Notiamo però che in questo caso non possiamo fare riferimento all'integrale di Riemann-Stieltjes (Cf. [6]), poiché il moto Browniano W_t non è a variazione limitata. Ecco quindi che per risolvere l'equazione (1.5) dobbiamo introdurre l'integrale

$$\int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (1.6)$$

per ogni traiettoria del moto W_t , e per ogni processo stocastico σ . Per fare ciò risulteranno utili alcune nozioni del tipo:

Definizione 1.17. Dato un processo stocastico $g(s)$, si ha:

1. $g(s)$ appartiene allo spazio $L^2([a, b])$ se verifica le condizioni:

- $\int_a^b E[g^2(s)]ds < \infty$;
- $g(s)$ è adattato rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t^W$;

2. equivalentemente $g(s) \in L^2$ se $g(s) \in L^2([0, T]) \quad \forall T > 0$;

Ricordiamo inoltre che un processo stocastico è detto *semplice* se esiste una scomposizione dell'intervallo $[a, b]$ del tipo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tale che $g(s)$ assume valori costanti in ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}]$. In altre parole, per $g(s)$ processo semplice, possiamo scrivere l'integrale (1.6) come:

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] \quad (1.7)$$

Un'osservazione importante da fare è la seguente: è possibile soffermare l'attenzione esclusivamente sui processi stocastici semplici, poiché ogni processo $g(s) \in L^2$ lo si può approssimare con una successione $(g_n(s))_{n \geq 0}$ di processi semplici appartenenti sempre a L^2 , e tali che:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E[(g_n(s) - g(s))^2]ds = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$ l'integrale $\int_a^b g_n(s)dW(s)$ è ben definito e sarà una variabile aleatoria Z_n tendente a $Z_n \rightarrow Z$ in $L^2([a, b])$, con $Z = \int_a^b g(s)dW(s)$;
- possiamo quindi definire l'integrale stocastico da studiare come:

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(s)dW(s)$$

Consideriamo la seguente:

Proposizione 1.1.2. *Per un processo stocastico $g(s)$ soddisfacente la condizione:*

$$\int_a^b E[g^2(s)]ds < \infty$$

cio   adattato rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t^W$, valgono le relazioni:

- $E[\int_a^b g(s)dW(s)] = 0$
- $E[(\int_a^b g(s)dW(s))^2] = \int_a^b E[g^2(s)]ds$ *che va sotto il nome di Isometria di Ito*
- $\int_a^b g(s)dW(s)$ *   $\mathcal{F}_t^W$ -misurabile*

Vale la pena soffermare l'attenzione sui primi due punti della proposizione. Il primo garantisce l'annullarsi del valore atteso di un integrale rispetto ad un processo di Ito, il secondo pu  essere sfruttato per calcolare un integrale di Ito. Per completare l'analisi dei processi stocastici, introduciamo una proposizione le quali conclusioni saranno utili nel seguito.

Proposizione 1.1.3. *Siano Z, Y due processi stocastici, e sia data una filtrazione $\mathcal{F}_t$ per cui la variabile Z risulti misurabile. Allora si ha:*

- $E[ZY|F_t] = ZE[Y|F_t]$
- $E[E[Y|F_t]|F_s] = E[Y|F_s] \quad \forall t, s \quad s < t$

Il primo punto   di facile interpretazione: essendo infatti Z $\mathcal{F}_t$ -misurabile, ne possiamo dedurre che $E[Z|\mathcal{F}_t]$ sia una costante, e precisamente il valore di Z , ottenendo quindi il risultato dato. Il secondo punto va sotto il nome di *Legge dell'attesa reiterata*.

1.1.2 Martingale

Definizione 1.18. Un processo stocastico (X_t) si dice una $(\mathcal{F}_t)$ -martingala se gode delle propriet :

1. il processo (X_t)   adattato rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$;

2. $E[|X(t)|] < \infty \quad \forall t$;
3. $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \quad \forall t, s \quad s \leq t$. Inoltre vale:
 - se $E[X(t)|\mathcal{F}_s] < X(s)$ il processo si chiama *supermartingala*,
 - se $E[X(t)|\mathcal{F}_s] > X(s)$ allora è detto *submartingala*.

Per quanto visto nella proposizione (1.1.2), per un processo stocastico $g(s) \in L^2([s, t])$ vale:

$$E\left[\int_s^t g(u)dW(u)|\mathcal{F}_s^W\right] = 0 \quad (1.8)$$

per cui possiamo concludere dicendo che un processo del tipo

$$X(t) = \int_0^t g(s)dW(s) \quad \forall t > 0$$

è una $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingala. Sfruttando quindi le proprietà delle martingale, si ottiene la relazione:

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s^W] = X(s)$$

Un risultato molto importante che si ricava da quanto appena visto è messo in evidenza dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.1.4. *Un processo stocastico (X_t) è una martingala se il rispettivo differenziale stocastico ha la forma:*

$$dX(t) = g(t)dW(t)$$

1.2 Calcolo stocastico e formula di Ito

Come si è potuto ormai intuire, il nostro obiettivo è quello di determinare un processo stocastico (X_t) che soddisfi la condizione (1.5), che in forma ridotta è equivalente a:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (1.9)$$

con $X(0) = a$. Tra la forma integrale (1.5), e la forma ridotta appena esposta, conviene considerare la seconda, in quanto determina la dinamica infinitesimale del processo, conoscendo naturalmente i termini di drift μ e di diffusione σ . Osserviamo che non è del tutto restrittivo limitarci a questo caso di incremento infinitesimale, poiché nel continuo un processo avrà sempre un modello differenziale stocastico con questa struttura.

Ciò che ora serve è uno strumento matematico che permetta di calcolare quell'equazione differenziale stocastica. Prima di introdurlo è opportuno anticipare alcune proprietà probabilistiche utili del moto browniano.

Osserviamo dapprima che le traiettorie di un moto Browniano sono continue, ma non sono per niente oggetti semplici, in quanto hanno variazione non limitata. In particolare, sapendo che un moto Browniano ha distribuzione normale, fissati due istanti di tempo s, t , con $s < t$, e definiti: $\Delta t = (t - s)$ e $\Delta W(t) = W(t) - W(s)$, enunciamo alcune proprietà per $W(t)$:

- $E[\Delta W] = 0$
- $E[(\Delta W)^2] = \Delta t$
- $Var[\Delta W] = \Delta t$
- $Var[(\Delta W)^2] = 2(\Delta t)^2$

La seconda e la quarta proprietà, ci suggeriscono che, per $\Delta t \rightarrow 0$, $(\Delta W)^2$ è una quantità deterministica, e quindi possiamo concludere dicendo che:

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Con gli strumenti che abbiamo ora a disposizione possiamo enunciare la formula di Ito, che ci permetterà di calcolare il differenziale stocastico (1.5).

Teorema 1.2.1. *(Formula di Ito) Sia (X_t) un processo stocastico che ammette una diffusione definita come la (1.9). Considero inoltre una funzione $f \in C^{1,2}$, e definisco un processo del tipo $Z(t) = f(t, X(t))$. Allora $Z(t)$ avrà un differenziale stocastico dato da:*

$$dZ(t) = df(t, X(t)) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW(t)$$

Sfruttando le proprietà del moto Browniano $W(t)$, dalle quali ricaviamo le condizioni:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0 \\ dt dW = 0 \\ (dW)^2 = dt \end{cases}$$

e facendo le dovute semplificazioni, otteniamo la *formula di Ito* per la funzione f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2 \quad (1.10)$$

che in forma integrale equivale a:

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \int_0^t \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW(s) \quad (1.11)$$

Ci capiterà, nel corso dell'elaborato, di dover applicare la formula di Ito per funzioni $f \notin C^2$, le quali però ammettono derivate deboli. Il seguente lemma mostra come la formula di Ito può essere adattata a funzioni del genere:

Lemma 1.2.2. (*Formula di Tanaka*) Sia $f(t, x)$ una funzione appartenente allo spazio delle distribuzioni, e sia X_t un processo che ammette diffusione del tipo (1.9), allora vale:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2 \quad (1.12)$$

Notiamo che nella forma le due formule sono del tutto equivalenti. Si differenziano quindi solo nella classe di funzioni alle quali si applicano.

1.2.1 Equazioni differenziali stocastiche

Risolvere un'equazione differenziale stocastica vuol dire trovare un processo stocastico (X_t) tale che verifichi le condizioni:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

che espressa in forma integrale equivale a:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \forall t \geq 0 \quad (1.14)$$

Un metodo standard per la risoluzione del problema potrebbe essere lo schema iterativo descritto da Cauchy-Picard. Tale metodo consiste nel trovare una successione di processi $(X_t)_i$ convergente al processo soluzione del problema. Nel nostro caso però, non ne faremo uso. La seguente proposizione stabilisce le condizioni sotto le quali la soluzione esiste ed è unica.

Proposizione 1.2.3. *Supponiamo che esista una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che valgano le relazioni:*

1. $\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| \leq k\|x - y\|$
2. $\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq k\|x - y\|$
3. $\|\mu(t, x)\| - \|\sigma(t, x)\| \leq k(1 + \|x\|)$

$\forall x, y, t$. Allora esiste, ed è unica, una soluzione (X_t) del problema (1.13), che verifica le seguenti proprietà:

- X_t è un processo $\mathcal{F}_t^W$ -adattato;
- X_t ha traiettorie continue $\forall \omega$;
- X_t è un processo di Markov;
- $\exists$ una costante c tale che:

$$E[\|X_t\|^2] \leq ce^{ct}(1 + \|x_0\|^2)$$

Il fatto che X_t sia adattato rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t^W$ significa che $\forall t$ fissato, il valore del processo dipende fortemente dalla traiettoria del moto browniano W_t nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Inoltre si ha:

Proposizione 1.2.4. *Sia data un'equazione differenziale stocastica lineare del tipo*

$$\begin{cases} dX_t = aX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

dove a, σ sono scalari. La soluzione del problema è:

$$X_t = e^{at} X_0 + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW_s.$$

Più in generale possiamo affermare che vale:

Proposizione 1.2.5. *Data un'equazione differenziale stocastica lineare del tipo:*

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + b_t)dt + \sigma_t dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

dove A è una matrice $n \times n$, b_t una funzione n -dimensionale, σ_t una funzione deterministica, e W un moto browniano d -dimensionale, allora la soluzione sarà data da:

$$X_t = x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} b_s ds + \int_0^t e^{A(t-s)} \sigma_s dW_s$$

Dalle ultime due proposizione si evince che il problema (1.13) è risolvibile come una semplice equazione differenziale ordinaria, ovviamente applicando dove è dovuto la formule di Ito. Nel caso multidimensionale, è possibile fare un'interessante generalizzazione, e per fare ciò tornerà utile un particolare operatore infinitesimale. Osserveremo inoltre come si arriva alla soluzione del problema facendo uso delle equazioni di Fokker-Planck.

1.2.2 L'operatore infinitesimale $\mathcal{A}$

Consideriamo un'equazione differenziale stocastica n -dimensionale

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (1.16)$$

allora la risoluzione di tale equazione è strettamente collegata ad un operatore differenziale $\mathcal{A}$ definito come segue:

Definizione 1.19. Presa l'equazione differenziale stocastica, l'operatore differenziale $\mathcal{A}$ è definito come:

$$\mathcal{A}h(t, x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

dove la funzione $h \in C^2$, ed il termine $c(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ è detto coefficiente di correlazione.

L'operatore $\mathcal{A}$ prende il nome di *operatore di Kolmogorov*, o più semplicemente *operatore infinitesimale di X_t* .

Sfruttando quindi l'operatore infinitesimale appena definito, siamo in grado di esporre la formula di Ito n-dimensionale in funzione appunto di $\mathcal{A}$, vale a dire:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f \right) dt + |\nabla_x f| \sigma dW_t .$$

Vediamo ora che relazioni ci sono tra l'operatore $\mathcal{A}$ ed le equazioni viste finora. Date tre funzioni scalari $\mu(t, x)$, $\sigma(t, x)$ e $\phi(t, x)$, consideriamo il seguente problema di Cauchy con valori sul bordo:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ F(T, x) = \phi(x) \end{cases} \quad (1.17)$$

Il nostro obiettivo, in questo caso, è quello di trovare una soluzione $F(t, x)$ nel dominio $[0, T] \times \mathbb{R}$ in funzione di un processo stocastico X_t (o processo di Ito), che sia a sua volta soluzione di una equazione differenziale stocastica come la (1.15).

A tal fine, se fissiamo un tempo t nell'intervallo $[0, T]$, e fissiamo anche un punto x_0 nello spazio, e sia X_s il processo stocastico soluzione di un'equazione del tipo (1.13), applicando l'operatore infinitesimale $\mathcal{A}$ nel problema appena esposto, quest'ultima assume la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}F(t, x) = 0 \\ F(T, x_0) = \phi(x_0) \end{cases}$$

Applicando ora la formula di Ito al processo $F(s, X_s)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} F(T, X_T) = F(t, X_t) + \int_t^T \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}F(s, X_s) \right] ds + \\ + \int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s \end{aligned} \quad (1.18)$$

Supponendo ora che la funzione $\sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$ sia integrabile rispetto al moto Browniano W_t , e passando entrambi i membri al valore atteso¹, si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{t,x}[F(T, X_T)] = E_{t,x}[F(t, X_t)] + E_{t,x} \left[\int_t^T \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}F(s, X_s) \right] ds \right] + \\ + E_{t,x} \left[\int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s \right] \end{aligned}$$

Prima di arrivare al risultato fondamentale della sezione, è opportuno osservare che valgono le seguenti condizioni:

- $E_{t,x}[F(t, X_t)] = F(t, X_t)$ per le proprietà delle martingala già viste nella sezione precedente;
- $E_{t,x} \left[\int_t^T \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{A}F(s, X_s) \right] ds \right] = 0$ per definizione di attesa condizionale;
- $E_{t,x} \left[\int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dW_s \right] = 0$ sempre per la definizione di attesa condizionale;

per cui possiamo concludere dicendo che la soluzione del problema preso in esame è data da:

$$F(t, X_t) = E[\phi(X_T)]$$

Tale risultato fondamentale va sotto il nome di *formula di rappresentazione stocastica di Feynman-Kač*. Per chiarezza di esposizione, completiamo la sezione con le seguenti proposizioni:

¹Il simbolo $E_{t,x}$ indica il valore atteso condizionale all'evento iniziale $X_t = x$.

Proposizione 1.2.6. *Sia (X_t) un processo stocastico in più dimensioni, con generatore infinitesimale $\mathcal{A}$, e sia $F(t, x)$ una funzione. Allora, sotto alcune condizioni di integrabilità, valgono le relazioni:*

- *il processo di Ito $F(t, X_t)$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ se e solo se*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{A}F = 0$$

- *il processo di Ito $F(t, X_t)$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ se e solo se $\forall(t, x)$, con $t \leq T$, si ha:*

$$F(t, x) = E_{t,x}[F(T, X_T)]$$

A questo punto, sfruttando la definizione, ed alcune sue proprietà, dell'operatore infinitesimale $\mathcal{A}$, illustriamo le equazioni di Fokker-Planck, che ritroveremo nel capitolo successivo, quando andremo a determinare l'equazione di Dupire.

1.2.3 Le equazioni di Fokker-Planck

Consideriamo un processo stocastico X_t che soddisfi l'equazione differenziale stocastica (1.13), con generatore infinitesimale $\mathcal{A}$. Allora, se esaminiamo il problema con valori sul bordo del tipo:

$$\begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u)(s, y) = 0 & \forall(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ u(T, y) = \mathcal{I}_B(y) & \text{per } y \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.19)$$

dove la funzione $\mathcal{I}_B(y)$ è definita nel modo:

$$\mathcal{I}_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in B \\ 0 & \text{se } y \notin B \end{cases}.$$

per quanto visto nella sezione (1.2.2), la soluzione di tale problema sarà data da:

$$u(s, y) = E_{s,y}[\mathcal{I}_B(X_T)] = P(X_T \in B | X_s = y)$$

Un importante risultato di quanto detto è dato dall'*equazione di Kolmogorov*:

Proposizione 1.2.7. *Sia $X(t)$ un processo soluzione dell'equazione (1.13). Allora la probabilità condizionata $P(s, y; t, B) = P(X_t \in B | X_s = y)$ è data come soluzione del problema:*

$$\begin{cases} [\frac{\partial P}{\partial s} + \mathcal{A}P](s, y; t, B) = 0 & \text{per } (s, y) \in (0, t) \times \mathbb{R}^n \\ P(t, y; t, B) = \mathcal{I}_B(y) \end{cases} \quad (1.20)$$

Seguendo lo stesso filo logico possiamo determinare un problema analogo che ammetta come soluzione la funzione densità.

Assumiamo quindi che la misura $P(s, y; t, B)$ abbia distribuzione uguale a $p(s, y; t, x)dx$, e serviamoci della seguente

Proposizione 1.2.8. *Sia $X(t)$ un processo soluzione dell'equazione (1.13), e sia $p(s, y; t, x)$ la densità della misura di probabilità $P(s, y; t, dx)$. Allora si avrà:*

$$\begin{cases} [\frac{\partial p}{\partial s} + \mathcal{A}p](s, y; t, x) = 0 & \text{per } (s, y) \in (0, t) \times \mathbb{R}^n \\ p(s, y; t, x) \rightarrow \delta_x & \text{per } s \mapsto t \end{cases} \quad (1.21)$$

con δ_x delta di Dirac.

Se ora consideriamo un processo stocastico $X(t)$ soddisfacente l'equazione (1.13), ed una funzione $h(t, x)$ a supporto compatto in $(s, T) \times \mathbb{R}$, applicando ad $h(t, X_t)$ la formula di Ito si ottiene:

$$h(T, X_T) = h(s, X_s) + \int_s^T \frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{A}h(t, X_t)dt + \int_s^T \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t)dW_t$$

A questo punto, calcolando l'attesa condizionata $E_{s,y}$ dei due membri, e sfruttando le relazioni $h(T, x) = h(s, x) = 0^2$ risulta:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^T p(s, y; t, x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A} \right) h(t, x) dt \right) dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_s^T h(t, x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}^* \right) p(s, y; t, x) dt \right) dx$$

²Tali relazioni sono dovute al fatto che la funzione $h(s, x)$ è a supporto compatto nell'aperto (s, T)

dove l'operatore ottenuto è definito come:

$$(\mathcal{A}^*)(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x}[\mu(t, x)f(t, x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(t, x)f(t, x)].$$

Con i risultati appena ottenuti, siamo ora in grado di introdurre le *equazioni di Fokker-Planck*, esponendo la seguente

Proposizione 1.2.9. *Sia $X(t)$ un processo soluzione dell'equazione (1.13), e sia $p(s, y; t, x)$ la sua densità. Allora quest'ultima soddisfa la condizione:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}p(s, y; t, x) = \mathcal{A}^*p(s, y; t, x) & \text{per } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \\ p(s, y; t, x) \rightarrow \delta_y & \text{per } t \rightarrow s \end{cases} \quad (1.22)$$

Capitolo 2

Il modello di Dupire

Il modello introdotto da Dupire nel 1993 è un'interessante estensione del modello Black-Scholes per il prezzaggio dei derivati. L'obiettivo di Dupire è stato quello di far fronte al cosiddetto '*effetto smile*', che al tempo era stato già notato nei mercati reali da insigni studiosi come Merton, Hull e White. Supponiamo, per esempio, di avere una opzione che ammette una volatilità del 20% per una maturità di sei mesi, e del 18% per una maturità di un anno. Allora ci troveremo nella spiacevole situazione in cui la volatilità ammette allo stesso istante due diversi valori percentuali costanti, e ciò non è accettabile. Un tentativo di risolvere il problema era stato dato proprio dagli studiosi sopra citati, i quali, durante i loro studi, avevano proposto di introdurre un altro processo, generatore di rischio, che si occupasse di esplicitare gli andamenti della volatilità. Una tale impostazione però fa perdere importanti proprietà del mercato come la completezza e la mono-dimensionalità del processo di diffusione, rendendo quindi l'argomento molto più complesso, e per tale motivo non verrà trattato.

Dupire si pone la semplice questione di esaminare un modello per la valutazione dei derivati, cercando comunque di mantenere alcune importanti proprietà che appartengono al modello originale di Black-Scholes. Vista dunque la stretta relazione tra i due modelli, è opportuno anteporre una breve illustrazione di quest'ultimo, e delle sue caratteristiche.

2.1 Il modello B-S, la volatilità implicita e gli effetti smile

Consideriamo un portafoglio V_t composto da titoli non rischiosi B_t e da altri rischiosi S_t , i quali andamenti sono descritti dalle relazioni:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

e

$$dB_t = r B_t dt.$$

dove μ e σ sono delle costanti che indicano rispettivamente il tasso di rendimento atteso e la volatilità, W_t è un moto Browniano ed r è il tasso di rendimento non rischioso. Se indichiamo con α_t il numero di titoli rischiosi presi in esame, e con β_t il numero di quelli non rischiosi, il portafoglio preso in esame viene definito come:

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t. \quad (2.1)$$

Indichiamo inoltre con $D_t = f(t, S_t)$ il valore dell'opzione da prezzare al tempo t . Allora gli obiettivi da raggiungere sono essenzialmente due:

1. determinare il prezzo dell'opzione considerata al variare del tempo;
2. trovare una strategia (α_t, β_t) tale che il portafoglio V_t risulti essere *replicante*. Un portafoglio V_t si definisce replicante se alla scadenza T vale $V_T = D_T$, cioè se il valore del portafoglio coincide con quello dell'opzione.

Quest'ultimo punto si definisce *copertura* dell'investimento. Se applichiamo all'ipotesi di avere un portafoglio replicante, il Principio di Non Arbitraggio¹, allora si avrà:

$$V_t = D_t \implies V_t - D_t = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

¹Il Principio di Non Arbitraggio garantisce l'impossibilità di avere un guadagno dal nulla.

Dopo aver introdotto le condizioni necessarie, consideriamo la variazione infinitesimale del portafoglio, ottenuta facendo variare i valori dei titoli e non le loro quantità:

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \quad (2.2)$$

Un portafoglio soddisfacente tale ipotesi è detto *autofinanziante*. Sfruttando la precedente relazione imposta dal P.d.n.A. si dovrà verificare:

$$V_t - D_t = 0 \implies d(V_t - D_t) = 0.$$

Per risolvere quest'ultima relazione, consideriamo separatamente le quantità dV_t e dD_t :

- $dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t = (\text{sostituiamo i valori noti di } dS_t \text{ e di } dB_t) =$
 $= \alpha_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \beta_t r B_t dt = (\alpha_t \mu S_t + r \beta_t B_t) dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t$
- $dD_t = df(t, S_t) = (\text{appliciamo la formula di Ito a } f(t, S_t)) = (\partial_t f +$
 $\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{ss} f) dt + \partial_s f dS_t = (\text{sostituendo a } dS_t \text{ il valore noto}) = (\partial_t f +$
 $\mu S_t \partial_s f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{ss} f) dt + \sigma S_t \partial_s f dW_t$

Se ora uguagliamo le parti deterministiche e le parti stocastiche delle quantità appena trovate, otteniamo la strategia (α_t, β_t) che rende il nostro portafoglio replicante. A tal fine, si avrà:

parti stocastiche $\alpha_t \sigma S_t = \sigma S_t \partial_s f \implies$ da questa relazione si ricava α_t , e sostituendolo in (2.1), per $V_t = f(t, S_t)$, si determina la strategia:

$$\begin{cases} \alpha_t = \partial_s f \\ \beta_t = \frac{f - S_t \partial_s f}{B_t} \end{cases}$$

parti deterministiche $\alpha_t \mu S_t + r \beta_t B_t = \partial_t f + \mu S_t \partial_s f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{ss} f$ andando a sostituire i valori di α_t e di β_t appena trovati, e facendo le dovute semplificazioni, si ottiene:

$$\partial_t f + r S_t \partial_s f + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f - r f = 0 \quad (2.3)$$

Abbiamo così definito l'equazione di Black-Scholes, risolvendo la quale si determina il prezzaggio del derivato. In particolare si tratta di risolvere il seguente problema di Cauchy con condizione finale:

$$\begin{cases} \partial_t f + rS_t \partial_s f + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f - rf = 0 \\ f(T, s) = \varphi(T) \end{cases} \quad (2.4)$$

dove la funzione $\varphi(T)$ è nota e prende il nome di *payoff* dell'opzione.

Consideriamo a questo punto un'opzione call europea su uno stock S_t , con strike² K e maturità T . Allora il precedente problema assumerà la forma:

$$\begin{cases} \partial_t f + rS_t \partial_s f + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{ss} f - rf = 0 \\ f(T, s) = (S_T - K)^+ \end{cases} \quad (2.5)$$

Supponendo ora di conoscere i valori dell'opzione al variare del tempo t , per esempio considerando i dati storici di essa, si può utilizzare la formula (2.3) per risalire al valore della volatilità, determinando il *valore implicito della volatilità*.

Apprendo una piccola parentesi, possiamo illustrare un ulteriore procedimento per risolvere l'equazione (2.3): consideriamo il prezzo scontato al tempo $\tau = T - t$ del derivato

$$e^{-r\tau} f(t, S_t)$$

e calcoliamone il differenziale:

$$\begin{aligned} d(e^{-r\tau} f(t, S_t)) &= e^{-r\tau} [(-rf + \partial_t f)dt + \partial_s f dS_t + \frac{1}{2} \partial_{ss} f d\langle S \rangle_t] = \\ &= e^{-r\tau} [(-rf + \partial_t f + rS_t \partial_s f + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{ss} f)dt + \sigma S_t \partial_s f dW_t] \end{aligned}$$

notiamo che il termine moltiplicato per dt è proprio l'equazione (2.2), per cui lo si può porre uguale a 0. Così facendo, riportando tutto in forma integrale, si ottiene:

$$e^{-r\tau} f(T, S_T) - e^{-r\tau} f(t, S_t) = \int_t^T e^{-r\tau} \sigma S_{t_1} \partial_s f(t_1, S_{t_1}) dW_{t_1}$$

²Si definisce strike di un'opzione il prezzo di esercizio dell'opzione.

Calcolando l'attesa di entrambi i membri, e ricordando che il valore atteso dell'integrale di Ito è nullo, si ottiene un fondamentale risultato:

$$f(t, S_t) = D_t = E[e^{-r\tau} f(T, S_T)] \quad (2.6)$$

vale a dire che il prezzo dell'opzione al tempo t è uguale all'attesa del valore scontato dell'opzione al tempo t .

Ritornando al problema (2.5), è importante osservare che per diversi valori dello strike K , cambia il valore implicito della volatilità. Questo fenomeno, comunemente chiamato *effetto smile*, viola chiaramente le ipotesi del modello Black-Scholes, nel quale la volatilità assume valori costanti. Ecco dunque il motivo per il quale è stato fondamentale elaborare un modello analogo che fosse un'estensione di quest'ultimo. È proprio su questa direzione che si è mosso Dupire. La sua attenzione si sofferma, come si potrà intuire, soprattutto sulla volatilità, che egli considera come una funzione deterministica dipendente dal tempo e dal valore attuale del sottostante.

Possiamo quindi introdurre quale sarà la dinamica utilizzata in questo modello:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(S_t, t) dW_t \quad (2.7)$$

Il modello di Dupire ci spiega, per quanto riguarda il problema di dare il prezzo ai derivati, come costruire un processo *'risk neutral'*, per la dinamica del prezzo del sottostante, nella forma di un processo di diffusione.

Possiamo allora affermare, prima di esplicitare la forma matematica di questo modello, che esso attribuisce un prezzo alle opzioni dipendenti dalla traiettoria del sottostante, come aspettazione del valore scontato del loro prezzo d'esercizio su tutte le possibili traiettorie, ritornando in pratica sulle orme del modello Black-Scholes. Se, come caso particolare, consideriamo le opzioni europee, il loro prezzo sarà ottenuto come aspettazione di tutti i possibili prezzi considerati alla scadenza del sottostante. Conoscere il prezzo $C(t, S_t)$ di un'opzione equivale sia a conoscere il processo di diffusione dS_t che modella l'andamento del sottostante, sia la legge con cui si distribuisce il processo S_t condizionata al valore attuale del sottostante. L'intero pro-

cesso di diffusione, però, contiene molte informazioni in più della legge condizionale. Ecco perché la nostra attenzione, in questo elaborato, è rivolta ai processi diffusivi, in particolare a quelli risk neutral. Di seguito vedremo come sarà possibile passare dalla legge condizionata, qualora è nota, ad un unico processo diffusivo, ovviamente risk neutral.

2.2 Come passare dai prezzi alle distribuzioni

Si consideri un insieme di opzioni, denotato con $C(K, T)$, di diversi strike K , ma tutte con la stessa maturità T , considerate sul medesimo sottostante. Se supponiamo che il sottostante abbia, alla scadenza T , una distribuzione del tipo:

$$S_T \sim \varphi_T dx$$

dove la funzione $\varphi_T(x)$ indica una densità condizionale. Allora il prezzo di questi derivati, per quanto detto anche in precedenza, si potrà scrivere come:

$$C(K, T) = \int_0^\infty (x - K)^+ \varphi_T(x) dx \quad (2.8)$$

Vediamo più nel dettaglio come si è arrivati a questo risultato.

2.2.1 Determinazione della funzione $C(K, T)$

Si definisce la funzione $C(K, T)$ come il valore atteso del payoff delle varie opzioni condizionato dalla conoscenza del valore del sottostante al tempo t , cioè:

$$E[(S_T - K)^+ | S_t]$$

ricordando che il processo S_T viene distribuito secondo una densità condizionale nota φ_T , otteniamo:

$$C(K, T) = E[(S_T - K)^+ | S_t] = \int_0^\infty (x - K)^+ \varphi_T(x) dx$$

che è proprio ciò che ci aspettavamo. Da questa uguaglianza è possibile risalire alla funzione densità φ_T differenziando per due volte rispetto a K entrambi i membri. Vediamo come.

2.2.2 La funzione densità risk-neutral φ_T

Per quanto detto in precedenza quindi, differenziando due volte rispetto a K entrambi i membri si ottiene:

- al primo membro

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

- al secondo membro, supponendo di poter invertire il calcolo dell'integrale con quello della derivata seconda, si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} \int_0^\infty (x - K)^+ \varphi_T(x) dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial K^2} (x - K)^+ \varphi_T(x) dx$$

applicando le proprietà viste nella teoria delle distribuzioni (vedi appendice B), vale

$$\left(\frac{\partial}{\partial K} \right)^2 (x - K)^+ = \delta_K(x)$$

dove la funzione $\delta_K(x)$ è detta *delta di Dirac*; ciò che si ottiene sarà:

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} \int_0^\infty (x - K)^+ \varphi_T(x) dx = \varphi_T(K)$$

Per cui possiamo concludere che :

$$\varphi_T(K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (2.9)$$

Consideriamo il seguente:

Esempio 2.1. Vediamo in questo esempio come si risolve la diffusione di un processo, nota la sua densità. A tal fine, consideriamo un punto iniziale (S_0, T_0) . Conoscendo il valore del sottostante al tempo T_0 , questo ammetterà densità uguale a :

$$\varphi_{T_0} = \delta_{S_0}(x)$$

Supponiamo che il processo in questione sia una martingala, allora questo ammetterà una diffusione del tipo $dS_t = b dW_t$. Per cui possiamo ricondurci al problema:

$$\begin{cases} dS_t = b dW_t \\ S_{T_0} = S_0 \end{cases}$$

A questo punto, ci si pone una questione importante ai fini del nostro discorso, vale a dire:

conoscendo tutte le densità condizionali al valore iniziale (x_0, t_0) , è unico il processo di diffusione che genera tali densità?

Il problema inverso di quello appena esposto è già stato studiato. Sappiamo infatti che dato un processo di diffusione del tipo:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_t \quad (2.10)$$

dove W_t è un moto browniano, i coefficienti $a(x, t)$ e $b(x, t)$ sono processi adattati, e vengono rispettivamente chiamati *termine di drift* e *volatilità*. Allora per un processo diffusivo del genere la densità condizionale φ_t è deducibile dall'equazione di Fokker-Planck, nel senso che, per $\varphi_t(x) = f(x, t)$, vale la relazione:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} - \frac{\partial (af)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.11)$$

È di rilevante importanza osservare che il processo diffusivo possiede molte più informazioni delle distribuzioni che lo generano, e non si fa molta fatica a trovare due processi diffusivi che ci riconducono alla medesima distribuzione. Ad esempio, nel punto iniziale $(x_0, t_0) = (0, 0)$ si possono ricavare i due processi diffusivi:

$$dx = -\lambda x dt + \mu dW_t$$

e

$$dx = \mu e^{-\lambda t} dW_t$$

Questi processi hanno la stessa media e la stessa varianza $\forall t$, e possiamo scrivere

$$E(x) = 0 \text{ e } Var(x) = \frac{\mu^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})$$

La considerazione notevole da fare, visto anche quanto detto in precedenza, è che se consideriamo solamente le diffusioni 'risk neutral' abbiamo la possibilità di recuperare un unico processo diffusivo dalla funzione densità $f(x, t)$. Vediamo come.

2.3 Come passare dalle distribuzioni alle diffusioni

Esaminiamo ora l'equazione di Fokker-Planck. In questa equazione f è il dato conosciuto, mentre b è quello sconosciuto. Supponiamo che $a = 0$, e che il tasso di interesse istantaneo sia nullo. In tal caso la (2.11) assumerà la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dai risultati ottenuti in precedenza, si ha:

$$f(x, t) = \varphi_T(x) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

per cui, andando a sostituire, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right) \quad (2.12)$$

Integrando due volte entrambi i membri, rispetto alla variabile x , otteniamo:

$$\frac{1}{2} b_{\alpha, \beta}^2 f = \frac{\partial C}{\partial t} + \alpha(t)x + \beta(t) \quad (2.13)$$

dove $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono delle funzioni, ottenute dal calcolo dell'integrale, dipendenti solo dalla variabile t , e quindi costanti rispetto alla x .

Possiamo assumere le due funzioni α e β nulle. Questo deriva dall'assunzione della condizione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial C}{\partial t}(x, \cdot) = 0 \quad \forall t$$

Uno spunto della dimostrazione di ciò lo si ha ragionando per assurdo: assumiamo perciò l'esistenza di un valore strettamente positivo γ minore di $b^2 f$, il quale è a sua volta minore di $v^2 x^2 f$, per un valore non negativo di v , poiché la funzione $b(t)$ cresce poco velocemente. Possiamo quindi scrivere:

$$\gamma \leq b^2 f \leq v^2 x^2 f \implies x f \geq \frac{\gamma}{v^2 x}$$

ma quest'ultima affermazione contraddice il fatto che f ha un'aspettazione finita uguale a x_0 . Per cui l'assunzione fatta in precedenza è vera, e per tale motivo le due funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono nulle.

Da queste osservazioni viene necessariamente che:

$$\frac{1}{2}b^2f = \frac{\partial C}{\partial t}$$

e sottolineando il fatto che $f(x, t) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.14)$$

Supponendo di avere le due derivate parziali positive, possiamo scrivere b nella forma:

$$b(x, t) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C}{\partial t}(x, t)}{\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t)}} \quad (2.15)$$

Ricordando che la variabile x indica lo strike K , possiamo riscrivere la (2.14) nella forma:

$$\frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial C}{\partial T}$$

per cui, ritornando al nostro problema iniziale (2.7), per come abbiamo definito il processo diffusivo, possiamo ricavare la volatilità locale dalla formula:

$$\sigma(S_t, t) = \frac{b(S_t, t)}{S_t}$$

vale a dire:

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C}{\partial t}(K, T)}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K, T)}} \quad (2.16)$$

o meglio:

$$2 \frac{\partial}{\partial t} C(K, T) - \sigma^2(K; T) K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(K; T) = 0 \quad (2.17)$$

Questa formula, conosciuta come *formula di Dupire*, mostra come, in un contesto semplice come il nostro, sia possibile risalire alla volatilità, ricavando la funzione $b(t, K)$, supponendo esclusivamente che la funzione densità

soddisfi l'equazione di Fokker-Planck. L'importanza applicativa della (2.16) sta soprattutto nel fatto che una volta nota, da essa è possibile ricavare la volatilità per ogni valore dello strike e della maturità.

2.4 La teoria della volatilità

Per quanto visto nel paragrafo precedente, Dupire ha definito un modello del prezzaggio di derivati che estende quello di Black e Scholes. Tale modello tiene in considerazione gli effetti smile, impliciti dal mercato, della volatilità, ed è basato su derivate parziali rispetto al tempo corrente ed al valore dello strike.

In seguito Savine (Cf. [7]) ha dimostrato che è possibile fare un'estensione anche per il modello Dupire, prendendo in considerazione alcune assunzioni più realistiche, come ad esempio dei tassi di interesse risk-free r non nulli, oppure dividendi, o volatilità stocastiche.

2.4.1 La strategia senza stop ed il tempo locale

Supponiamo di trovarci in un sistema economico senza costi finanziari, e consideriamo un'opzione call scritta su uno stock, per la quale S_t rappresenta il prezzo del sottostante al quale si riferisce, quotato al tempo t , K indica lo strike dell'opzione, e T la maturità. Assumiamo inoltre che lo stock ha una volatilità istantanea σ , che può essere una funzione costante, oppure dipendente dal tempo, o dal prezzo del sottostante, o addirittura stocastica. Per cui, presa la funzione payoff di un'opzione call $(S_t - K)^+$, applichiamo ad essa la formula di Tanaka (indicando con $f(t, S_t) = (S_t - K)^+$), secondo cui:

$$df(t, S_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)\sigma_t^2 dt$$

ed osservando che per una funzione come quella che stiamo assumendo valgono le proprietà:

- $\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) = 0$ poiché non c'è dipendenza dal tempo;

- $\frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) = 1_{\{S_t > K\}}$ (Cf. appendice B);
- $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) = \delta_K(S_t)$ (Cf. appendice B);

passando all'equivalente forma integrale, il risultato che si ottiene sarà:

$$(S_T - K)^+ = (S_0 - K)^+ + \int_0^T 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_K(S_t) \sigma_t^2 dt \quad (2.18)$$

dove il primo membro è il valore del payoff dell'opzione alla maturità T , mentre il secondo membro è composto da 3 termini, vale a dire:

1. $(S_0 - K)^+$ è il valore intrinseco dell'opzione, cioè stabilisce se all'inizio della stipulazione l'opzione ha potenzialmente valore o meno;
2. $\int_0^T 1_{\{S_t > K\}} dS_t$ è il risultato di una strategia autofinanziante consistente nel tenere un'unità di stock se il valore di S_t del sottostante è maggiore dello strike, o niente se è minore;
3. $\frac{1}{2} \int_0^T \delta_K(S_t) \sigma_t^2 dt$ è il termine di non replicazione. Se si applica la strategia per replicare il payoff dell'opzione, allora la copertura sarà data proprio da questo termine, che prende il nome di *tempo locale* allo strike.

L'interpretazione intuitiva di quest'ultimo termine è la seguente: se il valore del sottostante non oltrepassa mai lo strike durante tutta la vita dell'opzione, allora il termine è nullo (ciò è dovuto al fatto che $\delta_K(S_t) = 0$ sempre), e quindi la replicazione si dice perfetta. Se, al contrario, lo oltrepassa, vuol dire che bisogna vendere lo stock ad un prezzo leggermente inferiore allo strike quando il valore del sottostante scende sotto lo strike stesso, mentre bisogna comprare lo stock ad un prezzo leggermente superiore allo strike quando il valore del sottostante va al di sopra dello strike.

Questo fenomeno non è collegato ai costi di operazione, ma al fatto che il moto Browniano ha un andamento troppo rapido da poterci permettere di

comprare e/o vendere esattamente nel momento in cui il sottostante coincide con il prezzo dello strike, e ciò altera in maniera considerevole il meccanismo.

Per rendere più comprensibile questo concetto, esaminiamo il seguente esempio:

Esempio 2.2. Consideriamo un portafoglio del tipo

$$V_t = 1_{\{S_t > K\}} S_t$$

su un intervallo $[0, T]$. Consideriamo inoltre su tale intervallo una partizione (t_k) tale che $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$. Allora la variazione del portafoglio sarà data da:

$$V_T - V_0 = \sum_{k=0}^n 1_{\{S_t > K\}} (S_{t_k} - S_{t_{k-1}})$$

Supponiamo che il processo determinante l'andamento del sottostante oltrepassi il valore fissato dello strike K negli istanti di tempo t_1, t_2, t_3 , sapendo che negli istanti t_0 e t_n si ha $S_t < K$. Possiamo quindi affermare che il valore del nostro portafoglio sarà:

$$V_T = (S_{t_2} - S_{t_1}) + (S_{t_3} - S_{t_2}) = S_{t_3} - S_{t_2}$$

Applicando ora la formula (2.17), per $V_T = (S_T - K)^+$ si ottiene:

$$V_T = S_{t_3} - S_{t_2} + (S_{t_0} - K)^+ = S_{t_3} - S_{t_2} < 0$$

per ipotesi. Abbiamo perciò ottenuto una strategia non replicante.

L'esempio fa capire che se non si considera la variabile tempo locale, non si avrà replicamento.

Possiamo osservare che il tempo locale è una variabile aleatoria, per cui, se ne calcoliamo il suo valore atteso neutrale al rischio si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E \left[\int_0^T \delta_K(S_t) \sigma_t^2 dt \right] &= \frac{1}{2} E \left[\int_0^T \delta_K(S_t) E(\sigma_t^2 | S_t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x) \delta_K(x) E(\sigma_t^2 | S_t = x) dx \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t(K) E(\sigma_t^2 | S_t = K) dt \end{aligned}$$

da cui si ricava quello che si definisce *time value* dell'opzione, vale a dire:

$$TV = \frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t(K) E(\sigma_t^2 | S_t = K) dt \quad (2.19)$$

Quest'ultimo risultato mostra che il time value di un'opzione dipende solamente da:

- il valore allo strike della densità risk-neutral $\varphi_t(K)$;
- il valore atteso del quadrato della volatilità condizionato dal fatto che il sottostante coincide con lo strike;

Inoltre, se supponiamo di avere un'opzione europea, allora la densità risk-neutral possiamo scriverla come in (2.9)

2.5 La teoria degli smile di Dupire

In questo paragrafo mostreremo come è possibile arrivare allo stesso risultato ottenuto precedentemente in pochissimi passi, applicando la formula di Tanaka. Assumiamo quindi le stesse ipotesi fatte nel paragrafo precedente, vale a dire supponiamo di trovarci in una situazione economica in cui non ci sono tassi di interessi, e supponiamo che la volatilità dipenda direttamente dal prezzo dello stock. Possiamo quindi considerare $\sigma_t = h(t, S_t)$, ed applicando la formula di Tanaka alla solita funzione $(S_t - K)^+$ si ottiene:

$$d(S_t - K)^+ = \frac{\partial}{\partial t}(S_t - K)^+ dt + \frac{\partial}{\partial x}(S_t - K)^+ dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S_t - K)^+ h^2(t, S_t) dt$$

Svolgendo le dovute semplificazioni, si arriva alla forma concisa:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} \delta_K(S_t) h^2(t, K) dt$$

che espressa in forma integrale, equivale a scrivere:

$$(S_T - K)^+ - (S_0 - K)^+ = \int_0^T 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_K(S_t) h^2(t, K) dt$$

Applicando ancora una volta l'operatore di valore atteso otteniamo:

- al primo membro: $E[d(S_t - K)^+] = dE[(S_t - K)^+] = dC(t, K)$ per definizione della funzione $C(t, K)$;
- al secondo membro:

$$E[1_{\{S_t > K\}} dS_t] = 0$$

poiché vale $E[dS_t] = 0$, e

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{2}\delta_K(S_T)h^2(t, K)dt\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x) \left(\frac{1}{2}\delta_K(S_T)h^2(t, K)dt\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}h^2(t, K)\varphi_t(K)dt \end{aligned}$$

per cui quello che si ottiene è:

$$dC(t, K) = \frac{1}{2}h^2(t, K)\varphi_t(K)dt$$

che equivale a scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t, K) = \frac{1}{2}\varphi_t(K)h^2(t, K) \quad (2.20)$$

Sapendo già che vale la relazione (2.9), possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t, K) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial K^2}C(t, K)h^2(t, K)$$

dalla quale si ricava la formula:

$$h(t, K) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial}{\partial t}C(t, K)}{\frac{\partial^2}{\partial K^2}C(t, K)}} \quad (2.21)$$

Notiamo che nella forma è equivalente alla funzione (2.15).

2.6 La volatilità stocastica

Introduciamo brevemente un ulteriore aspetto della teoria della volatilità di Dupire. Supponiamo quindi, di avere un tasso di interesse nullo, per cui possiamo assumere un generico processo del tipo

$$dS_t = \sigma_t dW_t$$

sul prezzo dello stock. In generale possiamo non supporre restrizioni sulla volatilità, la quale quindi può dipendere dal tempo, o dal prezzo del sottostante, o altro. La conclusione alla quale è arrivato Dupire, nel caso in cui la volatilità sia stocastica, è:

$$E[\sigma_t^2 | S_t = K] = 2 \frac{\frac{\partial C}{\partial t}(t, K)}{\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)} \quad (2.22)$$

Osserviamo che nel caso deterministico questo risultato coincide con la volatilità già trovata nella (2.20). Per dimostrarla basta come al solito applicare la formula di Tanaka alla funzione payoff $(S_t - K)^+$ e calcolare poi per entrambe i membri il loro valore atteso.

Appendice A

La formula di Ito

Qui di seguito riportiamo la dimostrazione della formula di Ito già esposta nel paragrafo (1.2). Sia X_t un processo che soddisfa l'equazione differenziale stocastica (1.13), e sia f una funzione di classe $C^2([0, t] \times \mathbb{R})$. Supponiamo di poter trovare una scomposizione $\alpha = (t_n)$ dell'intervallo, tale che $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Allora si avrà:

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(t_{k+1}, X(t_{k+1})) - f(t_k, X(t_k))]$$

Essendo $f(t, X(t)) \in C^2$ possiamo considerare lo sviluppo di Taylor della funzione con punto iniziale $(t_k, X(t_k))$

$$\begin{aligned} f(t_{k+1}, X(t_{k+1})) - f(t_k, X(t_k)) &= \partial_t f(t_k, X(t_k)) \Delta t + \\ &+ \partial_x f(t_k, X(t_k)) \Delta X_k + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t_k, X(t_k)) (\Delta X_k)^2 + Q_k \end{aligned}$$

dove Q_k è il resto dello sviluppo. Osserviamo che l'incremento ΔX_k può assumere la forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_k = X(t_{k+1}) - X(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(s) dW(s) \\ &= \mu(t_k) \Delta t + \sigma(t_k) \Delta W_k + S_k \end{aligned}$$

con S_k che definisce il resto dello sviluppo in serie. Andando quindi a sostituire allo sviluppo della funzione $f(t, X(t))$ i valori di ΔX_k e di

$$(\delta X_k)^2 = \mu^2(t_k) (\Delta t)^2 + 2\mu(t_k) \sigma(t_k) \Delta t \Delta W_k + \sigma^2(t_k) (\Delta W_k)^2 + P_k$$

si ottiene:

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2}I_4 + \frac{1}{2}K_1 + K_2 + R \quad (\text{A.1})$$

dove:

- $I_1 = \sum_k \partial_t f(t_k) \Delta t$
- $I_2 = \sum_k \partial_x f(t_k) \mu(t_k) \Delta t$
- $I_3 = \sum_k \partial_x f(t_k) \sigma(t_k) \Delta W_k$
- $I_4 = \sum_k \partial_{xx} f(t_k) \sigma^2(t_k) (\Delta W_k)^2$
- $K_1 = \sum_k \partial_{xx} f(t_k) \mu^2(t_k) (\Delta t)^2$
- $K_2 = \sum_k \partial_{xx} f(t_k) \mu(t_k) \sigma(t_k) \Delta t \Delta W_k$
- $R = \sum_k [Q_k + S_k + P_k]$

raffinando ora la scomposizione α , per $n \rightarrow \infty$, si ottengono i risultati:

$$I_1 \rightarrow \int_0^t \partial_t f(s, X(s)) ds$$

$$I_2 \rightarrow \int_0^t \partial_x f(s, X(s)) \mu(s) ds$$

,

$$I_3 \Rightarrow \int_0^t \partial_x f(s, X(s)) \sigma(s) dW(s)$$

per le proprietà dei moti Browniani visti in, si ha

$$I_4 \rightarrow \int_0^t \partial_{xx} f(s, X(s)) \sigma^2(s) ds$$

$$K_1 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad K_2 \rightarrow 0$$

Per cui, sostituendo i valori degli integrali definiti, si dimostra la formula di Ito. Naturalmente anche il resto R tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Per la dimostrazione, consultare il testo (Cf. [2]).

Appendice B

Distribuzioni

Alle definizioni di distribuzione, e di derivata rispetto ad una distribuzione, occorre premettere alcune nozioni. Indichiamo con D un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni definite su $\mathbb{R}^n$. Poniamo $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Lo spazio D gode delle seguenti proprietà:

- D è uno spazio vettoriale;
- se $\varphi(\mathbf{x}) \in D$ allora anche $\varphi^{(n)}(\mathbf{x}) \in D \quad \forall n > 0$;
- D è chiuso rispetto alla moltiplicazione cioè se $\varphi_1(\mathbf{x})$ e $\varphi_2(\mathbf{x}) \in D$ allora anche $\varphi_1(\mathbf{x})\varphi_2(\mathbf{x}) \in D$.

In tale contesto, la terminologia $\varphi^{(n)}(\mathbf{x})$ indica la derivata parziale n-esima. Possiamo dare ora la seguente

Definizione B.1. Si definisce *distribuzione* un funzionale T lineare e continuo su D , e si indica con $\langle T, \varphi \rangle$.

Lo spazio delle distribuzioni sullo spazio D lo si indica con D' . Osserviamo che D' gode delle proprietà:

- D' è un spazio vettoriale;
- una funzione $f(x)$, per $x \in \mathbb{R}$ genera una distribuzione del tipo

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

Tenendo presente che data una $\varphi \in D$, anche le derivare di qualunque ordine di φ appartengono a D , si pone la seguente definizione di derivata, nel caso unidimensionale.

Definizione B.2. Data una distribuzione T , si definisce *distribuzione derivata* T' quella distribuzione che associa ad ogni $\varphi(t) \in D$ lo stesso numero, cambiato di segno, che associa T a $\varphi'(t) \in D$, vale a dire:

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D$$

La definizione appena esposta è congruente con il risultato che si ottiene applicando l'integrazione per parti all'integrale che definisce la distribuzione generata dalla derivata di una funzione. Vale a dire:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt$$

essendo $\varphi(t)$ a supporto compatto. Ciò spiega i risultati ottenuti nel paragrafo (2.4.1), vale a dire:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - K)^+ = 1_{\{x > K\}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x - K)^+ = \frac{\partial}{\partial x}(1_{\{x > K\}}) = \delta_K(x)$$

Bibliografia

- [1] BELARDINELLI, E. and BONIVENTO, C. *Teoria delle Distribuzioni*, Pàtron Press, 1968.
- [2] BJÖRK, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 2004.
- [3] BLACHER, G. *Pricing with a Volatility Smile*, Reech Capital PLC
- [4] DUPIRE, B. *Pricing and Hedging with Smile*, Risk Magazine, 1993.
- [5] EPPS, T. W. *Pricing Derivatives Securities*, World Scientific, 2000
- [6] FLEMING, W.H. *Functions of Several Variables* Springer, 1977.
- [7] SAVINE, A. *A Theory of Volatility*, Head of Research for Asia, Group BNP-Paribas, Anno.
- [8] SCHMITZ, K. *Introduction of Implied, Local and Stochastic Volatility*, <http://www.maths.ox.ac.uk/~schmitz/project1.htm>.
- [9] WILMOTT, P. HOWISON S. and DEWYNNE, J. *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1995.

Ringraziamenti

Ringrazio di cuore Bernardo, Giovanna, Mariagrazia, Stefania e Sara per avermi sostenuto e sopportato durante questo percorso triennale. Ringrazio il professor Andrea Pascucci per la disponibilità offerta nella stesura dell'elaborato. Un ringraziamento particolare va alle persone a me più care, Carlo, Rosa, Natale, Cristian, la piccola Mariagrazia e Teresa. Grazie di cuore.