

Indice

1	Sul modello di F.Black e B.Scholes (1973).	7
1.1	Sulla dinamica dei prezzi nel modello di F.Black e B.Scholes. .	7
1.2	Costruzione del portafoglio senza rischio	9
1.3	La formula di Black e Scholes.	15
1.4	Metodo martingala equivalente	20
1.5	Critica del modello e generalizzazioni	24
2	Generalizzazioni a volatilità stocastica del modello di F.Black e B.Scholes.	31
2.1	Il modello “Displaced-Diffusion”.	33
2.2	Il modello C.E.V.	34
2.3	Il modello di Dupire e la volatilità locale	37
2.4	Il modello di Hobson e Rogers	41

Introduzione

Questo lavoro si occuperà di alcuni particolari modelli matematici per dare un prezzo ai contratti derivati. Tuttavia, prima di addentrarsi nella parte tecnica e nell'esame matematico di ogni singolo modello, mi sento in dovere di disegnare un quadro più generale nel quale queste poche pagine trovino un senso più marcato, che non sia solo l'esatta successione di oggetti in un elenco. A questo scopo ho dedicato questa brevissima introduzione.

Per prima cosa ci si chiede come vengano giudicati i modelli. Quando un modello non funziona? Quando diventa obsoleto? Ovviamente non risponderemo a queste domande, ma nel riflettere sul loro significato emerge già il quadro all'interno del quale si agisce: si può, quindi, svelare il nome dell'interlocutore principale con il quale si discutono questo genere di argomenti. Questo interlocutore è il mercato. E' infatti esso a determinare l'orizzonte del nostro giudizio. Il mercato è, quindi, l'oggetto fenomenologico col quale e per il quale si deve argomentare. Non cercheremo qui di definire questo oggetto chiamato mercato, ma lo si tenga nella stessa considerazione nella quale un fisico terrebbe la realtà sensibile che intende indagare. Tuttavia, al contrario della realtà fisica, un mercato porta con se, oltre che dati numerici, che il modello deve farsi carico di giustificare, anche strutture giuridiche e persino comportamenti legati alla psicologia degli investitori. Quindi, il mercato suggerirà, oltre che i termini di giudizio sul modello compiuto, anche ipotesi economiche e di altra natura sulle quali iniziare a costruire i modelli stessi.

Se esiste un interlocutore principale, ne deve venire pure l'esistenza di

uno secondario. Quest'ultimo interlocutore è la matematica: il linguaggio attraverso il quale vengono formalizzati i modelli. Lo definivamo secondario non perché meno importante, infatti oggi quale senso avrebbe giudicare più importante la 'cosa' rispetto alla parola che la esprime? Ma secondario perché, essendo proprio l'idioma con cui si elaborano questo genere di discorsi, si tende a risaltare più il significato della esposizione che la sua forma. Come chi, nella buona intenzione di descrivere i fenomeni, pensi immediatamente di possederli nel suo discorso, dimentico del fatto che, se qualcosa esso riuscisse davvero a possedere, sarebbe solo mediatamente e successivamente; immediatamente ed alla prima avrebbe davanti nient'altro che le parole con cui sta argomentando. Quindi la matematica gioca un ruolo essenziale perché, senza che sia cosa immediatamente evidente ai nostri occhi, è proprio essa che, con i suoi crismi e la sua espressività, detta le regole per far parlare i dati. Perché, ricordiamo, i dati non direbbero nulla e non significherebbero nulla se non ci fosse chi gli dia voce: la matematica nel nostro caso.

Ciò detto, entrando nel particolare di questo lavoro, si può osservare in modo chiaro nella sequenza storica dei modelli matematici per apprezzare i derivati che uno, più di altri, ha lasciato un segno, sia per numero di citazioni che per sue varianti: il modello di F.Black e S.Scholes (1973). Questo modello, che sarà brevemente introdotto nel primo capitolo, almeno nelle parti più significative per il nostro discorso, arriva nella sua conclusione, a dettare una formula esplicita per dare il prezzo ad opzioni call europee. Come spesso capita: le sentenze, anche se 'corrette', sono molto meno prolifiche delle ponderate argomentazioni; e così è capitato anche per il modello di F.Black e S.Scholes. Infatti la formula a cui giungono, infine, i due insigni economisti altro non è che la stessa a cui giunse dieci anni prima Bonnes, ma le argomentazioni portate dai primi due sono ben più profonde e potenti di quelle del loro predecessore. Tali argomentazioni saranno, in parte, l'oggetto del primo capitolo.

Il modello di F.Black e S.Scholes sarà, dunque, il nostro punto di partenza. Dico punto di partenza perché anch'esso, il più acclamato dei modelli

di questo genere, dovette cozzare con quello che sopra abbiamo chiamato il suo interlocutore principale: il mercato. Dal 1973, anno della pubblicazione, molte sono state le rivisitazioni del modello di F.Black e S.Scholes; rivisitazioni che hanno attraversato lavori di riformulazione equivalente per mezzo di altri strumenti matematici, penso ai lavori di Harrison e Kreps (1979); e rivisitazioni che hanno fatto notare una dissimiglianza patologica delle previsioni del modello rispetto ai dati stessi del mercato, e hanno portato alla luce alcune contraddizioni di principio nella logica del modello. E sarà l'analisi di queste ultime direzioni seguite dalla letteratura l'oggetto di questo lavoro. Si esamineranno infatti alcune varianti dette con volatilità incerta del modello di F.Black e S.Scholes.

Capitolo 1

Sul modello di F.Black e B.Scholes (1973).

In questo capitolo verranno espone, al fine del nostro discorso, alcune riflessioni sulla struttura del modello di F.Black e B.Scholes [3]. Come abbiamo già scritto, il lavoro dei due insigni studiosi sarà la base su cui costruire i modelli che saranno considerati nei capitoli successivi; questo implicherà una presentazione del modello plasmata secondo i nostri fini e non secondo l'esposizione del lavoro originale. Alla fine del capitolo verranno presentate delle motivazioni per cui questo modello necessiterebbe di mutazione.

1.1 Sulla dinamica dei prezzi nel modello di F.Black e B.Scholes.

L'ipotesi essenziale su cui si costruisce il modello di F.Black e B.Scholes sta nel fatto che i prezzi dei beni finanziari seguano una legge S_t , dove t è il tempo secondo il quale la legge si evolve, $t \in \mathbb{R}^+$; tale legge deve soddisfare una ben determinata equazione differenziale stocastica. L'equazione di cui si discute è:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (1.1)$$

$\{W_t\}_{t>0}$ è un moto Browniano che trova senso sulla struttura $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$: Ω , insieme non vuoto; $\mathcal{F}$, σ -algebra; $\{\mathcal{F}_t\}$, una filtrazione; P , una legge di probabilità. Ovviamente si devono dare ipotesi su $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ e $\{\sigma_t\}_{t\geq 0}$. Essi sono processi stocastici appartenenti ad $\Lambda_w^2[0, T]$, processi elementari adattati alla filtrazione del moto browniano. Sotto queste ipotesi potremmo essere sicuri, invocando i teoremi di esistenza per la soluzione delle equazioni differenziali stocastiche, dell'esistenza della soluzione. Ma per questa equazione è possibile esplicitare la soluzione con una semplice applicazione della formula di Itô.

Proposizione 1.

Data l'equazione differenziale stocastica $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ e siano μ e σ costanti positive, allora $\log \tilde{S}_t$, dove $\tilde{S}_t$ è un moto browniano geometrico, è soluzione dell'equazione data.

Dimostrazione. Questa proposizione pur essendo molto semplice da dimostrare sostiene una cosa molto importante: sostiene la log-normalità delle variabili aleatorie del processo stocastico che è soluzione dell'equazione differenziale stocastica, log-normalità che, come faremo notare poco avanti, possiede importanti proprietà che rendono adatta questa soluzione a modellizzare i prezzi dei beni finanziari.

Si calcoli il differenziale stocastico di $\log S_t$ per mezzo della formula di Itô:

$$d(\log S_t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2S_t^2} d\langle S \rangle_t$$

dove $d\langle S \rangle_t$ è un processo a variazione quadratica che nel nostro caso:

$$d\langle S \rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt$$

si ricava così da ciò che precede:

$$d(\log S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

Dunque come soluzione si ricava il processo:

$$S_t = s e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

che è appunto un moto browniano geometrico tale che $S_0 = s$

□

Questa modellizzazione è particolarmente adatta al nostro scopo perché le quantità in esame, dovendo essere un modello per i mercati finanziari, devono essere positive, cioè $S_t \geq 0$ quasi certamente per ogni $t \geq 0$. Inoltre il logaritmo è molto utile perché gli incrementi dei prezzi sono da considerarsi in senso moltiplicativo, il che significa: se il prezzo sale di $p\%$ dal tempo u al tempo t , il rapporto $\frac{S_t}{S_u} = 1 + \frac{p}{100}$.

Possiamo generalizzare la proposizione precedente anche per processi stocastici $\{\mu_t\}_t$ e $\{\sigma_t\}_t$ appartenenti a $\Lambda_w^2[0, +\infty[$. Il tutto non cambia, e applicando la formula di Itô dal tempo u al tempo t si ricava:

$$\log S_t - \log S_u = \int_u^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_u^t \sigma_s dW_s$$

E valgono ancora tutte le considerazioni sulla log-normalità. Infatti ne viene che:

$$S_t \sim S_u e^{\int_u^t (\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}) ds + Z \sqrt{\int_u^t \sigma_s^2 ds}}$$

Assumendo $0 < u < t$ e $Z \sim N(0, 1)$, si verifica che S_t è distribuita log-normalmente.

In conclusione affermiamo che l'ipotesi essenziale su cui si basa il lavoro di F.Black e B.Scholes è di considerare i prezzi come soddisfacenti l'equazione (1.1). Tutte le inferenze che seguiranno: la costruzione di un portafoglio privo di rischio, la determinazione della formula per il prezzo delle opzioni europee,... tutte queste considerazioni del modello saranno inferite sulla base di questa pesantissima ipotesi: i prezzi seguono la dinamica (1.1). Questa dinamica possiede l'importantissima proprietà di considerare le variabili aleatorie S_t log-normali, il che va benissimo al fine di modellizzare i prezzi.

1.2 Costruzione del portafoglio senza rischio

Diciamo due parole sui contratti derivati. Un derivato è un contratto che lega il suo valore a quello di uno o più beni chiamati sottostanti, questo legame è determinato dal tipo di contratto considerato. I beni sottostanti a cui si legano i derivati devono avere quotazioni ufficiali e pubblicamente

riconosciute. Ora parleremo di particolari contratti derivati chiamati opzioni call europee. Attraverso questo tipo di derivati uno dei sottoscrittori del contratto acquista il diritto di vendere all'altro una fissata quantità di beni sottostanti ad una certa data per un prezzo stabilito. E' ovvio che l'acquisto del diritto comporta la corresponsione di un pagamento, detto premio. Determinare un modo per stabilire l'entità del premio per le opzioni call europee sarà l'argomento di questa sezione; ciò è importante perché il lavoro di F.Black e B.Scholes si era occupato proprio di questo. L'innovazione di tale modello non stava tanto nella formula a cui si giunge, ma nel procedimento che veniva adottato.

Innanzitutto consideriamo un mercato libero da arbitraggi, cioè un mercato in cui due beni identici debbano essere venduti allo stesso prezzo, se è fissato il luogo e il tempo, e nel quale non sia possibile ottenere senza costo un bene che ha valore nel mercato. Chiamiamo portafoglio un insieme di beni appartenenti a questo mercato. Consideriamo i prezzi per una unità di bene dei beni che appartengono al portafoglio: $M, S_1, S_2, \dots, S_n$. In questo caso il numero M serve a differenziare i prezzi di beni differenti, più avanti considereremo un solo bene e il deponente segnerà, come nella sezione precedente, lo sviluppo temporale del processo, la sua dipendenza da t . Specificheremo quando ciò avverrà. Tutti i prezzi dei beni in portafoglio si pone seguono la dinamica (1.1), eccetto uno, M . Quindi diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.

Si chiami M bene senza rischio del portafoglio considerato se vale:

$$dM_t = r_t M_t dt$$

Da cui, considerando come valore iniziale M_0 , si può scrivere:

$$M_t = M_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

osservazione 1. *Con questa definizione siamo certi che almeno un bene appartenente al portafoglio abbia un rendimento certo r_t . Nella realtà questo*

corrisponde ad un investimento fatto, per esempio, in titoli di stato o ad un deposito su un conto corrente bancario; questi investimenti si possono, con buona approssimazione, considerare senza rischio, cioè mancanti del termine aleatorio che rende incerta la rendita. Ma possiamo essere certi dell'esistenza di un tale bene nel mercato che consideriamo? Certamente, perché il mercato che abbiamo posto ospitare il nostro portafoglio è un mercato libero da arbitraggio.

Definizione 2 (Portafoglio).

Definiamo un portafoglio come un processo stocastico V_t sulla struttura $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \{W_t\}_t, P)$, dove $\{W_t\}_t$ è un moto browniano, tale che:

$$V_t = H_0(t)M(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)S_i(t)$$

dove $S_i(t)$ verifica l'equazione stocastica (1.1) per ogni i , e le funzioni M e $H_i(t) \in \Lambda_w^2[0, +\infty[\quad \forall i = 0, \dots, n$.

osservazione 2. Questa definizione è di facile interpretazione; infatti la funzione $H_j(t)$ rappresenta la quantità di j -esimo bene, al tempo t , che compone il portafoglio e che assume il prezzo per unità $S_j(t)$ con $1 \leq j \leq n$. Quindi V_t rappresenta il valore di mercato del portafoglio al tempo t .

Definizione 3 (Portafoglio autofinanziante).

Un portafoglio si definisce autofinanziante se si verifica la condizione:

$$dV_t = H_0(t)dM(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)dS_i(t)$$

osservazione 3. Portafoglio autofinanziante significa che istantaneamente non viene né aggiunto né tolto capitale dal portafoglio, ma si lascia la possibilità di variare in ogni momento la distribuzione del capitale fra i beni in portafoglio. Così, solo in termini di esempio, se ad un tempo t si possedesse un portafoglio composto da due titoli con valore rispettivo di \$1 e di \$2, e quantità rispettive di 20 e 10, allora allo stesso tempo il portafoglio avrà un valore di mercato di \$40, ed io potrei senza aggiungere nulla ridistribuire

il capitale esistente fra i titoli del portafoglio in modo diverso: ad esempio vendendo 10 unità del primo titolo e, simultaneamente, comprandone 5 del secondo. Avrei così un portafoglio con 10 unità del primo titolo e 15 del secondo, senza aver modificato il capitale totale.

Giunti a questo punto possediamo le ipotesi e gli strumenti per seguire in modo sintetico ma sostanziale il ragionamento di F.Black e B.Scholes. Dare il prezzo ad un derivato significa costruire, se questo è possibile, un portafoglio privo di rischio che replichi, istante per istante, il valore del contratto attraverso una appropriata miscela di unità di bene ed opzioni call vendute. In questo modo alla scadenza saprò che il valore del derivato è rappresentato dal portafoglio replicante. Ma vediamo tutto questo in modo analitico.

Diamo ora qualche particolare definizione che useremo nel teorema che seguirà.

- S_t sarà il prezzo di un sottostante che segue la dinamica dipendente da t data dall'equazione differenziale stocastica (1.1).
- p_t sarà la quantità di sottostante al tempo t , che analiticamente viene rappresentata come un processo stocastico $\Lambda_w^2[0, +\infty[$.
- $c(S_t, t)$ sarà il prezzo di un'opzione europea call legata al sottostante S , quindi sarà una funzione $C_{(\mathbb{R} \times [0, T])}^{(2)}$, con $c: \mathbb{R} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.
- q_t sarà la quantità di opzioni possedute al tempo t , cioè pure essa un processo $\Lambda_w^2[0, +\infty[$.

Teorema 1 (Esistenza del portafoglio replicante).

E' possibile costruire in ogni istante un portafoglio autofinanziante privo di rischio (cioè privo della componente stocastica) composto da un'appropriata quantità del bene dal prezzo S_t e da opzioni call vendute. Il prezzo delle opzioni sarà ottenibile come soluzione di una equazione differenziale alle derivate parziali.

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto di comporre un portafoglio composto da un certo numero di opzioni call europee vendute ed un certo numero di

unità di un bene. Il valore del portafoglio e tutte le sue componenti, siano esse quantità che prezzi, sono dipendenti dal tempo seguendo il simbolismo di cui sopra.

$$V_t = p_t S_t + q_t c(S_t, t) \quad (1.2)$$

ora si scriverà il differenziale della (1.2)

$$dV_t = \underbrace{dp_t S_t}_{\parallel 0} + p_t dS_t + \underbrace{dq_t c(S_t, t)}_{\parallel 0} + q_t dc(S_t, t)$$

Le quantità contrassegnate sono uguali a zero perché il portafoglio è autofinanziante cioè non è possibile aggiungere denaro durante lo sviluppo temporale. Quindi si ha:

$$dV_t = p_t dS_t + q_t dc(S_t, t) \quad (1.3)$$

Poiché i prezzi seguono la dinamica (1.1), cioè seguono un moto Browniano moltiplicativo, per il lemma di Itô si può scrivere:

$$dc(S_t, t) = \partial_{S_t} c(S_t, t) dS_t + \partial_t c(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 dt + o(dt)$$

Andando a sostituire questa formula nella (1.3) si ricava:

$$dV_t = p_t dS_t + q_t \left(\partial_{S_t} c(S_t, t) dS_t + \partial_t c(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 dt \right) + o(dt)$$

Ora si esporrà una parte molto significativa di questa dimostrazione, si esporrà il concetto di portafoglio immunizzato. Il problema si pone in questi termini: è possibile giocando con la vendita di una opportuna quantità di opzioni e l'acquisto contemporaneo di una certa quantità del bene S, quantità determinata esattamente dal capitale reso disponibile dalla vendita delle opzioni, cioè in ultima istanza mantenendo il portafoglio autofinanziante, è possibile annullare le variazioni di natura stocastica del prezzo del bene S? E' possibile rendere il portafoglio che consideriamo, attraverso un'opportuna politica di compravendita degli elementi che lo compongono, privo in ogni istante della componente di rischio data dall'aver imposto che il bene sottostante si muove nel tempo in modo stocastico? La risposta è positiva: è

possibile. E' sufficiente porre:

$$\frac{p_t}{q_t} = -\partial_{S_t} c(S_t, t)$$

Cioè la politica di compravendite che è il fattore sul quale noi si può agire nella pratica e che è rappresentata dal rapporto p_t su q_t , deve bilanciare istantaneamente, per ogni t , la variazione del prezzo delle opzioni sulla variazione stocastica del prezzo del sottostante. Si ricava, sostituendo:

$$dV_t = \frac{-1}{\partial_{S_t} c(S_t, t)} \left(\partial_t c(S_t, t) + \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 \right) dt + o(dt)$$

Si può scrivere quindi:

$$\frac{dV_t}{dt} = \frac{-1}{\partial_{S_t} c(S_t, t)} \left(\partial_t c(S_t, t) + \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 \right) \quad (1.4)$$

Come si può notare, grazie alla politica di correzioni istantanee, V_t dipende ora solo dal tempo. Poiché ora il portafoglio è privo di rischio il suo rendimento sarà quello di un bene privo di rischio come nella definizione (1). L'esistenza di un tale bene è garantita dall'ipotesi fatta in precedenza sul mercato: il mercato non deve acconsentire arbitraggi. Quindi:

$$\frac{dV_t}{dt} = V_t r_t$$

Andando a sostituire quest'ultima nella (1.4), essa diventa:

$$\partial_{S_t} c(S_t, t) V_t r_t = - \left(\partial_t c(S_t, t) + \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 \right)$$

e proseguendo

$$\partial_t c(S_t, t) = -\partial_{S_t} c(S_t, t) V_t r_t - \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 \quad (1.5)$$

Dalla (1.1) si ricava che: $V_t = p_t(S_t + \frac{q_t}{p_t} c(S_t, t)) = p_t(S_t - \frac{c(S_t, t)}{\partial_{S_t} c(S_t, t)})$, e sostituendo nella (1.5) si ricava:

$$\partial_t c(S_t, t) = r_t p_t(-\partial_{S_t} c(S_t, t) S_t + c(S_t, t)) - \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2$$

Possiamo porre $p_t = 1$ perché sarebbe solo un accordarci su quanto considerare una unità di bene. Dall'equazione subito sopra viene.

$$\partial_t c(S_t, t) = r_t c(S_t, t) - \partial_{S_t} c(S_t, t) S_t - \frac{1}{2} \partial_{S_t S_t} c(S_t, t) \sigma^2 S_t^2$$

la quale, occultando l'indicazione del tempo t e, riguardo a c , l'indicazione della dipendenza da S_t , si può scrivere in forma più compatta:

$$\partial_t c + \frac{1}{2} \partial_{SS} c \sigma^2 S^2 + \partial_S c S = r c \quad (1.6)$$

Questa equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita c , cioè nel prezzo del derivato, si chiama equazione differenziale di Black e Scholes, e risolvendola comunica l'evoluzione del prezzo del derivato nel tempo. $\square$

In questa sezione siamo quindi riusciti a costruire un portafoglio che replica esattamente il prezzo del derivato. Attraverso la costruzione di questo portafoglio siamo poi arrivati all'equazione che il prezzo del derivato replicato deve osservare. Il tema della prossima sezione sarà la risolubilità di questa equazione che, se risolta, espliciterebbe il prezzo del contratto.

1.3 La formula di Black e Scholes.

Come si può evidentemente osservare l'equazione, (1.6) non ha alcuna componente stocastica, il che significa dunque che il prezzo del derivato può essere determinato in modo esatto, privo di rischio, anche se i prezzi dei beni seguono una legge stocastica. Il più sarebbe capire ora se e quando l'equazione differenziale (1.6) abbia soluzioni. Attraverso un opportuno cambio di variabili l'equazione di Black e Scholes è riconducibile ad una equazione del calore, cioè ad un problema del tipo:

$$\begin{aligned} k u_{xx} &= u_t \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

dove $u_t, u_x, u_{xx} \in C(\Omega)$ e $\Omega =]0, \pi[\times \mathbb{R}^+$.

Possiamo dunque utilizzare i risultati ottenuti intorno alla soluzione di questa importante equazione della fisica matematica ed essere certi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione per l'equazione di Black e Scholes. Nella dimostrazione precedente abbiamo considerato σ costante, infatti è stata soppressa l'indicazione che abbiamo utilizzato all'inizio di questo capitolo della sua dipendenza da t , tuttavia il teorema è ancora valido se si considera σ una funzione dipendente da t . Rimangono pure validi i risultati di esistenza ed unicità. Ma se noi consideriamo σ costante è possibile esplicitare attraverso una ben determinata formula il valore del prezzo delle opzioni. Quindi per σ costante si ha una soluzione esplicita dell'equazione differenziale di Black e Scholes, soluzione che non si potrebbe esplicitare per σ come una qualunque funzione deterministica non costante.

Ora noi si darà qualche notazione e definizione il cui utilizzo renderà più agevole la dimostrazione che seguirà.

- si chiami X il prezzo di esercizio dell'opzione considerata.
- $t \in [0, T]$ cioè t è il tempo, e T sta ad indicare quando si avrà il diritto di esercitare l'opzione.
- σ prenderà il nome, usuale in finanza, di volatilità, e come nel modello originale di Black e Scholes sarà considerata costante.
- per semplificare le notazioni si utilizzeranno i simbolismi f_x e f_{xx} in luogo di $\partial_x f$ e $\partial_{xx} f$, come utilizzavamo nel teorema 1 per indicare le derivate parziali.
- tutte le altre notazioni rimarranno uguali a quelle del teorema 1.

Teorema 2. *L'equazione differenziale alle derivate parziali di F.Black e B.Scholes con volatilità costante ammette una soluzione esplicita.*

Dimostrazione. Imponiamo un cambio di variabili nell'equazione (1.6) in

questo modo:

$$\begin{aligned} s &\stackrel{def}{=} \log \frac{S_t}{X} \\ \tau &\stackrel{def}{=} T - t \\ p(s, \tau) &\stackrel{def}{=} \frac{c(S_t, \tau)}{X} \end{aligned}$$

Attraverso questa posizione possiamo scrivere l'equazione di F.Black e B.Scholes nelle nuove variabili:

$$-p_\tau + p_s(r - \frac{\sigma^2}{2}) + p_{ss}\frac{\sigma^2}{2} - pr = 0 \quad (1.7)$$

Ora si utilizzerà la trasformata di Fourier. Per mostrare i simbolismi che si useranno e come vengono trasformate le funzioni, chiamiamo trasformata di Fourier di una funzione $h(x, t)$, come nel nostro caso dipendente da x e t , la funzione f (o $\mathcal{F}h$ o $\widehat{h}$) tale che:

$$\widehat{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} h(x, t) dx = f(\xi, t)$$

Trasformando l'equazione (1.7) si trova:

$$-f_\tau - i\xi(r - \frac{\sigma^2}{2})f - \xi^2 \frac{\sigma^2}{2} f - rf = 0$$

Da quest'ultima si può scrivere:

$$\frac{f_\tau}{f} = -i\xi(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \xi^2 \frac{\sigma^2}{2} - r$$

Questa è una ordinaria equazione differenziale nell'incognita $f(\xi, t)$, e risolvendola si ricava:

$$f(\xi, \tau) = k(\xi) \exp \left(-i\xi(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - (\xi^2 \frac{\sigma^2}{2} + r)\tau \right)$$

$k(\xi)$ dipende solo da ξ e risulta dall'integrazione dell'equazione differenziale. E' possibile ricavare la costante k dalla condizione iniziale del problema, cioè da $f(\xi, 0)$. Andando a sostituire la soluzione diventa:

$$f(\xi, \tau) = e^{-r\tau} f(\xi, 0) \exp \left(-i\xi(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \xi^2 \frac{\sigma^2}{2} \tau \right)$$

A questo punto noi si dovrà utilizzare la proprietà della convoluzione della trasformata di Fourier che recita: $\widehat{xy} = \widehat{x} * \widehat{y}$, dove $*$ viene inteso come

la convoluzione appunto. Si può assumere che $f(\xi, 0) = \mathcal{F}p(s, 0)$. Possiamo poi riconoscere la parte esponenziale dell'espressione di $f(\xi, \tau)$ come la funzione caratteristica di una variabile aleatoria normale tale che:

$$N\left(-\xi\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right)$$

In forza di questo, $f(\xi, \tau)$ può essere scritta come trasformata di $p(s, \tau)$, cioè $f(\xi, \tau) = \mathcal{F}p(s, \tau)$. Ne viene:

$$f(\xi, \tau) = e^{-r\tau} \mathcal{F}p(s, 0) \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-\frac{\left(s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}}\right)$$

E questa formula, attraverso la proprietà della convoluzione, diventa:

$$p(s, \tau) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(w, 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{\left(s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - w\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dw$$

Poiché la condizione iniziale si scrive $p(w, 0) = (1 - e^w)^+$ per $w > 0$, allora la formula appena sopra diventa.

$$e^{-r\tau} \int_{-\infty}^0 (1 - e^w) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{\left(s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - w\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dw$$

Possiamo dividere l'integrale in due termini, distribuendo il secondo fattore sotto il simbolo di integrale con $(1 - e^w)$; applicando poi un cambio di variabile nel primo termine:

$$z = \frac{w - s - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Da tutto ciò si può scrivere

$$e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

Dove Φ è la funzione di ripartizione della legge normale. Cioè:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Andando a sostituire le variabili originarie, definendo $B \stackrel{def}{=} B(t, T) = e^{-r(T-t)}$, e riscrivendo entrambi i termini, si ottiene, come prezzo del derivato (nel nostro discorso opzioni call europee):

$$c(S_t, T-t) = BX\Phi\left(\frac{\log(\frac{BX}{S_t}) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(\frac{\log(\frac{BX}{S_t}) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (1.8)$$

Questa è la celeberrima formula di Black e Scholes, che rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale di Black e Scholes. $\square$

Come abbiamo già detto nell'introduzione la formula (1.8) fu ricavata per via elementare dieci anni prima da Bonnes, ma nel discorso di F.Black e B.Scholes emergono importantissime 'novità'. Queste novità sono ad esempio l'aver mostrato come è possibile determinare il prezzo equo del contratto con una politica di correzioni istantanee che rendono senza rischio il portafoglio, e l'aver utilizzato come modello per i prezzi dei sottostanti un moto browniano moltiplicativo. Ho virgolettato la parola novità perché, per pura curiosità aneddotica, L.Bachelier (1900)[1] moltissimi anni prima dei due economisti il cui lavoro è il tema di questo capitolo, pensò che i prezzi seguissero una distribuzione normale, e non log-normale come supposero i suoi due 'pronipoti' sopra citati. Questo significa che la sua ipotesi di partenza fu che il processo stocastico che regola la dinamica dei prezzi dovesse essere un moto browniano additivo.

Ora si schematizzerà, prima di passare alla prossima sezione, il discorso finora sviluppato perché poi si tratterà dei motivi che hanno portato a modificare il modello esposto.

1. Si parte dalle ipotesi che i prezzi seguano la dinamica (1.1) e che il mercato in cui vive il sistema dei prezzi sia privo d'arbitraggio.
2. In forza delle ipotesi del punto uno si riesce a costruire un portafoglio senza rischio che replica il prezzo del contratto; la costruzione di tale portafoglio fa arrivare ad una equazione alle derivate parziali la cui incognita è il prezzo del derivato stesso.

3. L'equazione a cui si arriva nel punto due ammette soluzione esplicita se si considera la volatilità costante.

1.4 Metodo martingala equivalente

Questo metodo descrive un'alternativa del tutto equivalente a quella utilizzata da Black e Scholes per determinare il prezzo equo delle opzioni. Invece di essere derivato dall'equazione differenziale di F.Black e B.Scholes, il prezzo delle opzioni viene ricavato utilizzando altri strumenti matematici come la teoria delle martingale. Storicamente, questo approccio al problema del dare il prezzo ai derivati viene da un'intuizione presente nel lavoro di Cox e Ross (1976), in cui si notò che la formula di F.Black e B.Scholes poteva essere vista come l'aspettazione del valore scontato dei prezzi d'esercizio delle opzioni europee in una diversa misura di probabilità. In seguito, prima nella sua tesi di dottorato, Kreps espose in nuce questo criterio, e poi lo stesso Kreps insieme con Harrison fu autore dell'opera [7] in cui viene esposto analiticamente in modo completo questo metodo. Qui si presenterà solo sommariamente di cosa si tratta alla luce dei fini del nostro discorso.

Diamo ora qualche definizione, alcune delle quali sono già state viste ma qui verranno ripetute:

- Sia $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ processo stocastico appartenente ad $\Lambda_w^2[0, T]$, che rappresenterà il drift di un determinato bene sottostante.
- Per generalità supponiamo che il sottostante paghi un certo dividendo $\{\delta_t\}_{t \geq 0}$, sempre processo stocastico di $\Lambda_w^2[0, T]$. La dinamica di questo processo potrà essere modellata così:

$$S_t^c = S_t \exp \left(\int_0^t \delta_s ds \right)$$

Dove S_t è il prezzo del sottostante che si muove attraverso la dinamica (1.1) sempre con volatilità σ_t .

- $\{r_t\}_{t \geq 0}$ sarà il rendimento del bene privo di rischio, per cui varrà, come sopra:

$$M_t = M_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

Ora si normalizzerà il prezzo del bene in considerazione, comprensivo del suo dividendo, attraverso il prezzo del bene privo di rischio. Quindi si porrà:

$$S_t^{c*} = \frac{S_t^c}{M_t} = \frac{\exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right) S_t}{M_t}$$

La cui dinamica si dovrà scrivere come:

$$dS_t^{c*} = (\mu_t - r_t + \delta_t) S_t^{c*} dt + \sigma_t S_t^{c*} dW_t$$

Questo processo è ora un processo normalizzato. Esso può essere una martingala rispetto alla misura P , misura dello spazio di probabilità nel quale ci eravamo posti sin dall'inizio del capitolo, se accade che:

$$\mu_t - r_t + \delta_t = 0 \quad \text{per ogni } t$$

Quindi si supponga che esista una misura $\tilde{P}$ che sia equivalente a P e per cui sia un moto browniano il processo:

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \sigma_s^{-1} (\mu_s - r_s + \delta_s) ds$$

Sotto questa nuova misura il drift di S_t^{c*} si annulla, e si può scrivere:

$$dS_t^{c*} = (\mu_t - r_t + \delta_t) S_t^{c*} dt + \sigma_t S_t^{c*} \left(d\tilde{W}_t - \sigma_t^{-1} (\mu_t - r_t + \delta_t) dt \right)$$

Che è equivalente a:

$$dS_t^{c*} = \sigma_t S_t^{c*} d\tilde{W}_t$$

Eliminando il drift, come è stato fatto sopra, $\{S_t^{c*}\}_t$ diventa una martingala locale nella misura $\tilde{P}$. Da questo deriva che: se esiste una misura $\tilde{P}$ per la quale $\tilde{W}_t$, $\{S_t^{c*}\}_t$ sarà senza dubbio una martingala sotto questa misura. Il teorema di Girsanov assicura che una tale misura esiste ed è unica. In forza di quanto detto possiamo costruire una misura siffatta:

$$\tilde{P}(A) = E \mathbb{I}_A Q_T = \int_A Q_T(\omega) dP(\omega)$$

In quest'ultima espressione la variabile aleatoria Q_T è data da:

$$Q_T = \exp \left(- \int_0^T \sigma_t^{-1} (\mu_t - r_t + \delta_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^{-2} (\mu_t - r_t + \delta_t)^2 dt \right)$$

Evidenziamo il fatto che se noi non avessimo normalizzato, all'inizio del nostro discorso, nella nuova misura, $\tilde{P}$ avremmo scritto:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t \left(d\tilde{W}_t - \sigma_t^{-1} (\mu_t - r_t + \delta_t) dt \right)$$

E da qui si sarebbe arrivati a:

$$dS_t = (r_t - \delta_t) S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t$$

Allora si può vedere facilmente che:

$$\tilde{E}_t S_T = S_t \exp \left(\int_t^T (r_s - \delta_s) ds \right)$$

E se si considera come sopra S_t^c , il tutto diventa:

$$\tilde{E}_t S_T^c = S_t^c \exp \left(\int_t^T r_s ds \right)$$

Si può notare con evidenza che il valore della posizione, considerata con il dividendo, è lo stesso valore dell'aspettazione dello sviluppo di crescita del bene privo di rischio. Per questa ragione tale metodo è anche chiamato 'Risk-neutral'.

Ora si vaglierà la capacità di questa impostazione di produrre una strategia autofinanziante che replichi, come ne era capace il modello di Black e Scholes, il prezzo di un derivato. Verranno rispettate tutte le ipotesi del modello di Black e Scholes, inoltre, non ne sarà aggiunta nessuna; ecco perché questa è un riformulazione equivalente di quel modello. Quando avevamo costruito il portafoglio replicante nella sezione due di questo capitolo, l'avevamo fatto in modo effettivo; ora sarà possibile verificare l'esistenza di una strategia replicante senza effettivamente costruirla. Vediamo come fare. Per il teorema di rappresentazione delle martingale siamo costretti a richiedere che il derivato di cui si vuole replicare il prezzo, $\tilde{D}(S_T)$, abbia valore di aspettazione finito

nella nuova misura $\tilde{P}$, cioè che $\tilde{E}|\tilde{D}(S_T)| < \infty$. Ora possiamo considerare il processo stocastico normalizzato

$$\left\{ \tilde{E}_t \left(\frac{\tilde{D}(S_T)}{M_T} \right) \stackrel{def}{=} D^*(S_t, T-t) \right\}_{0 \leq t \leq T}$$

Quest'ultimo è una martingala rispetto alla misura $\tilde{P}$, adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, che è la stessa che consideravamo all'inizio del capitolo per il processo $\{S_t\}_{t \geq 0}$.

In forza del teorema di rappresentazione già citato, qualunque martingala rispetto alla misura $\tilde{P}$ può essere rappresentato da un processo di Itô. Esiste dunque una rappresentazione in forma di integrale stocastico di un moto Browniano sulla misura $\tilde{P}$. Da cui deve venire l'esistenza di un processo $\{\mathcal{D}_t\}_{t \geq 0}$ appartenente ad $\Lambda_w^2[0, T]$. Allora si può scrivere:

$$D^*(S_t, T-t) = D^*(S_0, T) + \int_0^t \mathcal{D}_s d\tilde{W}_s$$

Possiamo dire qualcosa di più in virtù del teorema di rappresentazione, infatti $D^*(S_t, T-t)$ si può anche rappresentare come integrale stocastico del prezzo normalizzato del sottostante. In forma differenziale si può scrivere:

$$dS_s^{c*} = \sigma_s S_s^{c*} d\tilde{W}_s$$

Dove σ_s e S_s^{c*} sono positivi. Col considerare per $s \geq 0$ si scriverà

$$p_s \stackrel{def}{=} (\sigma_s S_s^{c*})^{-1} \mathcal{D}_s$$

si può riscrivere in più:

$$D^*(S_t, T-t) = D^*(S_0, T) + \int_0^t p_s dS_s^{c*}$$

che in forma differenziale ha la forma

$$dD^*(S_t, T-t) = p_t dS_t^{c*}$$

Ora basterà porre:

$$D(S_t, T-t) = M_t D^*(S_t, T-t)$$

e

$$q_t = D^*(S_t, T - t) - p_t S_t^{c*}$$

per ottenere

$$D(S_t, T - t) = p_t S_t^c + q_t M_t$$

Abbiamo così ottenuto il valore al tempo t del portafoglio replicante come nella sezione due di questo capitolo. Possiamo affermare che questo portafoglio replica il derivato perché sussistono le relazioni al tempo finale T :

$$p_T S_T^c + q_T M_T = M_T D^*(S_T, 0) = M_T \tilde{E}_t \left(\frac{\tilde{D}(S_T)}{M_T} \right) = \tilde{D}(S_T)$$

Verifichiamo ora che il portafoglio replicante è autofinanziante:

$$\begin{aligned} dD(S_t, T - t) &= M_t dD^*(S_t, T - t) + D^*(S_t, T - t) dM_t \\ &= M_t p_t dS_t^{c*} + (p_t + S_t^{c*}) dM_t \\ &= p_t d(M_t S_t^{c*}) + q_t dM_t \\ &= p_t S_t^c + q_t M_t \end{aligned}$$

Alla fine, grazie a questa riformulazione del modello di F.Black e B.Scholes attraverso l'uso delle martingale, è possibile dare il prezzo ai derivati così com'era possibile con il modello originale.

1.5 Critica del modello e generalizzazioni

Pur essendo stato subito accolto con larghissimo favore, il modello di Black e Scholes mostrava sin dall'inizio delle discrepanze rispetto ai dati reali che rendevano necessarie delle sue generalizzazioni. I primi lavori si concentrarono sul rendere più flessibile il modello rispetto alle strutture del mercato, e lasciandolo pressoché intatto nella sua struttura più intima: quella probabilistica. Ricordiamo, ancora per puro spirito aneddotico poiché siamo interessati ad altro genere di riformulazioni del modello, alcune generalizzazioni di questa natura. R.C.Merton nel 1973, lo stesso anno della pubblicazione del modello stesso, suppose il caso in cui i sottostanti fossero delle azioni, e

quindi introducesse il pagamento di un dividendo che venisse corrisposto nel continuo con intensità costante. J.Ingersoll nel 1975 propose di immettere nel modello pagamenti fiscali continui ad aliquota costante. Nuovamente R.C.Merton inserì nel modello un tasso variabile. E si potrebbe continuare a lungo.

Tuttavia anche se il modello diveniva più flessibile rispetto alle strutture giuridiche, fiscali, etc, permaneva e permane una certa dissimiglianza rispetto ai dati del mercato. Questa dissimiglianza impone una rivalutazione di una delle ipotesi fondamentali del modello: la dinamica del moto Browniano geometrico come modello per i prezzi. Analizziamo ora alcune proprietà che qualificano il particolare processo stocastico chiamato moto Browniano geometrico (o moltiplicativo) che è soluzione dell'equazione differenziale stocastica (1.1). Applicando quindi le proprietà del processo in questione ai prezzi, si deducono le seguenti proprietà degli stessi.

1. Le variazioni nel logaritmo dei prezzi in un dato intervallo di tempo sono distribuite in modo normale.
2. Gli incrementi del logaritmo dei prezzi considerati su intervalli di tempo della stessa lunghezza sono stocasticamente indipendenti e distribuiti nello stesso modo.
3. Le traiettorie che descrivono i prezzi sono quasi certamente continue.

Gli studi rivolti ad analizzare se queste proprietà sono verificabili nei dati che il mercato fornisce hanno portato alla luce delle discrepanze fra le proprietà qui sopra e l'andamento dei prezzi.

- 1' Che le distribuzioni marginali del logaritmo dei prezzi di molti beni nei mercati (beni monetari, beni indicizzati,...) non siano normali, è stato esposto in parecchi studi: Mandelbrot (1963), Frama (1965), Clark (1973),..., McDonald (1996). Le distribuzioni empiriche presentano delle code. Si notano degli ispessimenti di probabilità in alcuni

punti precisi (ritorni), ispessimenti che tendono ad annullarsi se il periodo considerato è lungo, ma giornalmente e in generale nel breve periodo sono di notevole intensità.

- 2' Si può pure osservare che le code che si formano nelle distribuzioni di probabilità empiriche sono prevedibili dalla storia recente del prezzo, e questo è in contrasto con la proprietà del moto Browniano di avere gli incrementi stocasticamente indipendenti. Una interpretazione di questo fatto potrebbe essere data dal considerare la volatilità come funzione dipendente da qualche parametro che rappresenti il passato: parametro temporale, storia dei prezzi,... Analisi sulla dipendenza empirica della volatilità dai dati storici si possono trovare ad esempio in Chou (1988), Bollersev (1992) e Palm (1996).
- 3' Analisi dei dati empirici mostrano che sempre più spesso, soprattutto nel considerare singoli beni, sono necessari modelli che interpretino traiettorie discontinue dei prezzi.

Tutte queste sin qui esposte sono ragioni per cui la dinamica utilizzata da F.Black e B.Scholes mostrerebbe delle discrepanze tra le previsioni dei prezzi e il loro effettivo andamento nella realtà. Ma tali osservazioni non varrebbero nulla se poi il modello riuscisse, con esattezza ed efficacia, a dare il prezzo ai derivati; sarebbe come dire: a che vale sapere se un metodo per effettuare una misura è corretto se poi le misure ottenute in quel modo, sottoposte ad un appropriata interpretazione matematica, attraverso la costruzione di un portafoglio senza rischio, ad esempio, o attraverso la soluzione di un'equazione differenziale, fanno ottenere risultati corretti ed immediatamente utilizzabili secondo ciò che ci eravamo prefissi.

Invece le 'discrepanze' della dinamica di Black e Scholes rispetto ai dati reali di cui abbiamo riferito diventano importantissime se abbiamo motivo di pensare che il modello non faccia correttamente o faccia con poca efficacia ciò per cui era stato pensato, perché in questo caso sapremmo intorno a cosa porre la nostra attenzione per modificare il modello stesso. Quindi ora

si analizzeranno delle ragioni per cui non potremmo definirci pienamente soddisfatti dei risultati a cui giunge il modello di Black e Scholes.

Anzitutto iniziamo col dire che dalla formula di Black e Scholes si deduce una relazione di monotonia crescente tra il valore delle opzioni e la volatilità delle medesime, il valore delle opzioni è una funzione monotona crescente $f(\sigma)$, dove σ è la volatilità appunto. Quindi il valore delle opzioni cresce al crescere della volatilità e decresce quando essa diminuisce di livello. Si possono determinare senza difficoltà i ranges di variazione della volatilità e del valore del derivato; questi ranges si determinano: o variando la volatilità e, attraverso la formula di Black e Scholes, associando a questa variazione quella del valore del derivato, o, al contrario, facendo variare il prezzo del derivato ed associando, come prima, la variazione della volatilità. Da quanto appena detto sulla relazione indotta dalla formula di Black e Scholes tra la volatilità e il valore del derivato e tenendo presenti le proprietà funzionali della formula stessa, si deduce che esiste una relazione biunivoca tra volatilità e prezzi. Finora, noi ci si è posto il problema, anche se magari non lo si è esplicitamente detto, del determinare il prezzo del derivato possedendo come dato la volatilità; ma in virtù della relazione biunivoca tra volatilità e prezzo è possibile fare anche il contrario, cioè ricavare la volatilità assumendo come dato il prezzo. Questa volatilità, ricavata dai prezzi dei derivati, è detta volatilità implicita. Si deve aggiungere che nella pratica nei mercati reali la volatilità implicita è importantissima perché i dati più semplici da ricavare, esogeni al problema del dare il prezzo ai derivati, sono proprio gli stessi prezzi dei derivati. Quest'ultima affermazione potrebbe sembrare una contraddizione; ma supponiamo di voler dare il prezzo ad un'opzione su un dato sottostante, allora tale problema si potrebbe dire risolto, in forza del modello di Black e Scholes, se riuscissimo ad attribuire un valore alla volatilità: niente di 'più semplice' per arrivare ad un valore della volatilità che considerare i prezzi delle opzioni già emesse sullo stesso sottostante e, da questi prezzi, ricavare la volatilità implicita.

A questo punto se noi si considerasse la volatilità costante nel tempo come

nelle ipotesi di Black e Scholes, la volatilità implicita di tutte le opzioni su uno stesso sottostante dovrebbe essere la stessa, e quindi non dipenderebbe dal prezzo di esercizio, dalla data di scadenza, e nemmeno dalla data corrente. Se noi considerassimo, invece, un'ipotesi meno restrittiva sulla volatilità come assumerla variabile in modo conosciuto nel tempo, cioè come una ben determinata funzione del tempo, allora le opzioni d'acquisto e di vendita con differenti prezzi di esercizio ma con la medesima scadenza dovrebbero avere tutte la stessa volatilità implicita.

Fino al 1987 le proprietà qui sopra specificate delle volatilità implicite delle opzioni sembravano essere rispettate anche nei mercati reali, pur con qualche piccola eccezione: ad esempio la differenza via via più elevata della volatilità implicita di opzioni alla stessa scadenza ma con prezzi di esercizio differenti qualora le opzioni fossero lontane dalla posizione out-of-the money o in-the money. Dall'ottobre del 1987 le cose cambiarono radicalmente in molti mercati. Le volatilità implicite di opzioni a prezzi di esercizio più bassi sono divenute (e sono tuttora) più alte di quelle delle opzioni a prezzi di esercizio più elevati. Se tracciassimo un grafico nell'ortante positivo di un piano cartesiano, le cui ordinate rappresentano la volatilità implicita e le ascisse il rapporto X/S_t , prezzo d'esercizio su prezzo del sottostante, otterremmo una curva con concavità rivolta verso l'alto. Dalla forma singolare di questa curva deriva il nome del fenomeno appena descritto: effetto smile. Questo fenomeno, come è stato mostrato, contraddice le previsioni del modello di F.Black e B.Scholes evidenziando una dissimiglianza patologica fra le nostre attese e quel che accade nei fatti.

Le considerazioni fatte in questa sezione evidenziano come il modello di F.Black e B.Scholes dia adito a ragioni per cui esso necessiterebbe di una revisione. La malattia di cui il modello soffre sembrerebbe riguardare sia la dinamica dei prezzi dei sottostanti che le previsioni sui derivati, ma la gran parte dei dati esposti parrebbero suggerire che la nostra attenzione, al fine di rendere più sano il modello, dovrebbe posarsi sulla volatilità, e sull'ipotesi, troppo restrittiva, che essa sia costante nel tempo. Nel seguito considereremo

alcune generalizzazioni del modello di F.Black e B.Scholes in cui l'ipotesi della volatilità costante viene esplicitamente negata. Si considereranno volatilità come funzioni altri parametri.

Capitolo 2

Generalizzazioni a volatilità stocastica del modello di F.Black e B.Scholes.

La gran parte delle questioni sollevate nell'ultima sezione del precedente capitolo sulla corrispondenza tra modello e realtà sembra puntare il dito sull'ipotesi, fatta da Black e Scholes, che la volatilità sia costante nel tempo. I modelli di cui si parlerà in questo capitolo avranno in comune una volatilità non costante ma dipendente da altri fattori quali il tempo, il prezzo corrente del bene considerato o la storia del prezzo del bene stesso. Questi modelli si possono considerare delle generalizzazioni del modello di Black e Scholes in quanto la dinamica utilizzata per modellare i prezzi dei beni è 'simile' a quella del modello originario; ora si dovrà specificare precisamente cosa si intenda per 'simile'. Come si è già detto, si considererà la volatilità come funzione di altri fattori, ma questa dipendenza non sarà di tipo probabilistico, quindi l'unico produttore di rischio rimarrà il processo di Wiener originario. Quest'ultimo fatto implicherà la conservazione, in questo scenario, di importantissime proprietà del modello; le proprietà più importanti che verranno preservate saranno: la possibilità di replicare istante per istante il prezzo di un derivato, e quindi l'esistenza di un'unica misura martingala equivalente. Da

questo deriva che il prezzo dei derivati può essere determinato solo attraverso considerazioni sull'arbitraggio.

Iniziamo col definire la ‘nuova ‘ dinamica attraverso cui si svilupperanno i prezzi dei sottostanti:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(S_t, t) d\tilde{W}_t \quad (2.1)$$

- Possiamo porre $\{r_t\}_t$ come un processo di $\Lambda_{\tilde{W}}^2[0, T]$.
- Poniamo anche che $\{\sigma(S_t, t)\}_t$ sia un processo $\Lambda_{\tilde{W}}^2[0, T]$.
- Naturalmente $\{\tilde{W}_t\}_{t \geq 0}$ è un moto browniano nella misura $\tilde{P}$.

Ora si esamineranno alcune caratteristiche dei prezzi dei derivati. Le considerazioni che seguiranno sono state studiate in modo analitico da Bergman (1996), noi parleremo solo di alcune delle importanti proprietà dei prezzi dei derivati studiate dall'autore sopra citato.

Il processo di diffusione utilizzato da Black e Scholes per modellizzare i prezzi è un processo di Itô osservante la proprietà di Markov. Se noi sostituiamo quel processo con quello sintetizzato dall'equazione (2.1), cioè con un processo la cui volatilità dipende dal tempo e dal prezzo corrente del sottostante, le proprietà di Itô e Markov vengono preservate. Utilizzando sempre l'equazione (2.1) come modello, possiamo dedurre che pure importanti relazioni tra il prezzo delle opzioni ed il prezzo del sottostante sono conservate, queste relazioni sono la monotonìa e la convessità. Anche la comparazione statica (cioè fatta attribuendo valori fissati ad un parametro, e per ognuno di questi valori studiando il comportamento funzionale degli altri) rispetto al tempo, alla data di scadenza, ed alla volatilità, mostra che le proprietà qualitative (monotonìa, convessità,...) della dinamica (2.1) sono le stesse che nel modello di Black e Scholes. Di più, monotonìa e convessità si conserverebbero anche se considerassimo la volatilità come generata da un altro processo diffusivo, ma tale processo non dovrebbe presentare una dipendenza, nei suoi parametri di definizione (drift e volatilità), dal prezzo del sottostante perché ciò genererebbe un comportamento assai anomalo del modello.

2.1 Il modello “Displaced-Diffusion”.

Questo modello fu introdotto da Rubinstein (1983). Si darà una versione semplificata del modello originale. L'autore considera un portafoglio composto da una certa quantità di derivati e una certa quantità di sottostante. Si danno le seguenti definizioni:

- Sia A_t la componente rischiosa del portafogli che si considera essere un moto browniano geometrico, cioè un processo stocastico $\{A_t\}_{t \geq 0}$ tale che

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma_A d\tilde{W}_t$$

sotto la misura martingala.

- Sia $B(t, T')$ il valore al tempo t di una unità di un bond non rischioso con scadenza T' . Si prendano in considerazione b -unità di quest'ultimo prodotto.
- Sia S_t il valore del portafoglio al tempo t , composto da ciò che abbiamo specificato qui sopra, cioè:

$$S_t = A_t + b B(t, T')$$

Allora possiamo scrivere il valore del portafoglio in forma differenziale:

$$dS_t = dA_t + b dB(t, T')$$

e sostituendo si ricavano le relazioni:

$$dS_t = r_t \left(A_t + b B(t, T') \right) dt + \sigma_A A_t d\tilde{W}_t$$

e

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(S_t, t) d\tilde{W}_t$$

dove

$$\sigma(S_t, t) = \sigma_A \left(1 - \frac{b B(t, T')}{S_t} \right)$$

Anche se la volatilità futura non è prevedibile, è possibile stimare il prezzo dei derivati come le opzioni europee. Come esempio consideriamo un'opzione call europea che avrà scadenza $T < T'$. Posso scrivere il prezzo di questa opzione al tempo t , in un mercato privo di arbitraggio.

$$\begin{aligned} C^E(S_t, T - t) &= B(t, T) \tilde{E}_t(S_t - X)^+ \\ &= B(t, T) \tilde{E}_t\left(A_t - (X - b B(T, T'))\right)^+ \end{aligned}$$

Con $A_t > 0$ l'opzione sarà necessariamente esercitata nella posizione in-the money se $X \leq b B(t, T')$. Se quest'ultimo è il caso, il $+$ ad esponente dell'ultima formula diviene inutile. Il valore dell'opzione call è quindi quello del portafoglio meno il valore scontato del prezzo d'esercizio. Si può scrivere dunque:

$$\begin{aligned} C^E(S_t, T - t) &= B(t, T) \tilde{E}_t(S_t - X)^+ \\ &= S_t - B(t, T) X \\ &= A_t - B(t, T) X + B(t, T') b \end{aligned}$$

Ora esaminiamo il caso in cui $X \leq b B(t, T')$. Si può osservare che $\{A_t\}_{t \geq 0}$ segue la dinamica di un moto browniano, e si può esprimere il prezzo del derivato con la media della formula di Black e Scholes, sostituendo ad S_t il valore A_t e ad X il valore $X - b B(T, T')$.

2.2 Il modello C.E.V.

Il nome 'C.E.V.' deve essere inteso come sigla in luogo di 'constant-elasticity-of-variance' process. Si introduce un processo che segue la dinamica fornita dall'equazione differenziale stocastica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_0 S_t^{\gamma-1} dW_t$$

- Dove $\gamma \in]0, 1[$.

- La volatilità è rappresentata dalla funzione $\sigma(S_t, t) = \sigma_0 S_t^{\gamma-1}$. La funzione volatilità ha elasticità costante rispetto ad S_t , il che significa:

$$\frac{\partial \log \sigma(S_t, t)}{\partial \log S_t} = \gamma - 1$$

Questo modello è esaminato nella forma più generale, cioè per un γ generico sottostante alle limitazioni qui sopra, da Cox e Ross (1976). W.Feller, prima, ha esaminato il caso in cui la distribuzione di S_T è condizionata ad S_t con il valore di $\gamma = \frac{1}{2}$. Noi svilupperemo la formula per i prezzi delle opzioni europee su un sottostante che non dà dividendi e che segue la dinamica del modello per $\gamma = \frac{1}{2}$. Si considera, quindi, l'equazione differenziale stocastica seguente come modello di dinamica dei prezzi dei sottostanti.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_0 S_t^{-\frac{1}{2}} dW_t$$

Ora esaminiamo la funzione di ripartizione seguente:

$$F_t(s) \stackrel{def}{=} P(S_t \leq s | S_t)$$

Seguendo il lavoro di Feller si riesce a scrivere:

$$dF_t(s) = \sqrt{\theta_t \xi_t} e^{(-\xi_t - \theta_t s)} s^{-\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{\theta_t \xi_t} s^{-\frac{1}{2}}) ds \quad \text{con } s > 0$$

Possiamo inoltre specificare F in 0

$$F_t(0) = G(\mu, 1)$$

e anche nei punti negativi:

$$F_t(s) = 0 \quad \text{per } s < 0$$

Possiamo anche scrivere le espressioni di θ_t e ξ_t in questo modo:

$$\theta_t \stackrel{def}{=} \frac{2\mu}{\sigma_0(e^{\mu(T-t)} - 1)}$$

ed anche

$$\xi_t \stackrel{def}{=} S_t \theta_t e^{\mu(T-t)}$$

Ora si dovrà specificare la funzione G , e lo si farà ricorrendo alla funzione di Bessel al primo ordine, che a sua volta necessita l'uso della funzione Γ .

$$G(x, \alpha) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

L'espressione di $I_1(-)$ può essere approssimata con uno sviluppo in serie.

Applicando il metodo della martingala, $\mu = r$ diventa la media sull'intervallo $[t, T]$, oppure $\mu = r - \delta$ se viene pagato un dividendo nel continuo con media δ ; per queste ragioni si dovrà, di conseguenza, modificare anche: θ_t e ξ_t . Da ciò segue che il prezzo delle opzioni call europee sarà

$$C^E(S_t, T - t) = B(t, T) \tilde{E}_t(S_t - X)^+$$

Oppure esplicitando il tutto:

$$\int_X^\infty \left((s - X) (\sqrt{\theta_t \xi_t} e^{(-\xi_t - \theta_t s)} s^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{\theta_t \xi_t} s^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(k+1)!} (\theta_t \xi_t s)^k \right) ds$$

Possiamo anche riordinare la scrittura precedente con uno sviluppo ulteriore:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_t}{\theta_t} \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-\xi_t} \xi_t^k}{k!} \int_X^\infty \frac{\theta_t^{k+1} s^{k+1} e^{-\theta_t s}}{(k+1)!} d(\theta_t s) - \\ & - X \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-\xi_t} \xi_t^{k+1}}{(k+1)!} \int_X^\infty \frac{\theta_t^k s^k e^{-\theta_t s}}{k!} d(\theta_t s) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo fare un cambio di variabili, qui sopra; in modo naturale si scriverà $(\theta_t s) \longrightarrow y$. E' possibile, ponendo $\frac{\xi_t}{\theta_t} = S_t B(t, T)^{-1}$ e nominando $g(x, \alpha)$ in luogo della funzione gamma, ottenere la formula per il valore delle call nel modello considerato.

$$\begin{aligned} C^E(S_t, T - t, \frac{1}{2}) &= S_t \sum_{k=1}^\infty g(\xi_t, k) G(\theta_t X, K + 1) - \\ &- X B \sum_{K=1}^\infty g(\xi_t, K + 1) G(\theta_t X, K) \end{aligned}$$

In quest'ultima formula si definisce $B \stackrel{def}{=} B(t, T)$. Si può ottenere una generalizzazione della formula precedente per ogni gamma (γ) compresa tra

zero ed uno esclusi; generalizzazione che venne ottenuta da Cox (1975). Si scriverà quindi:

$$\begin{aligned} C^E(S_t, T-t, \gamma) &= S_t \sum_{k=1}^{\infty} g(\xi'_t, k) G\left(\theta'_t X^{2-2\gamma}, K + \frac{1}{2-2\gamma}\right) - \\ &- XB(t, T) \sum_{K=1}^{\infty} g(\xi'_t, K + \frac{1}{2-2\gamma}) G(\theta'_t X^{2-2\gamma}, K) \end{aligned}$$

La quale, per essere compresa, ha bisogno delle seguenti definizioni

•

$$\theta'_t \stackrel{def}{=} \frac{r - \delta}{\sigma_0^2(1 - \gamma)(e^{2(r-\delta)(1-\gamma)(T-t)} - 1)}$$

•

$$\xi'_t \stackrel{def}{=} S_t^{2-2\gamma} \theta'_t e^{2(r-\delta)(1-\gamma)(t-T)}$$

2.3 Il modello di Dupire e la volatilità locale

Il modello introdotto dal Dupire (1993) si prefigge lo scopo di dare ragione degli effetti smile che al tempo erano già stati notati nei mercati reali. Insigni studiosi, come Merton o Hull e White, avevano proposto di introdurre un altro processo, generatore di rischio, che si occupasse di esplicitare le vibrazioni della volatilità, ma una tale impostazione fa perdere importanti proprietà del mercato quali la sua completezza e la mono-dimensionalità del processo di diffusione.

Dupire si pone la semplice questione di esaminare un modello che preservi la valutazione dei derivati dagli ‘imprevedibili’ effetti smile, e mantenere comunque alcune importantissime proprietà che appartengono al modello originle di Black e Scholes. E’ chiaro che l’attenzione del Dupire si sofferma sulla volatilità, che esso considera come una funzione deterministica del tempo e del valore attuale del sottostante. Da qui segue la dinamica che verrà utilizzata in questo modello.

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(S_t, t) dW_t$$

Il modello di Dupire permette, per quanto riguarda il problema di dare il prezzo ai derivati, di costruire un processo ‘risk neutral’, per la dinamica del prezzo del sottostante, nella forma di un processo di diffusione. Le proprietà capitali del modello di Black e Scholes verranno preservate senza aumentare la dimensione dell’incertezza.

Possiamo allora affermare, prima di esplicitare la forma matematica di questo modello, che esso attribuisce un prezzo alle opzioni dipendenti dalla traiettoria del sottostante, come aspettazione del valore scontato del loro prezzo d’esercizio su tutte le possibili traiettorie. Se, come caso particolare, consideriamo le opzioni europee il loro prezzo sarà ottenuto come aspettazione di tutti i possibili prezzi considerati alla scadenza del sottostante. La conoscenza del prezzo delle opzioni dipendenti dalle traiettorie è equivalente alla conoscenza dell’intero processo di diffusione che modella il prezzo del sottostante; nello stesso tempo la conoscenza dei prezzi delle opzioni europee equivale alla conoscenza della legge del prezzo del sottostante a tempi diversi, condizionata al suo valore attuale. L’intero processo di diffusione contiene moltissime informazioni in più della legge condizionale, prova ne sia che differenti diffusioni possano generare medesime leggi condizionali. Se noi rechiamo la nostra attenzione ai processi diffusivi ‘risk neutral’, abbiamo la possibilità di recuperare dalla legge condizionale un unico processo diffusivo ‘risk neutral’.

Si considera un insieme di opzioni, tutte con la stessa data di scadenza, T , ma con prezzi di esercizio differenti. Si considera quindi l’insieme formato dai prezzi: $C(K, T)$, dove K è variabile e T fissato. Ovviamente queste opzioni sono considerate sul medesimo sottostante. Il prezzo di questi derivati si può scrivere attraverso una funzione densità ‘risk neutral’, φ_T , del prezzo del sottostante alla maturità dell’opzione; cioè come:

$$C(K, T) = \int_0^\infty (x - K)^+ \varphi_T(x) dx$$

Possiamo differenziare due volte ed ottenere:

$$\varphi_T(K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K, T)$$

Possiamo considerare come punto iniziale (S_0, T_0) , e scrivere:

$$\varphi_T(K) = \delta_{S_0}(K) \quad \text{per} \quad C(K, T_0) = (S_0 - K)^+$$

Sostituendo (x, t) in luogo di (K, T) , si pone una questione molto importante ai fini del nostro discorso. Se conoscessimo tutte le densità, condizionali al valore iniziale (x_0, t_0) , sarebbe unico il processo di diffusione, se tale processo generasse tali densità?

Il problema inverso del problema appena esposto è già stato studiato in letteratura. Si considerino i coefficienti a e b di $\Lambda_W^2[0, T]$ relativi al seguente processo diffusivo:

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t$$

Ora la densità condizionale φ_t è deducibile dall'equazione di Fokker-Planck, dove si definisce $f(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x)$.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} - \frac{\partial (a f)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Come dicevamo all'inizio di questa sezione, il processo di diffusione possiede molte più informazioni delle distribuzioni che lo generano, e non si fa molta fatica a trovare due processi diffusivi che generano la medesima distribuzione. Nel punto $(x_0, t_0) = (0, 0)$ si possono ricavare i due processi diffusivi:

$$dx = -\lambda x dt + \mu dW_t$$

e

$$dx = \mu e^{-\lambda t} dW_t$$

Questi processi hanno la stessa media e la stessa varianza per ogni t , e possiamo scrivere:

$$E(x) = 0 \quad \text{Var}(x) = \frac{\mu^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})$$

La considerazione notevole da fare è che se noi consideriamo solamente le diffusioni 'risk neutral' abbiamo la possibilità di recuperare un unico processo diffusivo da $f(x, t)$.

Ora si esaminerà l'equazione di Fokker-Plank. In questa equazione f è il dato conosciuto mentre b è quello sconosciuto. Possiamo porre $a = 0$ poiché questo rappresenta il tasso d'interesse istantaneo. Scriveremo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Sappiamo di poter scrivere f come $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, e quindi otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)$$

Integriamo due volte nella variabile x , e sia t una costante data.

$$\frac{1}{2} b_{\alpha, \beta}^2 f = \alpha(t) x + \beta(t)$$

Possiamo assumere che le due costanti α e β siano zero. Questo deriva dall'assunzione della condizione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Per mostrare più precisamente il fatto appena esposto, possiamo anche ragionare per assurdo: assumiamo l'esistenza di un valore strettamente positivo γ che sta al di sotto di $b^2 f$ ed è minore di $v^2 x^2 f$, per un valore non negativo di v , poiché esso cresce poco velocemente. Possiamo quindi scrivere

$$x f \geq \frac{\gamma}{v^2 x}$$

ma quest'ultima affermazione contraddice il fatto che f ha un'aspettazione finita uguale a x_0 .

Da queste osservazioni viene necessariamente che :

$$\frac{1}{2} b^2 f = \frac{\partial C}{\partial t}$$

e sottolineando ancora che $f = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, otteniamo:

$$\frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Dall'arbitraggio deriva la positività dei derivati, e quindi possiamo scrivere, infine, l'espressione di b :

$$b(x, t) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C}{\partial t}(x, t)}{\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t)}}$$

Per garantire l'ammissibilità di quanto scritto imponiamo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \leq x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{per } x \text{ grande}$$

Possiamo studiare un controesempio. Consideriamo un processo di diffusione con un doppio salto ad un tempo dato t^* . Il prezzo delle opzioni call che si profilerà in questa situazione crescerà rapidamente al tempo t^* , e non potrà essere generato da alcun processo diffusivo. Se osservassimo di nuovo il processo che modella il sottostante, otterremmo la volatilità istantanea:

$$\sigma(S_t, t) = \frac{b(S_t, t)}{S_t}$$

Assumendo, come sopra, che x indichi il prezzo d'esercizio, si potrà scrivere che :

$$\frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial C}{\partial T}$$

Questa equazione alle derivate parziali svolge, in questo contesto, la medesima funzione che era svolta dall'equazione di Black e Scholes nel modello omonimo, e sviluppa il prezzo di un'opzione informandosi del tempo corrente e del valore del sottostante. Questo genere di modello è spesso chiamato, a causa della funzione che modella la volatilità: modello a volatilità locale. Il modello ha reso evidente la possibilità di recuperare un completo processo diffusivo, nel quale il drift è stato imposto a priori, dalla legge condizionale. Quindi si può concludere che osservando i prezzi delle opzioni, possiamo inferire un unico processo di diffusione.

2.4 Il modello di Hobson e Rogers

Gli autori Fleming e Dumais hanno mostrato come, in molti casi, i modelli fin qui esposti, in cui la volatilità dipende dal tempo e dal prezzo attuale del

sottostante, non siano da preferire al modello di origine di Black e Scholes che consegna prezzi più verosimili. Il modello di Hobson e Rogers (1998) si può considerare una generalizzazione dei modelli precedenti. Esso introduce nella volatilità una dipendenza dalla storia passata dei prezzi del sottostante, e mantiene la dipendenza dal prezzo attuale del sottostante. Esistono molti modi per far dipendere la volatilità dalla storia del sottostante, ad esempio si potrebbe considerare la volatilità come una funzione deterministica della differenza tra il prezzo attuale del bene e la media dei prezzi passati, media considerata lungo un fissato lasso di tempo, ma esistono altre specificazioni della dipendenza della volatilità dalla storia del prezzo del bene. Le considerazioni per le quali si arrivò a questo genere di modello sono simili a quelle per le quali si giunse al modello in tempo discreto ARCH. In termini intuitivi e quindi non analitici, si può notare che grandi deviazioni del prezzo del sottostante da un trend specificato concorrono bene alla previsione di future grandi variazioni di prezzo. Le importanti considerazioni che rendono questo modello, recentemente studiato dalla letteratura, uno strumento potente per la risoluzione dei problemi che affliggono il modello di Black e Scholes, sono principalmente due. Poiché non viene introdotto un ulteriore processo stocastico per la generazione della volatilità, viene conservata l'importante proprietà di completezza del mercato, e le teorie classiche di "hedding" e "pricing" continuano a poter essere applicate. Inoltre questo modello è in grado, almeno teoricamente, di poter prevedere gli effetti smile. Ora si presenterà il modello di Hobson e Rogers in forma analitica. Premettiamo alcune definizioni che determineranno la nomenclatura e la cornice entro al quale ci muoveremo.

- Si definisce il moto Browniano monodimensionale $\{W_t\}_{t \geq 0}$ sulla struttura $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$:
- Sia t la variabile tempo appartenente all'intervallo $[0, T]$, dove T è la data di scadenza.
- Definiamo D_t la deviazione del prezzo del sottostante dal proprio "trend",

cioè definiamo

$$D_t = Z_t - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda \tau} Z_{t-\tau} d\tau \quad (2.2)$$

- Sia Z_t il logaritmo del prezzo scontato, cioè

$$Z_t = \log(e^{-rt} S_t)$$

- Sia, infine, dato il processo di Itô a cui deve sottostare S_t , che sarà:

$$dS_t = \mu(D_t) S_t dt + \sigma(D_t) S_t dW_t$$

dove σ e μ sono funzioni deterministiche e σ è sempre positiva. Per l'esistenza e l'unicità della soluzione di questa equazione differenziale stocastica assumiamo anche che σ e μ verifichino le condizioni che seguono.

1. $\sigma(\circ, t)$ e $\mu(\circ, t)$ sono a crescita sublineare, cioè valgono le disuguaglianze:

$$|\sigma(x, t)| \leq M (1 + |x|) \quad |\mu(x, t)| \leq M (1 + |x|)$$

Per qualche $M > 0$ e per tutte le x .

2. $\sigma(\circ, t)$ e $\mu(\circ, t)$ sono localmente lipshitziani in $\circ$. E questo significa che per ogni N maggiore di zero, esiste un L_N maggiore di zero tale che se $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \leq N$, $|y| \leq N$, $t \in [0, T]$, valgono

$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq L_N |x - y| \quad |\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq L_N |x - y|$$

Queste specificazioni del modello consentono di avere la certezza che esso preservi la completezza del mercato, e, quindi, possiamo appellarci alle consuete argomentazioni sull'assenza di arbitraggio per derivare il prezzo unico delle opzioni. Il prezzo dei derivati può essere rappresentato come aspettazione condizionale del prezzo d'esercizio, considerata sotto la misura "risk-neutral" equivalente, che in forza delle premesse si può dimostrare essere unica. Comunque, essendo questo modello più ricco di informazioni rispetto al modello primigenio di Black e Scholes, si deve pagare qualcosa nella sua risoluzione.

Questo prezzo è dato dall'equazione risolutiva. Introducendo la deviazione (2.2) nella dinamica del modello, l'equazione risolutiva alle derivate parziali diviene degenere. Si può porre il prezzo attuale richiesto al tempo T-t come:

$$C_{T-t} \stackrel{def}{=} f(S_t, D_t, t)$$

Utilizzando la formula di rappresentazione di Feynman-Kac, la funzione f deve soddisfare l'equazione alle derivate parziali in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(D)}{2}(S^2\partial_{SS}f + \partial_{DD}f + 2S\partial_{DS}f - \partial_Df) + \\ + rS\partial_Sf - \lambda D\partial_Df - \partial_tf = rf \end{aligned} \quad (2.3)$$

Prima di considerare lo studio dell'equazione (2.3), facciamo un passo a ritroso: svolgeremo ora alcune argomentazioni riguardanti la teoria martingale equivalente relativa a questo modello. Pensiamo di considerare la deviazione proposta nell'equazione (2.2). Supponiamo, come possiamo, di prendere $D_0 = 0$, in questo caso il processo $\{D_t\}_{t \geq 0}$ è un processo di Itô adattato ad $\mathcal{F}_t$, e si può scrivere:

$$\begin{aligned} dD_t &= dZ_t - \lambda D_t dt \\ &= \left(\mu(D_t) - \lambda D_t \right) dt + \sigma(D_t) dW_t \end{aligned}$$

Se poi esprimiamo il quadrato di σ :

$$\sigma(D_t)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \alpha_2 D_t^2$$

Questa ultima rappresentazione potrebbe essere adatta ad interpretare differenti reazioni della volatilità a deviazioni di prezzo sia positive che negative. Possiamo definire nel modo seguente.

$$\theta(D_t) \stackrel{def}{=} \frac{\mu(D_t)}{\sigma(D_t)} + \frac{\sigma(D_t)}{2}$$

Così facendo possiamo determinare una misura martingala equivalente per il prezzo scontato del sottostante; quindi applicando il teorema di Girsanov scriveremo nel modo seguente la misura di probabilità.

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp \left(- \int_0^t \theta(D_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(D_s)^2 ds \right)$$

Si vede che quest'ultima equazione diventa una martingala sotto P . Da qui possiamo considerare un altro moto browniano.

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta(D_s) ds$$

Quest'ultimo diviene un moto browniano sotto la misura $\hat{P}$, e, in base a tutto questo, possiamo determinare l'evoluzione di $\{S_t\}_{t \geq 0}$ e di $\{D_t\}_{t \geq 0}$.

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(D_t) d\tilde{W}_t \quad (2.4)$$

$$dD_t = -\left(\lambda D_t + \frac{\sigma(D_t)^2}{2}\right) dt + \sigma(D_t) d\tilde{W}_t \quad (2.5)$$

Per la determinazione del prezzo delle opzioni europee (e non solo) possiamo applicare il teorema di rappresentazione delle martingale. Considerando la funzione integrabile, $\bar{C}(S_T)$, che rappresenta il prezzo di payoff al tempo T , possiamo costruire un portafoglio replicante autofinanziante che avrà come prezzo:

$$C(S_t, D_t, T - t) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}_t \bar{C}(S_T)$$

Per la stima di $\tilde{E}_t \bar{C}(S_T)$ è possibile considerare l'equazione alle derivate parziali associata al problema. Poiché $e^{-rt} C(S_t, D_t, T - t)$ è una martingala sotto la misura $\tilde{P}$, si avrà il drift uguale a zero, e applicando la formula di Itô otteniamo la seguente equazione.

$$\begin{aligned} e^{rt} d\left(e^{-rt} C(S_t, D_t, T - t)\right) = & -(-rC + C_{T-t}) dt + C_S dS_t + \frac{C_{SS}}{2} d\langle S \rangle_t \\ & + C_{SD} d\langle S, D \rangle_t + C_D dD_t + \frac{C_{DD}}{2} d\langle D \rangle_t \end{aligned}$$

Da questa equazione, adottando le formule (2.4) e (2.5) per esprimere le variazioni quadratiche ed i differenziali stocastici, e con pochi altri passaggi elementari, si ottiene l'equazione degenera alle derivate parziali (2.3), dalla quale eravamo partiti ed alla quale siamo ritornati. Ora si analizzerà l'equazione (2.3) per la risoluzione di questo modello. Se consideriamo le opzioni europee put, con le condizioni che ne sono associate, il problema diventa esprimibile attraverso le seguenti due equazioni.

$$\begin{cases} \frac{\sigma(D)^2}{2} (S^2 \partial_{SS} f + \partial_{DD} f + 2S \partial_{DS} f - \partial_D f) + rS \partial_S f - \lambda D \partial_D f - \partial_t f = r f \\ f(S, D, 0) = (K - S)^+ \end{cases}$$

Dove K è il prezzo d'esercizio. Da qui in poi ci riferiremo al problema espresso dalle due condizioni appena esposte con il simbolo (1-2), se volessimo riferirci ad una delle due condizioni in particolare, scriveremo (1) o (2) rispettivamente. La condizione (1) è un'equazione degenera, la cui forma quadratica associata è:

$$\frac{\sigma^2}{2} \begin{pmatrix} S^2 & S \\ S & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che se assumiamo l'ipotesi, peraltro molto restrittiva, che σ sia una funzione C^∞ , il teorema di Hörmander sulle equazioni iperboliche alle derivate parziali assicura che il problema (1-2) ammette soluzione classica. Come è stato notato nel lavoro [4], la condizione (1) si può ricondurre ad una sottoclasse delle equazioni di Hörmander chiamate anche equazioni del tipo di Kolmogorov o Ornstein-Uhlenbeck. Per queste equazioni esiste una teoria particolare i cui risultati si riferiscono a funzioni con assunzioni sulla regolarità meno restrittive [14]. Ora si mostrerà, seguendo le osservazioni espresse nel lavoro [4], come la teoria delle equazioni di Kolmogorov sia il mezzo naturale per l'analisi e la risoluzione del modello di Hobson e Rogers. Definiamo prima un problema equivalente al problema (1-2) che sarà più semplice da trattare. Sia data la trasformazione:

$$f(S, D, t) = K e^{-rt} u \left(\log \left(\frac{S}{K} \right) + rt, e^{-\lambda t} \left(\log \left(\frac{S}{K} \right) + rt - D \right), 1 - e^{-\lambda t} \right)$$

dove $u = u(x, y, \tau)$ viene determinata da questa trasformazione. E si definisca anche

$$a(x, y, \tau) \stackrel{def}{=} \frac{\sigma^2 \left(x - \frac{y}{1-\tau} \right)}{2\lambda(1-\tau)} \quad \tau \in [0, 1 - e^{-\lambda T}]$$

Allora sotto queste assunzioni il problema (1-2) è equivalente al problema di Cauchy seguente, che chiameremo (3-4) con le stesse modalità di riferimento del suo equivalente, sull'intervallo $\mathbb{R}^2 \times [0, 1 - e^{-\lambda T}]$.

$$\begin{cases} a(\partial_{xx}u - \partial_x u) + x\partial_y u - \partial_\tau u = 0 \\ u(x, y, 0) = (1 - e^x)^+ \quad (x, r) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Possiamo vedere che l'equazione (3) è da considerarsi come una perturbazione con un termine di diffusione costante dell'equazione del tipo di Kolmogorov,

cioè di una equazione del tipo:

$$\mathcal{K}u \stackrel{def}{=} \partial_{xx}u + x\partial_yu - \partial_tu = 0 \quad (2.6)$$

Ma per quest'ultima equazione Kolmogorov costruì esplicitamente una soluzione fondamentale, che assume la forma:

$$\Gamma_{\mathcal{K}}(z; \zeta) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(t-\tau)^2} \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} - \frac{3}{(t-\tau)^3} \left(y - \eta - \frac{t-\tau}{2}(x+\xi) \right)^2 \right)$$

Quest'ultima considerata per $t > \tau$. Nel caso in cui, invece, $t \leq \tau$, allora $\Gamma_{\mathcal{K}}(z; \zeta) = 0$. Con queste premesse $\Gamma_{\mathcal{K}}(z; \zeta)$ è una soluzione fondamentale per $\mathcal{K}$ in $z = (x, y, t)$ con polo in $\zeta = (\xi, \eta, \tau)$.

Ora esamineremo alcune proprietà dell'operatore $\mathcal{K}$ che permetteranno, ed è questo il nostro fine, di studiare il problema (3-4), problema associato al modello che stiamo studiando.

L'operatore $\mathcal{K}$ è invariante rispetto a traslazioni non euclidee della forma

$$(x, y, t) * (\xi, \eta, \tau) = (x + \xi, y + \eta - x\tau, t + \tau)$$

Lo stesso operatore è omogeneo di grado due rispetto alla seguente dilatazione

$$\delta_s(x, y, t) = (sx, s^3y, s^2t) \quad s > 0$$

cioè vale:

$$\mathcal{K}(u \circ \delta_s) = s^2(\mathcal{K}u) \circ \delta_s$$

Viene subito quindi l'introduzione di una norma in $\mathbb{R}^3$ δ_s -omogenea, e poi l'introduzione della continuità indotta da questa norma. La norma che si introduce è:

$$\|(x, y, t)\|_{\delta_s} = (x^6 + y^2 + |t|^3)^{\frac{1}{6}}$$

E il concetto di continuità $\mathcal{K}$ -Hölderiana. Dato un $\alpha \in]0, 1[$ e un Q , aperto di $\mathbb{R}^3$, affermiamo che una funzione $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{K}$ -Hölderiano-continua di ordine α , e si scriverà $u \in C_{\mathcal{K}}^\alpha(Q)$, se

$$|u|_{\alpha, Q} \stackrel{def}{=} \sup_Q |u| + \sup_{\substack{z, \zeta \in Q \\ z \neq \zeta}} \frac{|u(z) - u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} * z\|_{\delta_s}^\alpha}$$

assume valore finito. Possiamo ricordare le reciproche inclusioni tra gli spazi funzionali che stiamo considerando:

$$C^\alpha(Q) \subseteq C_{\mathcal{K}}^\alpha(Q) \subseteq C^{\frac{\alpha}{3}}(Q)$$

Dove $C^\alpha(Q)$ indica lo spazio delle funzioni Hölderiano-continue in senso ordinario. Da questo si può affermare: se $u \in C_{\mathcal{K}}^\alpha(Q)$ e se

$$\sup_Q |\partial_x u| + |\partial_{xx} u|_{\alpha, Q} + |Yu|_{\alpha, Q} < \infty$$

dove $Yu = x\partial_y u - \partial_t u$ è la parte del primo ordine dell'equazione (2.6), allora si scrive $u \in C_{\mathcal{K}}^{2+\alpha}(Q)$. In base a queste osservazioni e ad altre che qui non verranno svolte, possiamo affermare che l'operatore $\mathcal{K}$ svolge un ruolo analogo, in questo contesto funzionale, all'operatore a coefficienti costanti nella teoria classica delle equazioni ellittiche e paraboliche alle derivate parziali. Così è possibile estendere moltissimi risultati dalla teoria classica a problemi del tipo (3-4), che rappresentano matematicamente il modello di Hobson e Rogers, e che sono qui considerati come una perturbazione del caso classico. Nel caso specifico citiamo un recente risultato sull'esistenza e l'unicità della soluzione classica per problemi di Cauchy del tipo (3-4) sotto minime assunzioni di regolarità [13].

Teorema 3. *Sia $a \in C_{\mathcal{K}}^\alpha(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ per qualche $\alpha \in]0, 1[$, per $T > 0$, e sia $a \geq c$ per una qualche costante positiva c . Allora l'equazione (3) ammette una soluzione fondamentale Γ ; e per ogni $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$, limitata, la funzione*

$$u(x, y, t) = \int_{\mathcal{K}} \Gamma(x, y, t; \xi, \eta, 0) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

appartiene ad $C_{\mathcal{K}}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2 \times]0, T[)$ ed è l'unica soluzione classica limitata al problema di Cauchy (3-4) con condizioni iniziali $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

Ricordiamo che le stime di Γ in termini di $\Gamma_{\mathcal{K}}$ si possono trovare nel lavoro [12].

Bibliografia

- [1] L.Bachelier, *Théorie de la speculation*. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Troisième serie 17, (1900), p.p. 21-88.
- [2] P.Baldi, *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni*. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 28, (2000).
- [3] F.Black e M.Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81 (1973), p.p.637-659.
- [4] M.Di Francesco e A.Pascucci, *On the complete model with stochastic volatility by Hobson e Rogers*. preprint, (2003).
- [5] B.Dupire, *Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility*. Proceedings of AFFI Conference in Paris, (1992).
- [6] T.W.Epps, *Pricing derivatives securities*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [7] J.Harrison e D.Kreps, *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. Journal of Economic Theory, 20 (1979), p.p.381-408.
- [8] D.G.Hobson e L.C.G.Rogers, *Complete models with stochastic volatility*. Math Finance, 8 (1998), p.p.27-48
- [9] J.Hull e A.White, *The pricing of option on assets with stochastic volatility*. Journal of Finance, 42 (1987), p.p.281-300.

-
- [10] M.Rubinstein, *Displaced diffusion option pricing*. Journal of Finance, 38 (1983), p.p.213-217
 - [11] A.Pascucci e S.Polidoro, *On the Chachy problem for a non linear Kolmogorov equation*. SIAM J. Math.Anal., (2003).
 - [12] A.Pascucci e S.Polidoro, *A Gaussian upper bound for the fundamental solutions of a class of ultraparabolic equations*. J.Math.Anal., 282 (2003).p.p.396-409.
 - [13] A.Pascucci e M.Di Francesco, *On a class of degenerate parabolic equation of Kolmogorov type*. preprint, (2003).
 - [14] S.Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*. Le Matematiche, 49(1994), p.p.53-105.

1

¹In verità noi si vuol dire: in questo lavoro ci si è occupati con piacere di modelli, ma altra cosa e ben altra soddisfazione sarebbe derivata dall'occuparsi di modelle.