

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

MODELLI DISCRETI PER OPZIONI AMERICANE

Tesi di Laurea in Matematica
per le Applicazioni Economiche e Finanziarie

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
LAURA MONTI

I Sessione
Anno Accademico 2005-2006

*Alla mia famiglia
e a Michele...*

Introduzione

Uno dei problemi più importanti nella teoria della valutazione dei prezzi dei titoli derivati, si incontra nella stima dei prezzi dei derivati Americani. I derivati sono prodotti finanziari il cui valore dipende dal prezzo di un'altra attività finanziaria, definita *sottostante*; per poter valutare un titolo derivato è quindi necessario assumere un modello di comportamento del prezzo del bene sottostante.

La caratteristica che rende difficile la valutazione delle opzioni Americane è la natura stessa dei contratti: chi ha comprato il contratto (*holder*) può decidere in ogni istante temporale compreso tra l'acquisto e la scadenza dello stesso, se esercitare o meno il diritto d'acquisto (opzioni *call*) o di vendita (opzioni *put*) del sottostante; tale caratteristica è detta *esercizio anticipato* e la complessità del problema è quindi quella di decidere se esercitare anticipatamente il diritto insito nell'acquisto dell'opzione Americana, oppure se aspettare la scadenza.

Tra tutti i derivati, i contratti di opzione hanno un elevato valore dal punto di vista storico in quanto, con la loro immissione nei mercati finanziari, si è introdotto il concetto di *diritto* che in maniera sempre più marcata è andato a sostituire il precedente concetto di *obbligo* di esercizio, fornendo una valida alternativa all'uso dei contratti a termine.

Nel 1973 si verificano due eventi importanti per lo sviluppo della matematica finanziaria, in particolare per la valutazione del prezzo dei contratti derivati: dal lato pratico il 26 Aprile si apre il primo mercato mondiale delle opzioni a Chicago, il *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), mentre

dal lato teorico il matematico Fischer Black e l'economista Myron Scholes pubblicano un articolo sulla valutazione del prezzo delle opzioni, nel quale sviluppano per la prima volta formule esplicite per il prezzo di opzioni call e put europee nonché strategie di copertura e di replicazione per portafogli. Nello stesso anno l'articolo viene sviluppato ed esteso anche da Robert Merton.

Nel 1979, l'idea viene compresa a fondo e sviluppata anche in altre pubblicazioni: il modello di Cox, Ross e Rubinstein (CRR) basato sugli alberi binomiali, offre un approccio elementare dal quale si derivano facilmente le nozioni base di assenza di arbitraggio: queste sono la base per i modelli di valutazione del prezzo dei contratti derivati tuttora in uso.

L'articolo di Harrison e Kreps sui rapporti tra martingale e arbitraggio rende esplicita la congiunzione del modello di Black e Scholes con la matematica. Nel 1981 con l'articolo di Harrison e Pliska sul ruolo delle martingale e degli integrali stocastici in tale settore, le potenzialità di questa connessione diventano ancor più chiare e ben consolidate. Da allora, la matematica finanziaria si è sviluppata rapidamente in parallelo con la crescita esplosiva del volume della compravendita di titoli derivati; la sua importanza è stata altresì riconosciuta dal conseguimento del Premio Nobel per l'economia nel 1997 a due dei tre pionieri e fondatori rimasti: Myron Scholes e Robert Merton.

Lo scopo di questa tesi è analizzare il problema delle opzioni Americane attraverso il concetto probabilistico di tempo di arresto e descrivere modelli discreti per la valutazione e copertura di tali derivati; in particolare il primo capitolo descrive la natura e l'utilità degli strumenti derivati, sottolineando le differenze tra opzioni di tipo Europeo e opzioni di tipo Americano. Nel secondo capitolo, dopo alcuni preliminari probabilistici, si cerca in maniera intuitiva di definire il prezzo d'arbitraggio, ovvero il prezzo equo, di un'opzione Americana, dimostrando infine che tale prezzo è maggiore di quello di un'opzione Europea con le stesse caratteristiche, rendendo quindi esplicito il vantaggio fornito dalla possibilità di esercizio anticipato. Il terzo capitolo rappresenta la parte fondamentale di questo scritto e si concentra sul pro-

blema dell'arresto ottimale: in altre parole si cerca di trovare la strategia di investimento migliore per poter massimizzare il valore atteso del payoff, inizialmente attraverso la descrizione e dimostrazione di alcuni risultati probabilistici (stopping time, inviluppo di Snell, teorema di decomposizione di Doob) e, successivamente, con l'applicazione al caso concreto delle opzioni Americane. Infine il capitolo conclusivo descrive uno dei principali modelli a tempo discreto per la valutazione delle opzioni Americane, ovvero il modello binomiale di Cox, Ross e Rubinstein, mostrandone la dinamica, descrivendone le applicazioni e l'utilità e dimostrando che tale modello discreto può essere visto come un'approssimazione del famoso modello continuo di Black&Sholes.

Indice

Introduzione	i
1 Il mercato dei derivati	1
1.1 Considerazioni introduttive	1
1.2 Opzioni e derivati Europei	3
1.3 Opzioni e derivati Americani	6
2 Valutazione delle opzioni Americane	9
2.1 Preliminari probabilistici	9
2.1.1 Spazi di probabilità e variabili aleatorie	9
2.1.2 Indipendenza e attesa condizionata	12
2.1.3 Filtrazioni e martingale	13
2.2 Teoremi fondamentali della valutazione	16
2.3 Prezzo d'arbitraggio di opzioni Americane	18
2.4 Relazioni tra opzioni di tipo Americano ed Europeo	21
3 Tempo d'esercizio e copertura di opzioni Americane	25
3.1 Stopping time	25
3.2 Inviluppo di Snell	27
3.3 Teorema di Doob e massimo tempo d'arresto ottimale	31
3.4 Applicazione alle opzioni Americane	33
4 Modello binomiale per le opzioni Americane	41
4.1 Modello CRR	41

4.2	Algoritmo binomiale	44
4.3	Approssimazione discreta di un modello continuo	46
	Bibliografia	51

Capitolo 1

Il mercato dei derivati

1.1 Considerazioni introduttive

Un'opzione finanziaria è un titolo che conferisce il diritto di acquistare (in tal caso l'opzione è di tipo *call*) o di vendere (opzione *put*) un bene, a un prezzo prestabilito entro (o in corrispondenza di) una prefissata scadenza temporale.

Se l'opzione si può esercitare solo al momento della sua scadenza, allora si dice che è di tipo Europeo, se invece si può esercitare in ogni istante del periodo temporale che inizia quando l'opzione viene emessa e termina quando l'opzione scade, allora si dice che l'opzione è Americana.

Per quanto concerne il bene sottostante il contratto d'opzione, questo può essere di varia natura: può trattarsi di titoli azionari, di valuta estera, di merci, e di molte altre cose che siano però oggetto di scambio in un mercato ufficiale e le cui quotazioni siano accessibili al pubblico.

Le opzioni finanziarie appartengono alla famiglia dei titoli derivati; questi ultimi sono chiamati in tal modo in quanto il loro valore dipende (deriva) dall'andamento delle quotazioni di un bene (titolo) sottostante (*underlying security*).

Si deve subito sottolineare che un'opzione conferisce un diritto, cioè una facoltà di acquistare o di vendere un certo bene, che può essere o meno eser-

citato dall'operatore che possiede l'opzione. Quest'ultimo si chiama *holder*, mentre l'operatore che propone, ovvero vende il diritto si chiama *writer*. Il writer incassa un premio in cambio del diritto venduto e ha l'obbligo di acquistare o di vendere il bene sottostante l'opzione, sulla base delle decisioni dell'holder.

Il prezzo stabilito nel contratto in base al quale l'holder può acquistare o vendere il bene sottostante è detto prezzo d'esercizio (*strike price*).

Esempio 1.1 (di una opzione e della sua utilità). Tra un anno si devono pagare 100 dollari USA ad una ditta americana; attualmente il cambio \$/€ è fissato ad un certo valore, ma non si conosce quale sarà il cambio tra un anno.

Il mercato offre le seguenti opportunità:

- a) Si possono acquistare i dollari ora e investirli in titoli monetari americani fino alla data della consegna del denaro (operazione che potrebbe essere impossibile perchè non si possiede l'intera somma o non conveniente perchè il denaro potrebbe essere investito altrimenti).
- b) Si firma un contratto *forward* per l'acquisto tra un anno di \$100, fissando ora un prezzo di cambio per allora. Ci si impegna comunque a comprare quel prezzo anche se l'andamento dei cambi tra un anno sarà più favorevole.
- c) Si compra un'opzione d'acquisto (*call*) ad un certo prezzo, con cui si diventa detentore del diritto (senza il dovere) di acquistare la stessa quantità di dollari ad un prezzo fissato (*strike*) alla data di esercizio (opzione Europea) o entro tale data (opzione Americana). Il detentore dell'opzione troverà un vantaggio se il cambio \$/€ tra un anno dovesse salire.
- d) Si compra un'opzione di vendita (*put*) ad un certo prezzo, con cui si diventa detentore del diritto (senza il dovere) di vendere la stessa quantità di dollari ad un prezzo fissato (*strike*) alla data di esercizio (opzione Eu-

ropea) o entro tale data (opzione Americana). Il detentore dell'opzione troverà un vantaggio se il cambio \$/€ tra un anno dovesse scendere.

Il vantaggio di c) e d) consiste nell'avere un diritto senza un dovere e lo svantaggio è quello di dover pagare un premio tanto maggiore quanto minore è il prezzo fissato.

1.2 Opzioni e derivati Europei

Dalle considerazioni precedenti è semplice studiare il valore di un'opzione call Europea alla scadenza.

Nell'analisi seguente verranno usate le notazioni:

- K *strike*, prezzo d'esercizio
- T scadenza, maturità dell'opzione
- S_t prezzo di mercato del bene sottostante al tempo $t \in [0, T]$
- C_T valore dell'opzione call alla scadenza (*payoff*)

Alla scadenza vi sono due alternative per il prezzo del bene sottostante e, conseguentemente, per la politica dell'holder:

- i) se $S_T \leq K$ l'holder non esercita l'opzione
- ii) se $S_T > K$ l'holder esercita l'opzione, ottenendo un profitto pari a $S_T - K$.

Ne segue che:

$$C_T = \max \{S_T - K, 0\} = (S_T - K, 0)^+ \quad (1.1)$$

Ragionando analogamente per il caso di una put Europea, indicando con P_T il valore della put a scadenza, si trova che:

$$P_T = \max \{K - S_T, 0\} = (K - S_T, 0)^+ \quad (1.2)$$

Esempio 1.2. Si consideri il caso di un'opzione europea di tipo call, con sottostante l'azione Fiat, data di scadenza 1 Luglio 2006 e strike di 25 euro. Alla data di esercizio il detentore del diritto dovrà decidere se esercitare o meno l'opzione e la scelta dipenderà ovviamente dal prezzo di mercato del titolo sottostante. Se questo sarà minore del prezzo di esercizio si dice che l'opzione finisce *out of the money* e il detentore dell'opzione non avrà nessuna convenienza ad esercitare l'opzione: pagherebbe un prezzo minore acquistando l'azione direttamente sul mercato; in questo caso l'opzione non esercitata verrebbe abbandonata. Se invece il prezzo di mercato del titolo sottostante dovesse risultare superiore a 25 euro, si dice che l'opzione finisce *in the money* e il detentore del diritto avrà tutta la convenienza ad esercitarlo, potendo acquisire l'azione ad un prezzo inferiore al suo valore di mercato. Naturalmente potrà anche accadere che alla data di esercizio il prezzo dell'azione risulti esattamente uguale al prezzo di esercizio, rendendo così l'esercizio indifferente. In tal caso si dice che l'opzione finisce *at the money*.

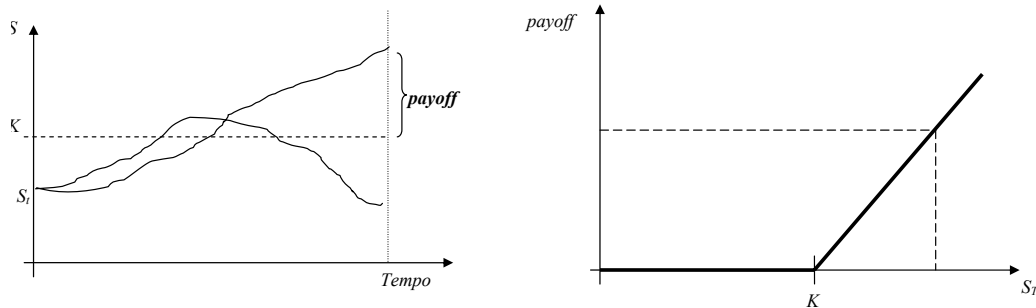


Figura 1.1: Opzione call Europea

Osservazione 1.1. Nelle figure 1.1 e 1.2 sono rappresentati graficamente i payoff dell'opzione call Europea e dell'opzione put Europea come funzioni del prezzo di mercato del titolo sottostante alla data di esercizio. Si noti che si tratta di funzioni continue e lineari a tratti, entrambe con un punto di non derivabilità in corrispondenza dell'ascissa $S(T) = K$, che rappresenta

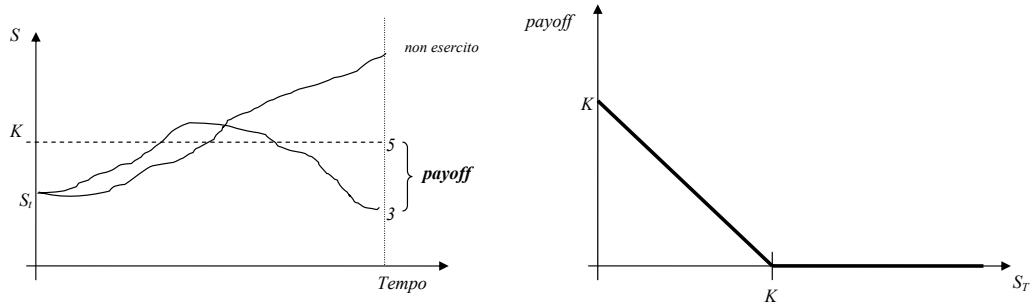


Figura 1.2: Opzione put Europea

per entrambe le opzioni il livello di indifferenza dell'esercizio. Se si assume che $S(T)$ sia illimitato superiormente, il pagamento previsto dall'opzione call è una variabile aleatoria non negativa e illimitata superiormente (guadagno illimitato per l'holder, perdita illimitata per le banche), mentre invece il pagamento dell'opzione put è limitato superiormente dal prezzo di esercizio.

Diamo ora una definizione più generale, che vale per qualunque tipo di derivato Europeo ed estende i casi delle opzioni call e put sopra considerati.

Definizione 1.1. Un *derivato europeo* H è una variabile aleatoria, poichè dipende dal processo stocastico $S = (S_0, S_1, \dots, S_N)$ del prezzo del sottostante. I derivati europei si dividono in

- derivati *path-independent* se

$$H = F(S_N)$$
cioè se dipendono solo dal valore del sottostante al tempo finale;
- derivati *path-dependent* se

$$H = F(S_0, S_1, \dots, S_N)$$
cioè se dipendono da tutta la traiettoria del sottostante.

Osservazione 1.2. I prezzi delle opzioni call e put Europee, sottoscritte sullo stesso bene con uguale prezzo d'esercizio e identica scadenza, sono legati dalla cosiddetta relazione di *Put-Call parity*:

Proposizione 1.1 (Formule di Put-Call parity). *Sia $t \in [0, T]$ e si considerino opzioni di tipo europeo. Il prezzo di un'opzione put al tempo t , (p_t) , è uguale al prezzo di un'opzione call (c_t) con le stesse caratteristiche, diminuito del prezzo del bene sottostante (S_t) e aumentato del valore attuale del prezzo d'esercizio K , cioè vale:*

$$p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

dove r è il tasso no-risk.

1.3 Opzioni e derivati Americani

Poichè i derivati di tipo Americano hanno la caratteristica di poter essere esercitati in un qualsiasi istante di vita del contratto è necessario specificare in ogni momento il premio a cui il possessore ha il diritto; non si tratterà più di una singola variabile aleatoria, ma di un processo stocastico.

Si consideri un mercato discreto $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ completo e libero da arbitraggi sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$ con un titolo sottostante rischioso di prezzo S_n nel generico periodo n .

Si consideri un'opzione Americana su S_n , che può quindi essere esercitata in qualsiasi periodo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Definizione 1.2. Un *derivato Americano* è un processo stocastico discreto $X = (X_n)$ non-negativo e adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)$, quindi

$$X = (X_0, X_1, \dots, X_N)$$

$$\text{tale che } X_n \geq 0, \quad X_n \text{ è } \mathcal{F}_n \text{ misurabile } \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

Come nel caso Europeo, anche i derivati Americani si dividono in

- derivati *path-independent* se

$$X_n = F(S_n)$$

- derivati *path-dependent* se

$$X_n = F(S_0, S_1, \dots, S_n)$$

Osservazione 1.3. La misurabilità del processo corrisponde al fatto che il payoff del derivato al tempo n dipende solo dalle informazioni disponibili all'istante n .

Dalla definizione e dalla dinamica stessa dei derivati Americani si deduce che, rispetto al caso Europeo, i problemi di valutazione e copertura si complicano a causa dell'opportunità dell'esercizio anticipato; nei prossimi capitoli verranno quindi affrontati i problemi della ricerca del prezzo equo e di una strategia replicante per i derivati Americani.

Il fattore esercizio anticipato se in pratica è un vantaggio, perchè offre all'holder maggiori opportunità decisionali, d'altro canto dal punto di vista teorico introduce il problema della determinazione del tempo di esercizio ottimale.

Capitolo 2

Valutazione delle opzioni Americane

In questo capitolo vengono inizialmente presentate alcune nozioni probabilistiche di base utili all'introduzione dei concetti di prezzo d'arbitraggio e valutazione dei derivati; applicando tali risultati di probabilità ed il principio economico del non arbitraggio si giunge ai teoremi fondamentali della valutazione ed in seguito alla definizione di prezzo d'arbitraggio per un'opzione Americana. La sezione conclusiva mostra invece il legame che sussiste tra derivati Europei ed Americani sullo stesso sottostante.

2.1 Preliminari probabilistici

2.1.1 Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Definizione 2.1. Uno *spazio di probabilità* è una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dove:

- Ω è un insieme diverso dal vuoto;
- $\mathcal{F}$ è una σ -algebra;
- P è una misura di probabilità.

Definizione 2.2. $\mathcal{F}$ è una σ -algebra se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tali che:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. se $A \in \mathcal{F}$ allora $A^C \in \mathcal{F}$
3. se $\{A_n\}_{n=1, \dots, N} \in \mathcal{F}$ allora $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{F}$

Se $E \in \mathcal{F}$ si dice che E è un evento; quindi la σ -algebra $\mathcal{F}$ è la famiglia degli eventi e le condizioni 1), 2), 3) significano:

1. $\emptyset$ è un evento
2. se A è un evento, anche il suo complementare A^C è un evento
3. unione numerabile di eventi è un evento

Definizione 2.3. Una funzione $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ è una *misura di probabilità* se:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$, se $E_n \cap E_m = \emptyset \forall n \neq m$

In particolare da questa definizione segue che $\mathcal{F}$ è la famiglia dei sottoinsiemi di Ω di cui si può calcolare la probabilità (cioè gli eventi).

Definizione 2.4. $X : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una *variabile aleatoria* se è tale che

$$X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$$

cioè se X è $\mathcal{F}$ -misurabile. In altri termini, affinché X sia una variabile aleatoria, è necessario poterne misurare la probabilità che essa sia compresa in un intervallo $[a, b]$, ovvero:

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in [a, b]\}$$

Definizione 2.5. Su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sia definita la variabile aleatoria X ; la σ -algebra generata da X è

$$\sigma(X) = \{X^{-1}([a, b]) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

cioè $\sigma(X)$ rappresenta l'insieme degli eventi di $\mathcal{F}$ di cui è necessario conoscere la probabilità per studiare la variabile aleatoria X .

In ambito finanziario si può pensare che X rappresenti il valore di un'azione e per studiarne l'andamento del prezzo è necessario conoscere $\sigma(X)$; quindi una σ -algebra può essere considerata come un insieme di informazioni e in particolare la σ -algebra generata da X è l'insieme di informazioni sull'azione X : conoscendo la probabilità degli eventi di $\sigma(X)$ si conosce l'andamento di X .

Definizione 2.6. Su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sia definita la variabile aleatoria X ; sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, cioè sia Ω un insieme discreto; il *valore atteso* di X è:

$$E(X) = \sum_{k=1}^N X(\omega_k) P(\{\omega_k\})$$

Se invece la cardinalità di Ω è infinita e X è integrabile

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

Definizione 2.7. Sia X una variabile aleatoria; la *varianza* di X è definita come:

$$var(X) = E((X - E(X))^2)$$

e risulta essere una stima di quanto X si discosta dal suo valore atteso; in ambito finanziario rappresenta la rischiosità di un titolo.

Definizione 2.8. Un *processo stocastico* è una famiglia di variabili aleatorie $(X_n)_{n=0, \dots, N}$ definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nel caso finanziario, in genere, ogni variabile aleatoria X_n rappresenterà il valore che il sottostante assume nell'istante n e quindi il processo stocastico $(X_n)_{n=0, \dots, N}$ rappresenterà l'intero andamento del titolo nel tempo.

2.1.2 Indipendenza e attesa condizionata

Definizione 2.9. Due *eventi* $E, F \in \mathcal{F}$ si dicono *indipendenti* se:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

In particolare se $P(E) > 0$ si ha che:

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$$

e tale relazione nel caso di eventi indipendenti mostra il significato più intuitivo di indipendenza: l'evento F non viene condizionato dall'accadere o meno dell'evento E :

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{P(F)P(E)}{P(E)} = P(F)$$

Definizione 2.10. Due σ -algebre $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, si dicono *indipendenti* se $\forall E \in \mathcal{F}$ e $\forall F \in \mathcal{G}$ si ha che E e F sono indipendenti.

In particolare se E ed F rappresentano due prezzi, tali prezzi sono indipendenti se lo sono le rispettive σ -algebre generate $\sigma(E)$ e $\sigma(F)$, cioè, in termini finanziari, i prezzi sono indipendenti quando lo sono le informazioni che li riguardano.

Definizione 2.11. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si definisce il concetto di *attesa condizionata* nel seguente modo:

1. sia $B \in \mathcal{F}$ e sia X una variabile aleatoria; se $P(B) > 0$ allora l'attesa di X condizionata a B è

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

2. sia $\sigma(B) = \{\emptyset, \Omega, B, B^C\}$; allora l'attesa di X condizionata a $\sigma(B)$ è la variabile aleatoria

$$E(X|\sigma(B))(\omega) = \begin{cases} E(X|\sigma(B)) & \text{se } \omega \in B \\ E(X|\sigma(B^C)) & \text{se } \omega \notin B \text{ ovvero } \omega \in B^C \end{cases}$$

Si definisce $E(X|\sigma(B)) = Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- Y è $\sigma(B)$ -misurabile
- $\int_H X dP = \int_H Y dP \quad \forall H \in \sigma(B)$

3. siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due σ -algebre tali che $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$; allora l'attesa di X condizionata a $\mathcal{G}$ è la variabile aleatoria $Y = E(X|\mathcal{G})$ tale che

- Y è $\mathcal{G}$ -misurabile
- $\int_H X dP = \int_H Y dP \quad \forall H \in \mathcal{G}$

Proposizione 2.1. *L'attesa condizionata gode delle seguenti proprietà:*

- i) *se X è $\mathcal{G}$ -misurabile allora $X = E(X|\mathcal{G})$*
- ii) *$E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$*
- iii) *se X e $\mathcal{G}$ sono indipendenti allora $E(X) = E(X|\mathcal{G})$*

2.1.3 Filtrazioni e martingale

Una famiglia di σ -algebra $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ tali che:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

è detta *filtrazione*.

Osservazione 2.1. Una filtrazione rappresenta un flusso di informazioni nel tempo:

$\mathcal{F}_0$ informazioni fino ad oggi, in altre parole non conosco nulla: $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$;

$\mathcal{F}_1$ informazioni fino a domani: ho qualche informazione in più e infatti

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1;$$

$\vdots$

$\mathcal{F}_N$ tutte le informazioni possibili fino al termine dell'intervallo considerato, cioè tutti gli eventi possibili: $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

In seguito $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ denoterà uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su cui è stata definita la filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=0, \dots, N}$.

Definizione 2.12. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ un processo stocastico $(M_n)_{n=0, \dots, N}$ si dice *martingala* se:

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall n = 0, \dots, N$$

in altri termini, note le informazioni sino ad oggi $(\mathcal{F}_n)$, la migliore stima del prezzo di domani è costituita dal prezzo di oggi.

Osservazione 2.2. Dalla definizione di martingala si ricava immediatamente:

- $E(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) = M_n$
- $E(M_n) = E(E(M_n|\mathcal{F}_0)) = E(M_0), \quad \forall n = 0, \dots, N$

Tale espressione indica che la martingala è un processo stocastico costante in media, come mostrato in figura 2.1.

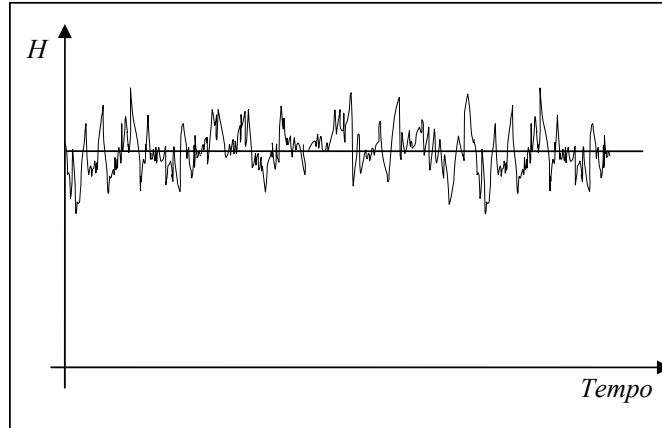


Figura 2.1: Traiettoria di un martingala

Definizione 2.13. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ un processo stocastico $(M_n)_{n=0, \dots, N}$ si dice *supermartingala* se:

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n \quad \forall n = 0, \dots, N$$

Osservazione 2.3. Dalla definizione di supermartingala si ricava immediatamente che la supermartingala è un processo stocastico decrescente in media, come mostrato in figura 2.2.

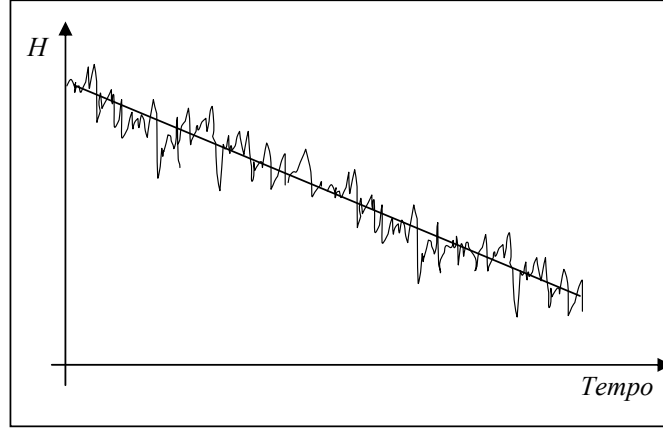


Figura 2.2: Traiettoria di una supermartingala

In genere i processi dei titoli azionari non sono martingale e quindi non godono delle importanti proprietà di regolarità intrinseche nella definizione stessa di martingala; si cerca di renderli tali e per fare ciò si costruisce una nuova misura di probabilità, detta misura martingala, sotto la quale i processi dei prezzi scontati siano costanti in media.

Definizione 2.14. Sia S un processo dei titoli su $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$ e sia $\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{S_n^0}$ il suo prezzo scontato; una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ si dice *misura martingala* se:

1. Q è equivalente a P ;
2. $E^Q(\widetilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \widetilde{S}_n \quad \forall n < N.$

La notazione $E^Q(X)$ indica l'attesa della variabile aleatoria X attraverso la misura di probabilità Q (si noti che il valore della martingala dipende dal valore S^0 scelto per la normalizzazione).

2.2 Teoremi fondamentali della valutazione

Sia $(\Omega, P, \mathcal{F})$ uno spazio di probabilità finito, su cui è definita la filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=0, \dots, N}$, dove l'indice n ha significato di tempo (discreto), mentre la σ -algebra $\mathcal{F}_n$ rappresenta l'informazione data dal mercato fino al tempo n ; il tempo finale N rappresenterà la data di scadenza o maturità.

I seguenti teoremi forniscono condizioni necessarie e sufficienti affinché il mercato discreto $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ su $(\Omega, P, \mathcal{F})$ sia completo e libero da arbitraggio. Ricordiamo innanzitutto cosa significano questi ultimi due concetti, dando le seguenti definizioni:

Definizione 2.15. Una strategia di investimento $\alpha = (\alpha_n)$ si dice *autofinanziante* se

$$V_n(\alpha) = \langle \alpha_n, S_n \rangle = \langle \alpha_{n+1}, S_n \rangle \quad \forall n \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \\ \alpha_n &= (\alpha_n^0, \dots, \alpha_n^M), \quad n = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Cioè nell'espressione del portafoglio

$$V_n(\alpha) = \langle \alpha_n, S_n \rangle = \sum_{i=0}^M \alpha_n^i S_n^i$$

si ha che α_n^i rappresenta la quantità del titolo i presente nel portafoglio al tempo n .

Un portafoglio $V_n(\alpha)$ che soddisfa la condizione (2.1) è detto *portafoglio autofinanziante*.

Definizione 2.16. Se una strategia di investimento $\alpha = (\alpha_n)$ è tale che α_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ - misurabile si dice che $\alpha = (\alpha_n)$ è una *strategia predicibile*.

Osservazione 2.4. Nella pratica la predicibilità significa semplicemente che la strategia di investimento può basarsi solo sulle informazioni fino ad oggi e non su quelle future; l'essere autofinanziante, invece, per un portafoglio significa

che le variazioni di valore dipendono solo dalle variazioni di prezzo dei titoli che lo compongono e non da interventi esterni come, ad esempio, immissione o prelievo di denaro. Infatti dalla definizione di portafoglio autofinanziante si ha

$$V_{n+1}(\alpha) - V_n(\alpha) = \alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

cioè, in altri termini, $\Delta V = \alpha_{n+1} \Delta S$: il variare del valore del portafoglio da un istante temporale all'altro $\Delta V = V_{n+1}(\alpha) - V_n(\alpha)$ dipende solo dalla variazione dei prezzi dei titoli $\Delta S = S_{n+1} - S_n$ e in nessuna maniera dalla variazione di capitale investito. Più in generale anche per istanti non adiacenti la variazione del portafoglio dipende dalla variazione del prezzo dei titoli: infatti data una strategia autofinanziante α si ha:

$$V_N(\alpha) - V_0(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

Infatti, poichè α è autofinanziante

$$V_{n+1}(\alpha) - V_n(\alpha) = \alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

e sommando tutti i termini da N a 0 al primo membro si ottiene una somma telescopica nella quale i termini si annullano due a due eccetto il primo e l'ultimo, mentre al secondo membro resta la sommatoria.

Definizione 2.17. Sia $\mathcal{A} = \{\text{strategia } \alpha | \alpha_n \text{ predicibile, } \alpha_n \text{ autofinanziante}\}$; un *arbitraggio* è una strategia $\alpha \in \mathcal{A}$ tale che

1. $V_0(\alpha) = 0$;
2. esiste $n \in [0, N]$ tale che $P(V_n(\alpha) \geq 0) = 1$;
3. esiste $n \in [0, N]$ tale che $P(V_n(\alpha) > 0) > 0$.

Un *arbitraggio* è quindi una strategia di investimento che offre guadagno senza rischio e senza spese perchè:

1. al tempo iniziale non costa nulla;

- 2. non è rischioso;
- 3. offre possibilità di guadagno.

Definizione 2.18. Un mercato S si dice *libero da arbitraggio* se non esiste $\alpha \in \mathcal{A}$ tale che α sia un arbitraggio.

Definizione 2.19. Un mercato S si dice *completo* se ogni derivato Europeo è replicabile; in altre parole, in un mercato completo se H è un'opzione Europea allora esiste una strategia α il cui valore finale del portafoglio è pari al payoff dell'opzione (in termini matematici, esiste una strategia α tale che $V_N(\alpha) = H$).

Teorema 2.1 (Primo teorema fondamentale della valutazione). *Sia $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ un mercato discreto su $(\Omega, P, \mathcal{F})$.*

Allora S è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala Q .

Teorema 2.2 (Secondo teorema fondamentale della valutazione). *Sia $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ un mercato discreto su $(\Omega, P, \mathcal{F})$; sia S libero da arbitraggi. Allora S è completo se e solo se esiste ed è unica una misura di probabilità Q tale che Q sia una misura martingala.*

Osservazione 2.5. D'ora in poi si supporrà che il mercato S sia libero da arbitraggi e completo da cui, per il primo e il secondo teorema fondamentale della valutazione, esisterà un'unica misura martingala Q .

In particolare in seguito $\tilde{S}$ denoterà il mercato normalizzato e in generale si indicherà il prezzo normalizzato di un qualsiasi titolo W :

$$\widetilde{W}_n = \frac{W_n}{S_n^0}$$

2.3 Prezzo d'arbitraggio di opzioni Americane

Sia $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ un mercato discreto completo e libero da arbitraggi sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$; sia Q l'unica misura martingala equiva-

lente su S .

Si vuole introdurre il concetto di prezzo di arbitraggio (H_n) di un'opzione Americana X ; analizzando separatamente e a ritroso i vari istanti temporali si ottiene in maniera intuitiva:

tempo N : il prezzo d'arbitraggio è $H_N = X_N$

tempo $N-1$: il prezzo d'arbitraggio è

- X_{N-1} se l'holder decide di esercitare il derivato;
 - H_{N-1} varrà quanto il prezzo di un derivato Europeo con payoff H_N e scadenza T , se l'holder decide di non esercitare il derivato;
- Questa possibilità si esprime attraverso la relazione:

$$H_{N-1} = \max \left\{ X_{N-1}, E^Q \left(H_N \frac{S_{N-1}^0}{S_N^0} \middle| \mathcal{F}_{N-1} \right) \right\}$$

o equivalentemente:

$$\tilde{H}_{N-1} = \max \left\{ \tilde{X}_{N-1}, E^Q \left(\tilde{H}_N \middle| \mathcal{F}_{N-1} \right) \right\}$$

Iterando il ragionamento si giunge alla seguente:

Definizione 2.20. Il processo stocastico $H = (H_n)$ definito da:

$$\begin{aligned} H_N &= X_N \\ H_n &= \max \left\{ X_n, E^Q \left(H_{n+1} \frac{S_n^0}{S_{n+1}^0} \middle| \mathcal{F}_n \right) \right\}, \quad \text{per } n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} H_N &= X_N \\ \tilde{H}_n &= \max \left\{ \tilde{X}_n, E^Q \left(\tilde{H}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right) \right\}, \quad \text{per } n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

si dice *prezzo d'arbitraggio* del derivato Americano X .

Osservazione 2.6. Affinchè si possa definire il prezzo d'arbitraggio per un derivato Americano, deve esistere il prezzo d'arbitraggio di ogni derivato

Europeo, pertanto le ipotesi di completezza e assenza di arbitraggio risultano necessarie.

Infatti il prezzo d'arbitraggio di un derivato Europeo è dato dal valore uguale (da cui la necessità di assenza di arbitraggio) che assumono nello stesso istante due portafogli replicanti (la cui esistenza necessita l'ipotesi di completezza del mercato).

Osservazione 2.7. Dalla definizione 2.20 segue immediatamente che

1. $\tilde{H}_n$ è $\mathcal{F}_n$ -misurabile
2. $\forall n = 0, \dots, N-1$ vale

$$\tilde{H}_n \geq E^Q(\tilde{H}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \quad (2.4)$$

Quindi se per i prezzi dei derivati Europei si ha che questi sono Q -martingale cioè costanti in media, per i derivati Americani la (2.4) indica che il processo stocastico $\tilde{H}$ è una Q -super-martingala cioè decresce in media (si confrontino le figure 2.1 e 2.2); questa differenza sta nella possibilità di esercizio anticipato, vantaggio che però diminuisce col passare del tempo.

Proposizione 2.2. $\tilde{H}$ è la più piccola super-martingala che domina $\tilde{X}$.

Dimostrazione. Dalla (2.3) si ha $\tilde{H}_n \geq E^Q(\tilde{H}_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ e $\tilde{H}_n \geq \tilde{X}_n$ quindi $\tilde{H}$ è una Q -super-martingala che domina $\tilde{X}$. Mostriamo che è la più piccola: sia $\tilde{M}$ un'altra Q -super-martingala che domina $\tilde{X}$ e facciamo vedere che $\tilde{M}_n \geq \tilde{H}_n$.

Innanzitutto si ha $\tilde{M}_N \geq \tilde{X}_N = \tilde{H}_N$, ma allora

$$\tilde{M}_{N-1} \geq E^Q(\tilde{M}_N|\mathcal{F}_{N-1}) \geq E^Q(\tilde{H}_N|\mathcal{F}_{N-1})$$

ma per ipotesi $\tilde{M}$ domina $\tilde{X}$ quindi

$$\tilde{M}_{N-1} \geq \tilde{X}_{N-1}$$

da cui:

$$\widetilde{M}_{N-1} \geq \max(\widetilde{X}_{N-1}, E^Q(\widetilde{H}_N | \mathcal{F}_{N-1}) = \widetilde{H}_{N-1}$$

Dunque si ha $\widetilde{M}_{N-1} \geq \widetilde{H}_{N-1}$ e procedendo per ricorrenza otteniamo che $\widetilde{M}_n \geq \widetilde{H}_n$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 2.8. La definizione 2.20 conserva l'assenza di arbitraggio, cioè immettendo sul mercato $S = (S^0, S^1, \dots, S^M)$ il derivato Americano X valutato secondo l'equazione (2.3), si conserva l'assenza di arbitraggi.

2.4 Relazioni tra opzioni di tipo Americano ed Europeo

In questo paragrafo vengono messe in evidenza alcune relazioni tra i prezzi dei derivati di tipo Europeo e Americano; in particolare il seguente teorema esprime chiaramente le maggiori opportunità conferite all'holder di un'opzione Americana rispetto al detentore di un'Europea, vantaggi derivanti dall'esercizio anticipato che causano però un aumento del prezzo d'arbitraggio.

Teorema 2.3. *Sia X un derivato Americano; siano (H_n^A) e (H_n^E) i prezzi d'arbitraggio rispettivamente del derivato Americano e del derivato Europeo con payoff X_N .*

Allora vale:

- i) $H_n^A \geq H_n^E$, per $n = 0, \dots, N$
- ii) se $H_n^E \geq X_n \forall n \in [0, N]$ allora

$$H_n^A = H_n^E, \quad \forall n \in [0, N]$$

Dimostrazione. i) Poichè $\widetilde{H}_n^A$ è una Q-supermartingala si ha

$$\widetilde{H}_n^A \geq E(\widetilde{H}_N^A | \mathcal{F}_n) = E(\widetilde{X}_N | \mathcal{F}_n) = \widetilde{H}_n^E$$

quindi $H_n^A \geq H_n^E$.

ii) Poichè il processo $\tilde{H}_n^E$ è una Q-martingala, se $H_n^E \geq X_n$ per ogni n si ottiene:

$$\tilde{H}_{N-1}^E = E^Q(\tilde{X}_N | \mathcal{F}_{N-1}) \geq \max \left\{ \tilde{X}_{N-1}, E^Q(\tilde{X}_N | \mathcal{F}_{N-1}) \right\} = \tilde{H}_{N-1}^A$$

Iterando il procedimento si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 2.9. Per meglio comprendere il risultato del teorema 2.3 si consideri il caso di una call Americana $X_n = (S_n - K)^+$ con sottostante S_n e strike K ; la proposizione 2.3 mostra infatti che il *prezzo di una call Americana coincide con quello di un'Europea*.

Infatti se $r \geq 0$ è il tasso no-risk si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n^E &= (1+r)^{-N} E^Q(X_n | \mathcal{F}_n) = \\ &= (1+r)^{-N} E^Q((S_n - K)^+ | \mathcal{F}_n) \geq \\ &\geq E^Q(\tilde{S}_N - K(1+r)^{-N} | \mathcal{F}_n) = \\ &= \tilde{S}_n - K(1+r)^{-N} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $\tilde{S}_n$ è una martingala.

Quindi riportando i prezzi ad oggi si ha:

$$H_n^E \geq S_n - K(1+r)^{-N-n} \geq S_n - K$$

ma essendo $H_n^E \geq 0$

$$H_n^E \geq (S_n - K)^+ = X_n$$

Siamo quindi nelle ipotesi della ii) del teorema 2.3 e quindi $H_n^E = H_n^A$ cioè i prezzi d'arbitraggio di una call Europea e di una Americana coincidono.

In maniera intuitiva questo corrisponde al fatto che invece di esercitare una call Americana prima della scadenza è più conveniente vendere il sottostante. Infatti:

- a)** se ci fosse esercizio anticipato al tempo $n < N$ l'holder avrebbe un profitto pari a $S_n - K$ che a scadenza diventa $(1+r)^{N-n}(S_n - K)$;

- b) se al tempo $n < N$ l'holder vendesse un'unità del sottostante, conservando l'opzione, il profitto a scadenza sarà:

$$(1+r)^{N-n}S_n - S_N + (S_N - K)^+ = \begin{cases} (1+r)^{N-n}S_n - K, & \text{se } S_N > K \\ (1+r)^{N-n}S_n - S_N, & \text{se } S_N \leq K \end{cases}$$

che in entrambi i casi è maggiore della strategia illustrata in a).

Proposizione 2.3 (Put-Call parity per opzioni Americane). *Siano C , P rispettivamente i prezzi d'arbitraggio di opzioni call e put Americane con strike K , sottostante S e scadenza T .*

Valgono $\forall n = 0, \dots, N$:

- i) $S_n - K \leq C_n - P_n \leq S_n - Ke^{-r(T-t_n)}$
- ii) $(K - S_n)^+ \leq P_n \leq K$

Capitolo 3

Tempo d'esercizio e copertura di opzioni Americane

Nel paragrafo 2.3 è stato definito il prezzo d'arbitraggio, cioè il prezzo equo per un'opzione Americana; a causa dell'esercizio anticipato, è opportuno considerare anche il problema dal punto di vista del detentore: quando conviene esercitare il diritto di opzione? In particolare occorre modellizzare l'istante (aleatorio) in cui l'opzione viene esercitata e determinare il periodo ottimo di esercizio (e possibilmente anche una strategia di copertura).

L'intento di questo capitolo è mostrare alcuni risultati probabilistici (paragrafi 3.1 e 3.2) utili per la caratterizzazione del tempo di arresto e dei processi arrestati; in particolare grazie ai risultati riportati in seguito verrà chiarito il meccanismo dell'esercizio anticipato e della scelta della miglior data di esercizio (cioè della miglior strategia di esercizio), applicando i risultati probabilistici appena dimostrati al caso particolare delle opzioni Americane (paragrafo 3.4).

3.1 Stopping time

Il detentore di un'opzione Americana può esercitare il proprio diritto in qualsiasi data entro la scadenza; la decisione di esercitarla o meno al tempo n

sarà presa considerando le informazioni del mercato disponibili fino a tempo n . In un modello a tempo discreto su uno spazio di probabilità in cui è definito una filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$, la data di esercizio può essere descritta da una variabile aleatoria, detta *tempo d'arresto* o *stopping time*.

Definizione 3.1. Una variabile aleatoria ν a valori in $\{0, 1, \dots, N\}$ è un *tempo d'arresto* se $\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$ vale:

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Osservazione 3.1. ν è un tempo d'arresto $\Leftrightarrow \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$ vale la relazione $\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, dal momento che $\{\nu \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{\nu = k\} \in \mathcal{F}_n$

Definizione 3.2. Sia $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ un processo stocastico adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ e sia ν un tempo d'arresto.

Si definisce *processo arrestato al tempo d'arresto* ν il processo stocastico¹

$$X_n^\nu(\omega) := X_{\nu(\omega) \wedge n}(\omega) \quad (3.1)$$

Cioè sull'evento $\{\nu = j\}$ si ha

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & \text{se } j \leq n \\ X_n & \text{se } j > n \end{cases} \quad (3.2)$$

Si noti che $X_N^\nu = X_j$.

Proposizione 3.1. Sia (X_n) un processo stocastico adattato e sia ν un tempo d'arresto. Allora il processo arrestato $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$ è adattato.

Inoltre se (X_n) è una $\mathcal{F}_n$ -martingala (rispettivamente supermartingala) allora anche $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$ lo è.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla seguente rappresentazione:

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^n \chi_{\{j \leq \nu\}} (X_j - X_{j-1}) \quad (3.3)$$

¹Con la notazione $a \wedge b$ si indica $\min\{a, b\}$.

Poichè $\{j \leq \nu\}^c = \{\nu < j\} = \{\nu \leq j-1\}$ e ν è un tempo d'arresto, il processo $\chi_{\{j \leq \nu\}}$ è predicibile e positivo; si ottiene quindi che (X_n^ν) è un processo stocastico adattato.

Inoltre se (X_n) è una $\mathcal{F}_n$ -martingala, dalla (3.3) si ricava

$$X_{n+1}^\nu = X_n^\nu + (X_{n+1} - X_n)\chi_{\{\nu \geq n+1\}} = X_n^\nu + (X_{n+1} - E^Q(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))\chi_{\{\nu \geq n+1\}}$$

Ricordando che $\{\nu \geq n+1\}$ è $\mathcal{F}_n$ -misurabile (da cui lo è $\chi_{\{\nu \geq n+1\}}$) e condizionando rispetto a $\mathcal{F}_n$ si ottiene:

$$E^Q(X_{n+1}^\nu|\mathcal{F}_n) = X_n^\nu + \chi_{\{\nu \geq n+1\}}E^Q(X_{n+1} - E^Q(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = X_n^\nu$$

cioè $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$ è una martingala. $\square$

3.2 Involuppo di Snell

Definizione 3.3. Sia Z_n un processo stocastico adattato su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$.

Il processo U_n definito da

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max \{Z_n, E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} \end{cases} \quad (3.4)$$

è detto *involuppo di Snell del processo Z_n* .

Osservazione 3.2. Per la proposizione 2.2 U_n è la più piccola super-martingala che domina Z_n .

Proposizione 3.2. La variabile aleatoria definita da:

$$\nu_0 = \inf \{n \geq 0 | U_n = Z_n\} \quad (3.5)$$

è un tempo d'arresto e il processo arrestato $(U_{n \wedge \nu_0})$ è una martingala

Dimostrazione. Poichè $U_N = Z_N$, ν_0 è un elemento ben definito dell'insieme $\{0, 1, \dots, N\}$ si ha

$$\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$$

e per $k \geq 1$

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k$$

Per mostrare che $(U_n^{\nu_0})$ è una martingala si utilizza la scrittura

$$U_n^{\nu_0} = U_{n \wedge \nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^n \chi_{\{\nu_0 \geq j\}} \Delta U_j$$

Così per $n \in \{0, 1, \dots, N\}$,

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = \chi_{\{n+1 \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - U_n)$$

Ma per definizione $U_n = \max \{Z_n, E(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}$ e quindi sull'evento $\{n+1 \leq \nu_0\}$ si ha che $U_n > Z_n$ da cui $U_n = E(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) \Rightarrow$

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = \chi_{\{n+1 \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - E(U_{n+1} | \mathcal{F}_n))$$

Condizionando rispetto a $\mathcal{F}_n$ tale relazione, ricordando che $\{n+1 \leq \nu_0\} \in \mathcal{F}_n$ (poichè complementare di $\{\nu_0 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$) si ottiene

$$E(U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} | \mathcal{F}_n) = \chi_{\{n+1 \leq \nu_0\}} E((U_{n+1} - E(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) | \mathcal{F}_n) = 0$$

e quindi la tesi. $\square$

La proposizione 3.2 ha mostrato che il processo $U_n^{\nu_0}$ è una martingala, e questo collega il concetto di inviluppo di Snell al problema della scelta dell'esercizio ottimale attraverso il seguente risultato; in seguito con $\tau_{n,N}$ si denoterà l'insieme dei tempi di arresto a valori in $\{n, n+1, \dots, N\}$; si noti che $\tau_{n,N}$ è un insieme finito, dal momento che lo è Ω .

Teorema 3.1. *Il tempo di arresto ν_0 soddisfa la relazione*

$$U_0 = E(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) \tag{3.6}$$

In particolare

$$U_0 = \sup_{\nu \in \tau_{0,N}} E(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Poichè per la proposizione 3.2 il processo U^{ν_0} è una martingala si ha $U_0^{\nu_0} = E(U_N^{\nu_0}|\mathcal{F}_0)$ e ricordando la definizione di processo arrestato si ottiene:

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = E(U_N^{\nu_0}|\mathcal{F}_0) = E(U_{N \wedge \nu_0}|\mathcal{F}_0) = E(U_{\nu_0}|\mathcal{F}_0) = E(Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dalla definizione di ν_0 secondo la (3.5). D'altro canto se $\nu \in \tau_{0,N}$ il processo arrestato U^ν è una supermartingala: infatti per l'osservazione 3.2 il processo U è una supermartingala e quindi per la proposizione 2.2 lo è anche U^ν .

Quindi

$$U_0 = U_0^\nu \geq E(U_N^\nu|\mathcal{F}_0) = E(U_{N \wedge \nu}|\mathcal{F}_0) = E(U_\nu|\mathcal{F}_0) \geq E(Z_\nu|\mathcal{F}_0)$$

poichè per definizione di U^ν si ha $U^\nu \geq Z^\nu$.

Quindi si ottiene subito che

$$U_0 = \sup_{\nu \in \tau_{0,N}} E(Z_\nu|\mathcal{F}_0)$$

cioè la tesi. □

Si definiscono e caratterizzano ora i tempi di arresto ottimali, cioè le strategie corrispondenti al maggior valore atteso del processo stocastico Z (che diventerà poi l'opzione Americana di cui si troverà, in corrispondenza degli stopping time ottimali, il maggior payoff atteso).

Definizione 3.4. Un tempo d'arresto ν è detto *ottimale* per il processo stocastico $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ se

$$E(Z_\nu|\mathcal{F}_0) = \sup_{\nu' \in \tau_{0,N}} E(Z_{\nu'}|\mathcal{F}_0) \quad (3.8)$$

Osservazione 3.3. ν_0 è un tempo d'arresto ottimale.

Proposizione 3.3. Un tempo d'arresto ν è ottimale se e solo se valgono le seguenti condizioni:

i) $Z_\nu = U_\nu$

ii) $U_{\nu \wedge n} = U^\nu$ è una martingala

In tal caso vale quindi la formula del teorema 3.1.

$$U_0 = E(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Supponiamo che valgano i) e ii) allora da ii) si ha che $U_0 = U_0^\nu = E(U_N^\nu | \mathcal{F}_0) = E(U_\nu | \mathcal{F}_0)$ e quindi per la i) $U_0 = E(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$; l'ottimalità discende quindi dal teorema 3.1.

Viceversa supponiamo ν ottimale; ricordando che anche ν_0 è ottimale (osservazione 3.3) e il risultato del teorema 3.1 si ha :

$$E(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\nu' \in \tau_{0,N}} E(Z_{\nu'} | \mathcal{F}_0) = E(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = U_0$$

da cui si ha subito l'equazione (3.9).

Inoltre, per definizione di inviluppo di Snell $Z_\nu \leq U_\nu$, quindi:

$$U_0 = E(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \leq E(U_\nu | \mathcal{F}_0) \quad (3.10)$$

Ma l'inviluppo di Snell U^ν è una supermartingala (osservazione 3.2), da cui $E(U_\nu | \mathcal{F}_0) \leq U_0$ che combinata con l'equazione (3.10) implica

$$E(U_\nu | \mathcal{F}_0) = E(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$$

da cui la i), poichè per definizione $U_\nu \geq Z_\nu$.

Proviamo che l'ottimalità di ν implica anche la ii): poichè l'inviluppo di Snell è una supermartingala e poichè $E(U_\nu | \mathcal{F}_0) = U_0$

$$U_0 \geq E(U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0) \geq E(U_\nu | \mathcal{F}_0) = U_0$$

quindi la catena di disuguaglianze si riduce ad una serie di uguaglianze tra cui:

$$E(U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0) = E(U_\nu | \mathcal{F}_0) = E(E(U_\nu | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_0) \quad (3.11)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la seguente proprietà dell'attesa condizionata:

date $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ σ -algebre di Ω , se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ allora $E(X | \mathcal{H}) = E(E(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H})$

Dall'equazione (3.11) si ottiene infine $U_{\nu \wedge n} = E(U_\nu | \mathcal{F}_n)$ cioè la ii), dal momento che $U_{\nu \wedge n} \geq E(U_\nu | \mathcal{F}_n)$. $\square$

Corollario 3.1. *Il tempo d'arresto ν_0 definito dalla 3.2 è il più piccolo tempo d'arresto ottimale.*

Osservazione 3.4. Quanto detto finora può essere generalizzato definendo

$$\nu_n = \inf \{j \geq n | U_j = Z_j\}$$

ottenendo analogamente il seguente risultato:

$$U_n = \sup_{\nu' \in \tau_{n,N}} E(Z_{\nu'} | \mathcal{F}_n) = E(Z_{\nu_n} | \mathcal{F}_n)$$

E' chiaro che ν_n rappresenta il primo tempo d'arresto ottimale successivo all'istante n .

3.3 Teorema di Doob e massimo tempo d'arresto ottimale

La sezione si conclude col seguente teorema, che sarà utile per lo studio della copertura delle opzioni Americane; in particolare applicando tale teorema all'involuppo di Snell si trovano ulteriori informazioni sui tempi di arresto ottimali, che risultano essere sempre minori del tempo di arresto ν_{max} definito nel teorema 3.3.

Teorema 3.2 (Decomposizione di Doob). *Ogni supermartingala U_n può decomorsi in uno ed un solo modo come*

$$U_n = M_n - A_n \tag{3.12}$$

dove

- M_n è una martingala,
- A_n è un processo predicabile, crescente e con $A_0 = 0$.

Dimostrazione. E' chiaro che per $n = 0$ l'unica soluzione è $M_0 = U_0$ e $A_0 = 0$. Inoltre si deve avere:

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n) \quad (3.13)$$

e condizionando tale relazione rispetto a $\mathcal{F}_n$ si ottiene

$$E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) - U_n = -(A_{n+1} - A_n) \quad (3.14)$$

relazione che ha senso tenendo conto delle proprietà di U_n e di A_n , e dal momento che $E(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = 0$ poichè M_n è una martingala.

Sostituendo l'equazione (3.14) nella (3.13) si ottiene:

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) \quad (3.15)$$

Le equazioni (3.14) e (3.15) determinano univocamente rispettivamente A_n e M_n , che risultano inoltre essere rispettivamente una martingala e un processo predicibile non decrescente (poichè U_n è una supermartingala). $\square$

Teorema 3.3. *Sia $(Z_n)_{n=0,\dots,N}$ un processo stocastico adattato con inviluppo di Snell $(U_n)_{n=0,\dots,N}$; tale processo stocastico è una supermartingala e per il teorema di decomposizione di Doob vale $U_n = M_n - A_n$, dove $(M_n)_{n=0,\dots,N}$ è una martingala e $(A_n)_{n=0,\dots,N}$ è un processo predicibile, crescente e con $A_0 = 0$. Sia*

$$\nu_{max} = \begin{cases} N, & \text{se } A_n = 0 \\ \inf \{n, A_{n+1} > 0\}, & \text{se } A_n \neq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Allora

- i) ν_{max} è un tempo d'arresto ottimale;
- ii) ogni tempo di arresto ottimale ν soddisfa la relazione $\nu \leq \nu_{max}$.

Dimostrazione. i) La predicibilità del processo $(A_n)_{n=0,\dots,N}$ implica immediatamente che ν_{max} è un tempo d'arresto. Dalla decomposizione $U_n = M_n - A_n$ e poichè $A_j = 0$ per $j \leq \nu_{max}$ si ha $U^{\nu_{max}} = M^{\nu_{max}}$ da cui il processo arrestato $(U_n^{\nu_{max}})_{n=0,\dots,N} = (U_{n \wedge \nu_{max}})_{n=0,\dots,N}$ è una martingala; è quindi verificata la

condizione ii) della proposizione 3.3. Per mostrare l'ottimalità di ν_{max} rimane quindi da provare che vale la condizione i) della proposizione 3.3 cioè:

$$U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}$$

Utilizzando la definizione di U_n nella scrittura

$$U_{\nu_{max}} = \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{\{\nu_{max}=j\}} U_j + \chi_{\{\nu_{max}=N\}} U_N$$

si ottiene

$$U_{\nu_{max}} = \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{\{\nu_{max}=j\}} \max(Z_j, E(U_{j+1}|\mathcal{F}_n)) + \chi_{\{\nu_{max}=N\}} Z_N$$

Ora, sull'insieme $\{\nu_{max} = j\}$ poichè $A_j = 0 < A_{j+1}$ e $U_j = M_j$, si ha che $E(U_{j+1}|\mathcal{F}_j) = M_j - A_{j+1} < U_j$ e quindi $U_j = \max(Z_j, E(U_{j+1}|\mathcal{F}_n)) = Z_j$, cioè $U_{\nu_{max}} = Z_{\nu_{max}}$. Il tempo d'arresto ν_{max} soddisfa le condizioni della proposizione 3.3 e risulta quindi essere ottimale.

ii) Per provare che ν_{max} è il più grande tempo di arresto ottimale, si ragioni per assurdo e sia ν un tempo d'arresto tale che $\nu \geq \nu_{max}$ e $P(\nu > \nu_{max}) > 0$; allora, utilizzando la decomposizione di Doob

$$E(U_\nu) = E(M_\nu) - E(A_\nu) = E(M_0) - E(A_\nu) = E(U_0) - E(A_\nu) < E(U_0)$$

da cui l'assurdo, perchè si troverebbe che il processo U^ν stoppato al tempo ν non potrebbe essere una martingala. Quindi ogni tempo di arresto ottimale ν soddisfa la relazione $\nu \leq \nu_{max}$. $\square$

3.4 Applicazione alle opzioni Americane

Si ritorna ora al problema di un'opzione Americana X avente come prezzo d'arbitraggio il processo stocastico $\tilde{H}$ dato da

$$\begin{aligned} \tilde{H}_N &= \tilde{X}_N \\ \tilde{H}_n &= \max \left\{ \tilde{X}_n, E^Q \left(\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n \right) \right\}, \quad \text{per } n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Con le nozioni introdotte nei paragrafi 3.1 e 3.2 risulta quindi che il processo $(\tilde{H}_n)$ del prezzo d'arbitraggio dell'opzione Americana X non è altro che l'inviluppo di Snell, sotto la misura martingala Q , del processo $(\tilde{X}_n)$.

In particolare il processo arrestato al tempo ν non è altro che il *valore*, il *profitto* dell'investimento fatto sul derivato X tenendo conto dell'esercizio anticipato in ν . Infatti per definizione

$$H_n^\nu = H_{\nu \wedge n} = \begin{cases} H_n & \text{se } n < \nu \\ X_\nu & \text{se } n \geq \nu \end{cases} \quad (3.18)$$

cioè prima dell'esercizio è uguale al prezzo del derivato, mentre dopo l'esercizio rimane costantemente pari al payoff relativo alla data di esercizio ν (figura 3.1).

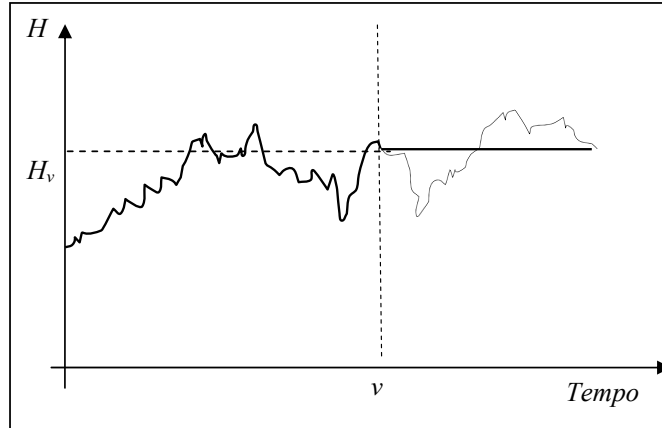


Figura 3.1: Il processo arrestato corrisponde al profitto

Vediamo ora come la nozione di tempo d'arresto ottimale possa essere intuitivamente interpretata come la *data di esercizio ottimale* di un'opzione Americana in modo da ottenere il maggior payoff atteso rispetto alla misura martingala Q e dove la $\mathcal{F}_n$ -misurabilità significa semplicemente che la decisione di esercitare al tempo n si basa esclusivamente sulle informazioni disponibili fino a n .

Definizione 3.5. Una variabile aleatoria

$$\nu : \Omega \longrightarrow \{0, \dots, N\}$$

tale che

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$$

si dice *tempo o strategia di esercizio*. Con $\tau_{0,N}$ si indicherà l'insieme di tutte le possibili strategie di esercizio.

Il seguente esempio giustifica la caratterizzazione (3.5) del più piccolo tempo di arresto ottimale:

Esempio 3.1. Si consideri un'opzione put Americana con sottostante S e strike K ; si supponga di trovarsi al tempo $N-1$ dove il prezzo attuale S_{N-1} è noto e siano

$$\begin{aligned} X_{N-1} &= (K - S_{N-1})^+ \\ p_{N-1} &= E^Q((K - S_N)^+ \frac{S_{N-1}^0}{S_N^0} | \mathcal{F}_{N-1}) \end{aligned}$$

Può accadere:

- $X_{N-1} \geq p_{N-1}$: conviene esercitare l'opzione ricevendo l'importo X_{N-1} ; non esercitando si possederebbe la somma (inferiore) p_{N-1} ;
- $X_{N-1} < p_{N-1}$: non conviene esercitare perchè si venderebbe al prezzo X_{N-1} una put Europea di valore (superiore) p_{N-1} .

Procedendo a ritroso, nei vari istanti temporali l'holder dovrà quindi valutare se conviene o meno esercitare, e questo accadrà nel primo istante in cui si ha l'uguaglianza $X_{N-1} = p_{N-1}$.

Dal precedente esempio si comprende facilmente il significato della definizione 3.5 nel caso di un'opzione Americana X con prezzo d'arbitraggio $\tilde{H}_n$:

$$\nu_0 = \inf \left\{ n \geq 0 | \tilde{H}_n = \tilde{X}_n \right\} \quad (3.19)$$

Tale definizione indica quindi che ν_0 è il più piccolo tempo di esercizio, la prima data in cui conviene esercitare l'opzione e, per quanto visto nella proposizione 3.3 e nel corollario 3.1, è anche il più piccolo tempo d'arresto (di esercizio) ottimale.

Ripercorrendo l'analisi fatta nel paragrafo 3.2, si ritrovano per le opzioni Americane i seguenti risultati:

Proposizione 3.4. *La variabile aleatoria definita da:*

$$\nu_0 = \inf \{n \geq 0 | H_n = X_n\}$$

è un tempo di esercizio e il processo del profitto $(\tilde{H}_{n \wedge \nu_0})$ con tempo di esercizio ν_0 è una Q -martingala.

Dimostrazione. Vedi proposizione 3.2 □

Teorema 3.4 (Formula di valutazione di un derivato Americano). *Sia X un derivato Americano; sia $\tilde{H}$ il suo prezzo d'arbitraggio.*

Allora valgono i seguenti risultati:

ia) $\nu_0 = \inf \{n \geq 0 | H_n = X_n\}$ *è il più piccolo tempo di esercizio ottimale;*

iiia) *vale la seguente formula di valutazione neutrale al rischio:*

$$\tilde{H}_0 = E^Q(\tilde{X}_{\nu_0})$$

iiia) *la strategia di esercizio ν_0 è la strategia che offre il maggior valore atteso del payoff, cioè:*

$$\tilde{H}_0 = E^Q(\tilde{X}_{\nu_0}) = \sup_{\nu \in \tau_{0,N}} E^Q(\tilde{X}_\nu)$$

Tale risultato si estende in modo naturale nel seguente modo:

ib) $\nu_k = \inf \{n \geq k | H_n = X_n\}$ *è il più piccolo tempo di esercizio ottimale di un derivato Americano acquistato al tempo k ;*

iiib) vale la seguente formula di valutazione neutrale al rischio:

$$\tilde{H}_k = E^Q(\tilde{X}_{\nu_k} | \mathcal{F}_k)$$

iiib) la strategia di esercizio ν_k è la strategia che offre il maggior valore atteso del payoff, cioè:

$$\tilde{H}_k = E^Q(\tilde{X}_{\nu_k} | \mathcal{F}_k) = \sup_{\nu \in \tau_{k,N}} E^Q(\tilde{X}_\nu | \mathcal{F}_k)$$

Dimostrazione. Vedi teorema 3.1 e corollario 3.1 □

Il capitolo si conclude analizzando il problema della copertura da un punto di vista teorico, utilizzando la decomposizione di Doob sul prezzo d'arbitraggio $\tilde{H}$ del derivato Americano; per un approccio pratico e più costruttivo si rimanda al capitolo successivo.

Definizione 3.6. Un portafoglio $\alpha \in \mathcal{A}$ si dice *portafoglio di copertura* (o strategia super-replicante) per il derivato X con prezzo d'arbitraggio H se valgono:

1. $V_0(\alpha) = H_0$
2. $\forall n \in [0, \dots, N], \quad V_n(\alpha) \geq X_n$

Questa nozione viene introdotta perchè, nonostante si operi in un mercato completo S , non è possibile trovare un portafoglio $\alpha \in \mathcal{A}$ composto da titoli di S che replichi perfettamente il derivato Americano X , cioè tale che per ogni $n = 0, \dots, N$ si abbia l'uguaglianza

$$V_n(\alpha) = H_n$$

Questo inconveniente è dovuto al fatto che $\tilde{V}_n(\alpha)$ è una Q -martingala per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, mentre $\tilde{H}$ è una Q -supermartingala.

Il seguente teorema assicura l'esistenza di un portafoglio di copertura per

ogni derivato Americano, ovviando al problema della replicazione: chi vende un derivato X (in genere la banca) riceve al tempo iniziale la somma H_0 (condizione 1. della definizione 3.6); investendo tale somma in un portafoglio di copertura si assicura in ogni istante n una rendita maggiore o uguale al premio X_n che deve pagare in caso di esercizio del derivato (condizione 2. della definizione 3.6).

Teorema 3.5 (Copertura di un derivato Americano). *Per ogni derivato Americano esiste un portafoglio di copertura.*

Dimostrazione. Il prezzo d'arbitraggio normalizzato $\tilde{H}$ di un derivato Americano X è una $\mathbb{Q}$ -supermartingala; possiamo quindi applicare a tale processo il teorema 3.2 di decomposizione di Doob e scrivere

$$\tilde{H} = M - A$$

dove (vedi equazioni (3.15) e (3.14))

- M è una $\mathbb{Q}$ -martingala definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} M_0 = H_0 \\ M_{n+1} - M_n = \tilde{H}_{n+1} - E^{\mathbb{Q}}(\tilde{H}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \end{cases}$$

- A è un processo predicabile crescente definito da

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_{n+1} - A_n = -(\tilde{H}_n - E^{\mathbb{Q}}(\tilde{H}_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \end{cases}$$

Per la completezza del mercato S esiste $\alpha \in \mathcal{A}$ che replichi il derivato Europeo M_N dato da

$$M_N = \tilde{H}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{H}_{k+1} - E(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k)) \quad (3.20)$$

Ora, poichè per definizione di strategia replicante $\tilde{V}(\alpha)$ e M sono martingale con lo stesso valore finale, si ha

$$\tilde{V}_n(\alpha) = E(\tilde{V}_N(\alpha)|\mathcal{F}_n) = E(M_N|\mathcal{F}_n) = M_n, \quad n = 0, \dots, N$$

e in particolare $\tilde{V}_0(\alpha) = M_0 = \tilde{H}_0$ cioè vale la condizione 1. della definizione di portafoglio di copertura.

Inoltre essendo $A_n \geq 0$ si ha che

$$\tilde{V}_n(\alpha) = M_n \geq \tilde{H}_n, \quad n = 0, \dots, N$$

da cui

$$V_n(\alpha) \geq \tilde{H}_n \geq \tilde{X}_n, \quad n = 0, \dots, N$$

cioè la condizione 2. della definizione di portafoglio di copertura. $\square$

Osservazione 3.5. Nella dimostrazione del teorema 3.5 si è usata la scrittura (3.20) da cui discende, per $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} M_n &= \tilde{H}_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{H}_k - E^Q(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k)) \\ &= \tilde{H}_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{X}_k - E^Q(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k))^+ =: \tilde{H}_n + I_n \end{aligned} \quad (3.21)$$

M_n si scompone quindi nella somma del prezzo $\tilde{H}_n$ e del termine I_n che si interpreta come il valore degli esercizi anticipati, dal momento che i termini della sommatoria che definisce I_n sono positivi quando $\tilde{X}_k > E^Q(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k)$, cioè nei tempi d'esercizio.

Anche se questa dimostrazione è costruttiva e identifica la strategia di copertura con la strategia replicante il derivato M_N , il calcolo di tale strategia è estremamente complicato a causa del fatto che M_N è un derivato *path-dependent* anche se X è path-independent.

Nella pratica si utilizza un approccio basato sul modello binomiale e descritto nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Modello binomiale per le opzioni Americane

L'intento di questo capitolo conclusivo è quello di descrivere il modello binomiale proposto da Cox, Ross e Rubinstein (CRR), versione discreta del famoso modello a tempo continuo di Black&Sholes, e applicarlo al caso particolare delle opzioni Americane, ricavandone un semplice metodo di copertura e provando, infine, che tale modello a tempo discreto approssima effettivamente il modello di Black&Sholes.

4.1 Modello CRR

Il modello CRR è un modello discreto, matematicamente semplice, che si basa sul principio di non arbitraggio e su un mercato costituito da soli due titoli:

$$(B, S)$$

dove B è un titolo non rischioso (Bond) e S è un titolo rischioso (azione).

Si suddivide il periodo $[0, T]$ in N intervalli temporali e sia $r > 0$ il tasso no-risk su ogni singolo sottointervallo; per i due titoli si suppongono le seguenti dinamiche:

- per il titolo non rischioso B si suppone una ricapitalizzazione semplice, cioè un processo del tipo:

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n(1+r) \\ B_N &= B_0(1+r)^N \end{aligned}$$

Quindi se per semplicità si suppone $B_0 = 1$

$$B_n = (1+r)^n, \quad \forall n \in [0, N] \quad (4.1)$$

- per il titolo rischioso S si sceglie un processo dei prezzi in cui S possa assumere di volta in volta solo due valori, cioè una dinamica del tipo:

$$\begin{array}{c} uS_n \\ S_n \\ dS_n \end{array}$$

cioè

$$S_{n+1} = \begin{cases} uS_n, & \text{con probabilità } p \\ dS_n, & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

Più precisamente su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ siano $\xi_1, \dots, \xi_N$ variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni $k = 1, \dots, N$ valga

$$\begin{aligned} P(\xi_k = u) &= p \\ P(\xi_k = d) &= 1-p \end{aligned}$$

con $p \in (0, 1)$ e $0 < d < u$.

La dinamica del titolo S viene quindi definita come:

$$S_{n+1} = \xi_{n+1} S_n, \quad \forall n \in [0, N-1] \quad (4.2)$$

In particolare il valore del sottostante in ogni momento è pari a

$$S_n = u^k d^{n-k} S_0 \quad (4.3)$$

ed è quindi individuato dall'istante temporale n e dal numero di movimenti di crescita k ; tramite l'equazione (4.3) si riesce a determinare

esattamente ogni possibile traiettoria, assegnando una ben precisa probabilità ad ogni ramo dell'albero binomiale ed un preciso valore ad ogni nodo (figura 4.1).

In seguito si utilizzerà quindi la notazione

$$S_n = S_{n,k} \quad (4.4)$$

e analogamente

$$H_n(k) = H_n(S_{n,k}) \quad (4.5)$$

sarà il prezzo del derivato all'istante n nel caso in cui il sottostante abbia avuto una traiettoria con k movimenti di crescita.

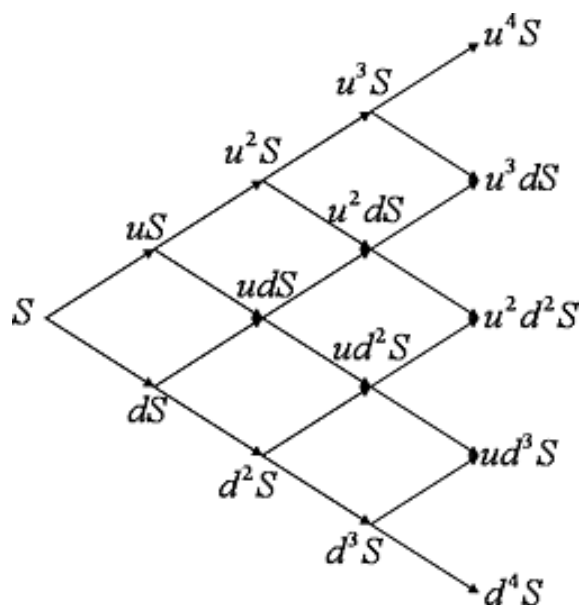


Figura 4.1: Albero binomiale

I seguenti risultati mostrano che il mercato (B, S) così definito è completo e libero da arbitraggi sotto certe scelte dei parametri d, u, r (si noti che il parametro p non interviene sulla completezza e sull'assenza di arbitraggi nel mercato binomiale).

Proposizione 4.1. *Se $d < 1 + r < u$ allora il modello CRR è libero da arbitraggi.*

Proposizione 4.2. *$d < 1 + r < u$ se e solo se esiste ed è unica una misura martingala Q .*

In particolare $q = Q(\xi_{n+1} = u)$ e

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} \quad (4.6)$$

La proposizione 4.1 mostra la condizione che garantisce che il mercato (B, S) sia libero da arbitraggi; invece per il secondo teorema fondamentale della valutazione la proposizione 4.2 assicura condizioni di completezza, quindi:

Teorema 4.1. *Se d, u sono tali che $d < 1 + r < u$, il modello CRR è libero da arbitraggi e completo, con unica misura martingala Q data dalla (4.6).*

4.2 Algoritmo binomiale

Essendo il mercato binomiale così definito un mercato completo, ogni derivato di tipo Europeo è replicabile; considero la strategia di investimento

$$V = \alpha S + \beta B := \alpha S + b \quad (4.7)$$

Per determinare il portafoglio replicante si procede a ritroso, ponendosi inizialmente alla data $N - 1$ dove si ha:

$$\begin{array}{c} uS_{N-1} \\ S_{N-1} \\ dS_{N-1} \end{array}$$

Imporre la condizione di replicazione significa risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha_N uS_{N-1} + b_N = F(uS_{N-1}) \\ \alpha_N dS_{N-1} + b_N = F(dS_{N-1}) \end{cases} \quad (4.8)$$

da cui si trovano i valori α_N e b_N , ma essendo $\alpha \in \mathcal{A}$, α è autofinanziante, quindi $V_{N-1} = \alpha_N S_{N-1} + b_N$ e sostituendo i valori di α_N e b_N dati dal sistema (4.8) si ottiene

$$V_{N-1} = \frac{1}{1+r} (F(uS_{N-1}) + (1-q)F(dS_{N-1}))$$

con $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

Iterando il procedimento partendo dall'istante temporale $N-2, N-3, \dots, 1, 0$ e utilizzando le notazioni (4.4) e (4.5) si trova l'algoritmo

$$\begin{cases} H_N(k) = F(S_{N,k}), & k \leq N \\ H_{n-1}(k) = \frac{1}{1+r} (qH_n(k+1) + (1-q)H_n(k)), & k \leq n-1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Si consideri ora il caso di un derivato Americano X : intuitivamente a differenza del caso Europeo, in ogni istante temporale l'holder deve valutare se esercitare o meno l'opzione, confrontando ad ogni passo il prezzo neutrale al rischio col valore in caso di esercizio anticipato; l'albero binomiale verrà quindi idealmente diviso in due regioni, una d'esercizio e una di continuazione.

Utilizzando tale osservazione e la definizione di prezzo d'arbitraggio di un derivato Americano, si modifica l'algoritmo trovato per il caso Europeo ottenendo immediatamente la seguente formula iterativa:

$$\begin{cases} H_N(k) = X_N(S_{N,k}), & k \leq N \\ H_{n-1}(k) = \max \left\{ X_n(S_{n,k}), \frac{1}{1+r} (qH_n(k+1) + (1-q)H_n(k)) \right\}, & k \leq n-1 \end{cases} \quad (4.10)$$

per $n = 1, \dots, N$ e $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

Ritornando al problema della copertura, l'algoritmo binomiale semplifica il risultato teorico visto nel teorema di Doob: infatti il processo M_n del sottostante è path-dependent perchè deve tener conto di tutti gli eventuali esercizi anticipati, ma basta notare che nel momento in cui il derivato viene esercitato non è più necessario preoccuparsi di coprirlo.

Il problema della copertura di un derivato Americano si riduce quindi a quello

della copertura di un Europeo nella regione di continuazione, trascurando poi i movimenti e le traiettorie della regione di esercizio.

4.3 Approssimazione discreta di un modello continuo

Come già visto il modello binomiale è un modello discreto, dove di volta in volta viene fissato il numero N di periodi; aumentando N ci si aspetterebbe che il risultato migliori e raggiunga un certo valore fissato, cioè ci si pone la domanda se l'algoritmo binomiale sia stabile o se diverge o oscilla (cose che metterebbero in dubbio la consistenza del modello).

Nel caso Europeo si verifica che, sotto opportune scelte dei parametri, l'algoritmo è stabile ed è un'approssimazione discreta del famoso modello continuo di Black&Sholes al tendere di N all'infinito; inoltre è anche possibile interpretare lo schema di valutazione (4.9) del modello binomiale come una versione discreta del seguente problema di Cauchy per l'equazione differenziale parabolica di Black&Sholes:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}f(t, S) = 0, & (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \\ f(T, S) = F(S), & S \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (4.11)$$

dove

$$\mathcal{L}_{BS}f(t, S) = \partial_t f(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \partial_{SS} f(t, S) + rS \partial_S f(t, S) - rf(t, S) \quad (4.12)$$

è l'operatore differenziale di Black&Sholes.

Questo risultato può essere esteso anche al caso di derivati Americani: anche qui si ritrova, per N grande, la stabilità dell'algoritmo e la convergenza al corrispondente modello a tempo continuo; inoltre lo schema di valutazione (4.10) del modello binomiale per derivati Americani può essere visto come una versione discreta di un *problema a frontiera libera*, più difficile da trattare del classico problema di Cauchy trovato nel caso Europeo; per questo motivo

l'approssimazione tramite il modello CRR rappresenta una valida alternativa alla risoluzione del problema in tempo continuo. Qui di seguito vengono dimostrati i risultati sopra enunciati.

Considero ora l'algoritmo binomiale (4.10) per le opzioni Americane; questo può essere scritto analogamente, con diverse notazioni, come:

$$\begin{cases} f(T, S) = F(T, S) \\ f(t, S) = \max \left\{ f(t, S), \frac{1}{1+r} (qf(t+\delta, uS) + (1-q)f(t+\delta, dS)) \right\} \end{cases} \quad (4.13)$$

dove t indica l'istante temporale e δ il 'passo', ovvero se si suddivide l'intervallo $]0, T[$ di vita dell'opzione in N sottointervalli, $\delta = \frac{T}{N}$; le funzioni f ed F , dipendenti dal tempo e dal sottostante, descrivono rispettivamente i prezzi d'arbitraggio e il valore del derivato.

Per i parametri del modello binomiale si assumono in seguito le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\delta}} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta) \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta}} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta) \\ 1+r &= e^{\rho\delta} = 1 + \rho\delta + o(\delta) \end{aligned}$$

per $\delta \rightarrow 0$, da cui si ottiene anche:

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + o(\delta)$$

per $\delta \rightarrow 0$.

Osservazione 4.1. Valgono le seguenti equivalenze:

$$u = \max \{A, B\} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-A)(u-B) = 0 \\ u \geq A, u \geq B \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} u &= \max \{A, B\} \\ &\Updownarrow \\ u &= A, B \leq A \text{ oppure } u = B, B \geq A \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utilizzando la (4.14), la (4.13) diventa:

$$\begin{cases} f(T, S) = F(T, S) \\ (f(t, S) - F(t, S))(f(t, S) - \frac{1}{1+r}(qf(t + \delta, uS) + (1 - q)f(t + \delta, dS))) = 0 \\ f(t, S) \geq F(t, S), f(t, S) \geq \frac{1}{1+r}(qf(t + \delta, uS) + (1 - q)f(t + \delta, dS)) \end{cases} \quad (4.16)$$

Equivalentemente, denotando

$$\begin{aligned} f &= f(t, S) \\ f^u &= f(t + \delta, uS) \\ f^d &= f(t + \delta, dS) \\ \mathcal{J}_\delta f(t, S) &= -(1 + r)f + qf^u + (1 - q)f^d \end{aligned}$$

raccogliendo a fattor comune e cambiando i segni in (4.16), si ottiene il seguente sistema discreto, equivalente all'algoritmo binomiale descritto dalla (4.10):

$$\begin{cases} f(T, S) = F(T, S) & S \in \mathbb{R}^+ \\ (f(t, S) - F(t, S))(\mathcal{J}_\delta f(t, S)) = 0 & (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \\ f(t, S) \geq F(t, S), \mathcal{J}_\delta f(t, S) \leq 0 & (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.17)$$

Il seguente risultato permette di passare da questo problema, ancora a tempo discreto, al problema a continuo; tale risultato é lo stesso utile per dimostrare quanto detto per le opzioni Europee, e dimostra il tendere dell'operatore differenziale discreto $\mathcal{J}_\delta f(t, S)$ a quello continuo di Black&Sholes $\mathcal{L}_{BS}f(t, S)$. Per la prova di tale proposizione si rimanda a [5].

Proposizione 4.3.

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ (t, S) \rightarrow (t_0, S_0)}} \frac{\mathcal{J}_\delta f(t, S)}{\delta} = \mathcal{L}_{BS}f(t, S) \quad (4.18)$$

dove $\mathcal{L}_{BS}f(t, S)$ è l'operatore differenziale di Black&Sholes definito nell'equazione 4.12.

Grazie a questa proposizione il sistema

$$\begin{cases} f(T, S) = F(T, S) & S \in \mathbb{R}^+ \\ (f(t, S) - F(t, S))(\mathcal{L}_{BS}f(t, S)) = 0 & (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \\ f(t, S) \geq F(t, S), \mathcal{L}_{BS}f(t, S) \leq 0 & (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.19)$$

è la versione asintotica dell'algoritmo binomiale per la valutazione di opzioni Americane e rappresenta un cosiddetto *problema a frontiera libera*.

Osservazione 4.2. Intuitivamente questo risultato si spiega facilmente attraverso la seconda equivalenza dell'osservazione 4.1: procedendo analogamente al caso precedente (in cui invece si era considerata l'equivalenza (4.14)), la versione continua dell'algoritmo binomiale per derivati Americani è

$$\begin{aligned} f(T, S) = F(T, S), \mathcal{L}_{BS}f(t, S) < 0 \\ \text{oppure} \\ \mathcal{L}_{BS}f(t, S) = 0, f(t, S) = F(t, S) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ciò manifesta in modo più chiaro l'esistenza delle due regioni già menzionate, descritte dalle equazioni

- $f(T, S) = F(T, S) \longrightarrow$ per la *regione di esercizio*, in cui il derivato vale quanto il prezzo d'esercizio, e quindi conviene esercitarlo;
- $\mathcal{L}_{BS}f(t, S) = 0 \longrightarrow$ per la *regione di continuazione*, in cui non si esercita ed è come possedere un derivato Europeo; si noti che tale equazione esprime il fatto che un'opzione Europea soddisfa l'equazione di Black&Sholes.

Osservazione 4.3. Sempre dalla (4.20) si può notare che

$$\mathcal{L}_{BS}f(t, S) \leq 0, \forall (t, S) \in]0, T[\times \mathbb{R} \quad (4.21)$$

cosa d'altronde ovvia per come è stato definito l'operatore discreto $\mathcal{J}_\delta f(t, S)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\delta f(t, S) &= -(1+r)f + qf^u + (1-q)f^d = \\ &= \left(-f + \frac{qf^u + (1-q)f^d}{1+r} \right) (1+r)\end{aligned}$$

Infatti da $f(t, S) = \max \left\{ f(t, S), \frac{1}{1+r}(qf(t+\delta, uS) + (1-q)f(t+\delta, dS)) \right\}$ si ha $f(t, S) - \frac{1}{1+r}(qf(t+\delta, uS) + (1-q)f(t+\delta, dS)) \geq 0$ e quindi (poichè $r > 0$) $\mathcal{J}_\delta f(t, S) \leq 0$. Per il teorema di conservazione del segno, passando al limite per $\delta \rightarrow 0$ (cioè per il numero N di intervalli che tende all'infinito) si ha che anche $\mathcal{L}_{BS}f(t, S) \leq 0$.

Bibliografia

- [1] D. Lamberton, B. Lapeyre (2000) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Springer
- [2] P. Baldi, L. Caramellino (2006) *Appunti del corso di Probabilità e Finanza*
- [3] Wolfgang J. Runggaldier, *Note sulle Opzioni Americane*
- [4] D. Lamberton *Optimal stopping and American options*, lecture notes for Spring School in Finance 2006
- [5] A. Pascucci, *Calcolo stocastico per la finanza*